Красноярский государственный университет

Кафедра прикладной математики

Моделирование финансовых рисков

Альтернативный курс для студентов МФ КГУ

А.А.Новоселов

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
660036, Красноярск, Академгородок,
e-mail: anov@cc.krascience.rssi.ru, т. 49-53-82

Изменен 15.12.1998

Красноярск 1998

Содержание

1. Неопределенность и риск

1.1. Неопределенность

Окружающий мир полон неопределенностей, связанных с невозможностью точного предсказания будущих событий. Ошибаясь в прогнозах, мы рискуем получить не совсем то, или совсем не то, что ожидалось. Вездесущая неопределенность является источником **риска**.

Математические модели, описывающие неопределенность, можно разделить на две группы:

- вероятностные модели;
- модели нечетких множеств.

В настоящем курсе мы будем использовать только первый способ описания.

1.2. Риск

Часто нас интересует не столько исход того или иного процесса, сколько связанные с ним количественные характеристики. При этом риск может быть описан **случайной величиной**, или, в общем случае **абстрактным случайным элементом**. Совокупность всех рисков будем обозначать $\mathcal{X}$, и на начальном этапе ограничимся следующим определением.

Определение 1.1. *Риском называется произвольная случайная величина.*

1.3. Портфель рисков

Совокупность рисков, рассматриваемых совместно, часто обладает новыми свойствами, не присущими каждому из рисков в отдельности, поэтому введем понятие **портфеля** рисков $\mathcal{P}$, как произвольного подмножества $\mathcal{X}$.

1.4. Страхование

Под страхованием понимается передача риска от одного носителя (страхователя) другому (специализированной организации – страховой компании, страховщику) за определенную плату, называемую ценой страхования, тарифной ставкой или **страховой премией**. Сущность страхования заключается в перераспределении риска между многими носителями; относительно однородную совокупность рисков будем называть страховым портфелем.

2. Страховые портфели

Рассмотрим некоторые виды страховых портфелей, использующиеся в дальнейшем.

2.1. Простейший страховой портфель

Простейший страховой портфель

$$\mathcal{P} = \{X_1, ..., X_N\} \tag{2.1}$$

состоит из N рисков (случайных величин) $X_1, ..., X_N$, являющихся независимыми и одинаково распределенными; X_1 имеет бернуллиевское распределение

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases} \tag{2.2}$$

Содержательно для каждого риска страховое событие может наступить с вероятностью p, а убыток в результате наступления этого страхового события равен 1 (и одинаков для всех рисков).

Ясно, что риск портфеля

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2.3}$$

имеет биномиальное распределение с параметрами N, p:

$$\mathbf{P}\{X = k\} = C_N^k p^k (1-p)^{(N-k)}, \; k = 0, 1, ..., N. \tag{2.4}$$

Основные параметры этого распределения равны

$$\mathbf{E}X = Np; \; \mathbf{D}X = Np(1-p). \tag{2.5}$$

2.2. Простой страховой портфель

Простой страховой портфель

$$\mathcal{P} = \{X_1, ..., X_N\} \tag{2.6}$$

также состоит из N независимых рисков $X_1, ..., X_N$, однако их распределения несколько различаются:

$$X_i = \begin{cases} S_i & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases} \tag{2.7}$$

Содержательно для i–го риска страховое событие наступает с вероятностью p, а размер убытка в результате наступления этого события равен S_i и, вообще говоря, неодинаков у различных рисков. Примером может служить страхование на случай смерти с величиной S_i, определяемой страховой суммой i–го договора портфеля.

Распределение риска портфеля (2.3) в данном случае уже не имеет столь простого выражения, как (2.4), но его основные параметры все еще легко вычисляются:

$$\mathbf{E}X = Np\bar{S}_N; \; \mathbf{D}X = Np(1-p)\widehat{S}_N^2, \tag{2.8}$$

где

$$\bar{S}_N = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} S_i; \; \widehat{S}_N^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} S_i^2. \tag{2.9}$$

2.3. Реальный страховой портфель

Реальный страховой портфель является дальнейшим усложнением простого портфеля; здесь допускаются произвольные размеры убытков из диапазона $[0, S_i]$. Формальное описание этого портфеля таково: он состоит из N независимых рисков

$$\mathcal{P} = \{X_1, ..., X_N\}, \tag{2.10}$$

вероятность наступления страхового события по i–му риску по–прежнему равна p, а размер убытка, вызванного страховым событием описывается случайной величиной

$$X_i = \xi_i r_i S_i,$$

где

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p \end{cases}$$

есть индикатор наступления страхового события по i–му риску, S_i – страховая сумма (ответственность) по i–му риску, а $r_1, ..., r_N$ – совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F_r(v) = \mathbf{P}\{r_1 \le v\}$. Здесь распределение риска портфеля также не имеет простого явного выражения, но по известным параметрам распределения r_1

$$m = \mathbf{E}r_1, \ \tau^2 = \mathbf{D}r_1 \tag{2.11}$$

нетрудно подсчитать основные параметры риска портфеля (2.3):

$$\mathbf{E}X = pmN\bar{S}_N, \ \mathbf{D}X = pm^2N\widehat{S}_N[1 - p + \tau^2/m^2]. \tag{2.12}$$

Упражнение 2.1. *Вывести формулы (2.5), (2.8), (2.12) для параметров рассмотренных портфелей.*

3. Цена страхования

Одной из основных задач теории риска является определение цены, которую следует уплатить при передаче риска от одного носителя к другому. В страховании принято выражать страховую премию в долях от страховой суммы (ответственности) S_i соответствующего риска. Таким образом, при размере премии T (одинаковом для всех рисков портфеля) абсолютный размер премии i–го риска оказывается равным TS_i, а суммарная премия портфеля –

$$Q = TN\bar{S}_N. \tag{3.1}$$

Попытаемся сначала сформулировать некоторые естественные принципы определения цены, и рассмотрим их действие на примере простейшего страхового портфеля.

3.1. Принципы определения цены

3.1.1. Принцип безрискованности

В качестве первого принципа попытаемся назначить цену так, чтобы деятельность страховой компании была безрискованной, то есть, чтобы собранных премий (3.1) с вероятностью 1 хватало для покрытия всех страховых убытков портфеля. В случае простейшего портфеля максимальный размер убытка портфеля равен N, а вероятность его появления: $p^N > 0$, так что для выполнения этого требования необходимо обеспечить равенство $Q = TN = N$, откуда $T = 1$, т.е. абсолютный размер премии совпадает с ответственностью по риску. Ясно, что такое страхование является совершенно непривлекательным для страхователей, и его рассмотрение лишено смысла. Нетрудно проверить, что данный вывод справедлив и для более сложных портфелей рисков (см. упражнение 3.1). Отсюда следует вывод:

Безрискованное ведение страхового бизнеса невозможно,

и, в частности, страховая премия должна удовлетворять неравенству $T < 1$.

3.1.2. Принцип справедливости

Попытаемся теперь обеспечить "справедливость" процесса передачи рисков, т.е. эквивалентность финансовых обязательств партнеров. Поскольку размер страховой премии (финансового обязательства страхователя) детерминирован, а размер обязательства страховщика (возмещаемого страхового убытка) случаен, будем понимать равенство этих обязательств в среднем по портфелю: $TN = \mathbf{E}X$, откуда, с учетом (2.5), $T = p$. Как мы увидим далее при рассмотрении процессов риска, такой размер премии является слишком малым, поскольку при многократном воспроизведении такого страхового портфеля с вероятностью 1 происходит разорение страховой компании. Здесь проиллюстрируем этот эффект следующими соображениями. Зададимся вопросом: каков будет размер прибыли страховщика после m – кратного воспроизведения портфеля, сформированного по справедливому принципу. Прибыль j–го портфеля представляет собой случайную величину $Z^{(j)} = Q - X^{(j)}$ с $\mathbf{E}Z^{(j)} = 0$ и $\mathbf{D}Z^{(j)} = \sigma^2 > 0$. Поэтому искомая прибыль есть

$$Z_m = \sum_{j=1}^{m} Z^{(j)},$$

причем $\mathbf{E}Z_m = 0$ и (в случае независимости портфелей) $\mathbf{D}Z_m = m\sigma^2$, т.е. прибыль m портфелей в среднем равна 0, но неопределенность в ее значении возрастает с ростом m, в частности, может достигнуть сколь угодно малого значения, приводя к разорению компании.

Таким образом, премия должна удовлетворять неравенству $T > p$. Для более сложных портфелей (см. упражнение 3.2) вывод звучит следующим образом: премия должна превосходить размер среднего относительного убытка портфеля $\mathbf{E}(X/R)$, где $R = \sum S_i$ – суммарная ответственность по портфелю.

3.1.3. Принцип достаточного покрытия

В предыдущих пунктах мы убедились в том, что первые два принципа исчисления премии неработоспособны, и следует искать другие принципы, приводящие к значениям $T \in (p, 1)$ (для простейшего портфеля). Здесь рассмотрим принцип достаточного покрытия, сущность которого заключается в следующем: поскольку единичную вероятность покрытия будущих убытков портфеля X премиями Q обеспечить не удается, попытаемся обеспечить заданное значение этой вероятности: зафиксируем число $\alpha \in (0,1)$ и будем определять премию T из уравнения

$$\mathbf{P}\{X \le Q\} = \alpha. \tag{3.2}$$

Пусть F – функция распределения риска портфеля: $F(x) = \mathbf{P}\{X \le x\}$, F_0 – функция распределения соответствующей центрированной и нормированной случайной величины $(X - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X}$. Тогда уравнение (3.2) приводится к виду

$$F_0((Q - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X}) = \alpha, \tag{3.3}$$

откуда, с учетом (3.1), (2.5), получаем

$$T = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} F_0^{-1}(\alpha) = p\left(1 + \sqrt{\frac{1-p}{pN}} F_0^{-1}(\alpha)\right). \tag{3.4}$$

В случае большого объема портфеля N ссылка на центральную предельную теорему позволяет переписать (3.4) в виде

$$T = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \Phi^{-1}(\alpha) = p\left(1 + \sqrt{\frac{1-p}{pN}} \Phi^{-1}(\alpha)\right), \tag{3.5}$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения.

Из (3.3) с использованием (2.8), (2.12), аналогично получаем выражения страховой премии для простого

$$T = p + \frac{\widehat{S}_N}{\bar{S}_N}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} F_0^{-1}(\alpha) = p\left(1 + \frac{\widehat{S}_N}{\bar{S}_N}\sqrt{\frac{1-p}{pN}} F_0^{-1}(\alpha)\right) \tag{3.6}$$

и реального

$$T = p + \frac{\widehat{S}_N}{\bar{S}_N}\sqrt{\frac{p(1-p+\tau^2/m^2)}{N}} F_0^{-1}(\alpha) = p\left(1 + \frac{\widehat{S}_N}{\bar{S}_N}\sqrt{\frac{1-p+\tau^2/m^2}{pN}} F_0^{-1}(\alpha)\right) \tag{3.7}$$

портфелей, соответственно. Здесь функция распределения F_0 также может быть при большом объеме портфеля заменена на функцию стандартного нормального распределения.

Отметим, что именно формула (3.7), полученная нами здесь с использованием исключительно элементарных средств, рекомендована российским страховщикам нормативными документами [1] для расчетов страховой премии по всем видам страхования, отличным от страхования жизни (причем с заменой множителя $\widehat{S}_N/\bar{S}_N$ на произвольно выбранную постоянную 1.2). Вся излагаемая дальше теория еще ждет своего применения в практике российского страхового рынка.

3.2. Неоднородность портфеля

Простейший страховой портфель является вполне однородным, а в простом и реальном допускаются различные величины страховых сумм S_i, что приводит к неоднородности этих портфелей. Указанная неоднородность количественно определяется коэффициентом

$$n_{\mathcal{P}} = \widehat{S}_N/\bar{S}_N. \tag{3.8}$$

Изучим здесь его возможные значения.

Предложение 3.1. *Значения коэффициента неоднородности портфеля (3.8) лежат в интервале* $[1, \sqrt{N}]$.

Доказательство. Для удобства будем рассматривать значения $n^2_{\mathcal{P}}$ и покажем, что они лежат в $[1, N]$. Рассмотрим вспомогательную дискретную случайную величину ξ, принимающую значения $S_1, ..., S_N$ с вероятностями N^{-1}. Для нее, очевидно, справедливо

$$\mathbf{E}\xi = \bar{S}_N,\ \mathbf{E}\xi^2 = \widehat{S}^2_N,$$

так что

$$\mathbf{D}\xi = \widehat{S}^2_N - \bar{S}^2_N \geq 0,$$

откуда $n^2_{\mathcal{P}} \geq 1$. Для нахождения верхней границы диапазона значений $n^2_{\mathcal{P}}$ заметим, что максимизация $n^2_{\mathcal{P}}$ на неотрицательном ортанте $\mathbf{R}^+$ эквивалентна задаче оптимизации

$$f(S_1, ..., S_N) = S_1^2 + ... + S_N^2 \longrightarrow \max_{S_1,...,S_N}, \tag{3.9}$$

$$S_1 + ... + S_N = 1, \tag{3.10}$$

$$S_1 \geq 0, ..., S_N \geq 0, \tag{3.11}$$

и покажем, что ее экстремальными точками могут быть только единичные орты $\mathbf{R}^N$, т.е. векторы вида $S = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ с единицей на i–й позиции (для каждого такого вектора, очевидно, $f(S_1, ..., S_N) = 1$). Действительно, пусть решением задачи (3.9) – (3.11) является точка $S^{(0)}$, некоторые координаты $S_j^{(0)}, S_k^{(0)}$ которой удовлетворяют неравенствам $0 < S_j^{(0)} \leq S_k^{(0)} < 1$. Ввиду симметрии задачи можно считать $j < k$. Тогда при достаточно малых δ точка $S^{(1)} = (..., S_j^{(0)} - \delta, ..., S_k^{(0)} + \delta, ...)$ является допустимой в этой задаче и

$$f(S^{(1)}) - f(S^{(0)}) = 2\delta(S_k^{(0)} - S_j^{(0)}) + 2\delta^2 > 0,$$

что противоречит экстремальности $S^{(0)}$. Значения же квадрата коэффициента неоднородности на единичных ортах равны, очевидно, N, что и требовалось. □

Упражнение 3.1. *Показать для простого и реального портфелей, что принцип безрискованности дает значение цены страхования* $T = 1$.

Упражнение 3.2. *Применить принцип эквивалентности к простому и реальному портфелям. Показать, что страховая премия должна превосходить размер средних относительных убытков портфеля.*

Упражнение 3.3. *Дать геометрическую интерпретацию доказательства предложения 3.1.*

4. Введение в теорию полезности

4.1. Риск

Риск есть состояние *неопределенности*, неполной информации относительно каких – либо событий в будущем. Чаще других для математического описания неопределенности используются следующие два способа:

- вероятностное описание;
- нечеткие (размытые) множества.

Второй способ предназначен для описания неопределенностей, присущих высказываниям на человеческих (неформализованных) языках.

Мы будем рассматривать только первый способ и, таким образом, определим риск, как состояние *вероятностной неопределенности*: будущие события нельзя предсказать точно, однако известно их вероятностное распределение.

В простейших случаях множество будущих событий конечно и риск представляется вероятностным распределением на конечном пространстве элементарных событий.

Пример 4.1. *В эксперименте с подбрасыванием монеты мы не можем точно предсказать исход этого эксперимента, однако множество всех возможных исходов конечно: $\Omega = \{г, р\}$ и известно вероятностное распределение на этом множестве: каждый из исходов может появиться с вероятностью 1/2.*

Часто нас интересуют не столько сами исходы эксперимента, сколько связанные с ними количественные значения; в этом случае риск описывается распределением некоторой случайной величины.

Пример 4.2. *В условиях предыдущего примера монета может подбрасываться в процессе игры двух лиц, в которой первый игрок выигрывает или проигрывает единицу в зависимости от выпавшей стороны монеты. Здесь риск описывается дискретной случайной величиной, принимающей значения ± 1 с вероятностями 1/2.*

Пример 4.3. *Доходность финансового вложения в фиксированную ценную бумагу не может быть точно предсказана заранее, однако всевозможные значения этой доходности могут быть описаны случайной величиной с распределением, полученным статистическими методами по данным о прошлом поведении доходности данной ценной бумаги.*

В более сложных случаях риск может описываться распределением случайного вектора, или, вообще говоря, распределением произвольного абстрактного *случайного элемента*; приведем строгое определение.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ – измеримое пространство, где $\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_\Theta$ – σ–алгебры событий на Ω, Θ, соответственно. Напомним, что случайным элементом Ξ на $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbf{P})$ со значениями в $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ называется измеримое (относительно пары σ–алгебр $\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_\Theta$) отображение $\Xi: \ \Omega \to \Theta$.

Определение 4.1. Риском *называется произвольный случайный элемент.*

Пример 4.4. *Пусть $\Theta = \mathbf{R}$ – вещественная прямая, $\mathcal{F}_\Theta = \mathcal{B}$ – σ–алгебра борелевских множеств на $\mathbf{R}$, тогда риск есть случайная величина.*

Пример 4.5. *Пусть $\Theta = \mathbf{R}^n$ – n–мерное пространство, $\mathcal{F}_\Theta = \mathcal{B}$ – σ–алгебра его борелевских множеств, тогда риск есть случайный вектор.*

Пример 4.6. *Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное конечное множество, $\Theta = 2^{\mathcal{X}}$ – совокупность всех его подмножеств, $\mathcal{F}_\Theta$ – алгебра всех подмножеств Θ, тогда Ξ есть случайное конечное абстрактное множество.*

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ будем трактовать, как окружающую среду, а измеримое пространство $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ – как пространство результатов. Каждый случайный элемент Ξ порождает на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ вероятностное распределение по правилу

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \ \Xi(\omega) \in T\} = \mathbf{P}\{\Xi^{-1}(T)\}, \ \ T \in \mathcal{F}_\Theta, \tag{4.1}$$

превращая его тем самым в вероятностное пространство $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta, P)$. Будем обозначать $\mathcal{P}$ совокупность всех таких вероятностных распределений на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$.

Упражнение 4.1. *Приведите пример нечеткого высказывания.*

Упражнение 4.2. *Приведите другие примеры рисков.*

Упражнение 4.3. *Совпадает ли совокупность распределений $\mathcal{P}$ с множеством всевозможных вероятностных распределений на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$?*

4.2. Предпочтения

4.2.1. Отношение предпочтения

Определение 4.2. *Отношение $\succeq$ на произвольном множестве Y называется отношением предпочтения, если оно*
p1) полно, т.е. $\forall x, y \in Y$ верно $x \succeq y$ или $y \succeq x$;
p2) транзитивно, т.е. $x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Пример 4.7. *Частным случаем отношения предпочтения является отношение полного упорядочения $\geq$, удовлетворяющее аксиомам*
o1) $\forall x, y \in Y$ верно $x \geq y$ или $y \geq x$ (полнота);
o2) $x \geq y, \ y \geq z \Rightarrow \ x \geq z$ (транзитивность);
o3) $x \geq y, \ y \geq x \Rightarrow \ x = y$ (антисимметричность).

Видно, что, в отличие от отношения порядка, отношение предпочтения не обладает, вообще говоря, свойством антисимметричности, т.е. из $x \succeq y$ и $y \succeq x$ не вытекает равенство x и y. Будем в этом случае называть x, y одинаково предпочтительными или эквивалентными и использовать для обозначения этого факта символ $\sim$:

$$x \succeq y, \ y \succeq x \Longrightarrow x \sim y.$$

Замечание 4.1. *Отметим здесь следующий факт: отношение "одинаковой предпочтительности" является в строгом смысле отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности $x \sim x, \ \forall x \in Y$, транзитивности $x \sim y, \ y \sim z \ \Rightarrow x \sim z$ и симметричности $x \sim y \ \Rightarrow \ y \sim x$, причем порожденное им фактор – множество $\mathcal{Y} = Y/\sim$ является вполне упорядоченным множеством с отношением порядка $\succeq$, индуцированным отношением предпочтения $\succeq$ на Y: для $Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$ отношение $Y_1 \succeq Y_2$ означает, что для некоторых (и, тем самым, для произвольных) $y_1 \in Y_1, \ y_2 \in Y_2$ выполняется $y_1 \succeq y_2$.*

Если же x предпочтительнее y, а обратное неверно, то будем использовать символ строгого предпочтения $\succ$:

$$x \succeq y,\ y \not\succeq x \Longrightarrow x \succ y.$$

Разумный индивидуум имеет четкое представление о системе своих предпочтений на пространстве результатов Θ: для произвольной пары $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ он может вполне определенно сказать, какой из этих элементов является для него более предпочтительным, или же эти элементы эквивалентны. Если результаты (элементы Θ) трактуются, как доходности, то Θ является подмножеством вещественной оси и отношение предпочтения можно задавать с помощью обычного отношения порядка на множестве вещественных чисел.

В теории полезности делается более сильное предположение: индивидуум имеет систему предпочтений и на пространстве распределений $\mathcal{P}$, т.е. для каждой пары распределений $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ может определенно указать более предпочтительное для него распределение или утверждать их эквивалентность. Таким образом, на $\mathcal{P}$ постулируется существование *отношения предпочтения* $\succeq$. Замечательнейшим фактом теории полезности является существование (при некоторых вполне естественных предположениях) *функции полезности*, адекватно описывающей это отношение предпочтения.

Упражнение 4.4. *Верно ли* $\forall x \in Y:\ x \succeq x$*?*

Упражнение 4.5. *Показать, что отношение* $\succeq$*, введенное на* $\mathcal{Y}$ *в замечании 4.1, действительно является отношением порядка на* $\mathcal{Y}$*.*

4.3. Теорема о существовании функции полезности

4.3.1. Система аксиом

Введем на $\mathcal{P}$ операцию смеси распределений: для произвольных $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ и числа $\alpha \in [0,1]$ смесью $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ назовем распределение $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$, задаваемое соотношением

$$\mathbf{P}(C) = \alpha \mathbf{P}_1(C) + (1-\alpha)\mathbf{P}_2(C),\quad C \in \mathcal{C}.$$

Будем предполагать выполненной следующую систему аксиом.
A1) На $\mathcal{P}$ существует отношение предпочтения $\succeq$.
A2) Если $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2$, то

$$\forall \alpha \in [0,1], \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}:\quad \alpha \mathbf{P}_1 + (1-\alpha)\mathbf{P} \sim \alpha \mathbf{P}_2 + (1-\alpha)\mathbf{P}. \tag{4.2}$$

A3) Если $\mathbf{P}_1 \succ \mathbf{P}_2$, то

$$\forall \alpha \in (0,1], \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}:\quad \alpha \mathbf{P}_1 + (1-\alpha)\mathbf{P} \succ \alpha \mathbf{P}_2 + (1-\alpha)\mathbf{P}. \tag{4.3}$$

A4) Если $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$, то существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha \mathbf{P}_1 + (1-\alpha)\mathbf{P}_3. \tag{4.4}$$

Приведенные аксиомы можно трактовать, как требования наличия у отношения предпочтения некоторой регулярности, "правильности".

4.3.2. Теорема существования

Прежде чем формулировать основную теорему, докажем несколько лемм.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены аксиомы A1–A4,* $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_1$ *и* $\mathbf{P}_3 \succeq \mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$. *Тогда существует единственная постоянная* $\alpha \in [0,1]$ *такая, что*

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha \mathbf{P}_1 + (1-\alpha)\mathbf{P}_3. \tag{4.5}$$

Доказательство. Заметим, что если $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \sim \mathbf{P}_1$, то соотношение (4.5) выполняется при единственном значении $\alpha = 1$ (см. упражнение 4.6). Аналогично, если $\mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$, то (4.5) выполняется только при $\alpha = 0$ (см. упражнение 4.7).

Пусть теперь $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$. Тогда по аксиоме A4 существует $\alpha_1 \in (0,1)$ такое, что выполнено

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1-\alpha_1)\mathbf{P}_3. \tag{4.6}$$

Предположим, что такое α_1 неединственно, и существует $\alpha_2 \in (0,1)$, для которого

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha_2 \mathbf{P}_1 + (1-\alpha_2)\mathbf{P}_3. \tag{4.7}$$

Положим для определенности $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}_3 = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_3 + \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_3 \tag{4.8}$$

и

$$\alpha_2\mathbf{P}_1 + (1-\alpha_2)\mathbf{P}_3 = \alpha_1\mathbf{P}_1 + (1-\alpha_1)\left[\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_3\right]. \tag{4.9}$$

Поскольку $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_1$, по аксиоме A3 и (4.8) получаем

$$\mathbf{P}_3 = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_3 + \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_3 \succ \frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_3. \tag{4.10}$$

Отсюда с использованием аксиомы A3 и (4.9) получаем:

$$\alpha_2\mathbf{P}_1+(1-\alpha_2)\mathbf{P}_3 = \alpha_1\mathbf{P}_1+(1-\alpha_1)\left[\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\mathbf{P}_3\right] \prec \alpha_1\mathbf{P}_1+(1-\alpha_1)\mathbf{P}_3. \tag{4.11}$$

Это соотношение противоречит (4.6),(4.7), так что постоянная α_1, для которой выполнено (4.6) – единственна. □

Лемма 4.2. *Если выполнены аксиомы A1–A4,* $\mathbf{P}_3 \succeq \mathbf{P}_2' \succeq \mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$ *и* $\alpha = \alpha(\mathbf{P}_2)$, $\alpha' = \alpha(\mathbf{P}_2')$ *таковы, что*

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha\mathbf{P}_1 + (1-\alpha)\mathbf{P}_3,\ \ \mathbf{P}_2' \sim \alpha'\mathbf{P}_1 + (1-\alpha')\mathbf{P}_3, \tag{4.12}$$

то $\alpha \geq \alpha'$ *(монотонность операции смешивания)*

Доказательство. Пусть, напротив, $\alpha < \alpha'$. Тогда, по аксиомам A3, A4 имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_2' \sim \alpha'\mathbf{P}_1 + (1-\alpha')\mathbf{P}_3 = \\
&(1-\alpha+\alpha')\left[\frac{\alpha}{1-\alpha+\alpha'}\mathbf{P}_1 + \frac{1-\alpha'}{1-\alpha+\alpha'}\mathbf{P}_3\right] + (\alpha'-\alpha)\mathbf{P}_1 \prec \\
&(1-\alpha+\alpha')\left[\frac{\alpha}{1-\alpha+\alpha'}\mathbf{P}_1 + \frac{1-\alpha'}{1-\alpha+\alpha'}\mathbf{P}_3\right] + (\alpha'-\alpha)\mathbf{P}_3 = \\
&\alpha\mathbf{P}_1 + (1-\alpha)\mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2,
\end{aligned}$$

так что $\mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_2'$ – противоречие. □

Теорема 4.3. *Если выполнены аксиомы A1–A4, то существует вещественнозначная функция* $U:\ \Theta \to \mathbf{R}$, *называемая функцией полезности, и такая, что для произвольных* $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ *соотношение* $\mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$ *эквивалентно*

$$\mathbf{E}U(\Xi_1) \geq \mathbf{E}U(\Xi_2), \tag{4.13}$$

где Ξ_1, Ξ_2 *– случайные элементы, задающие распределения* $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$, *соответственно. Более того, функция* U *единственна с точностью до положительного аффинного преобразования.*

Замечание 4.2. *Теорема 4.3 позволяет в качестве средства для сравнения рисков* Ξ *по предпочтительности использовать их ожидаемую полезность*

$$u(\Xi) = \mathbf{E}U(\Xi).$$

Доказательство теоремы 4.3 проведем в предположении конечности множества результатов: $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_N)$. При этом каждое распределение $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ можно представить вектором $\mathbf{P} = (p_1, ..., p_N)$, так что $\mathbf{P}\{\theta_i\} = p_i,\ \ i = 1, ..., N$. Рассмотрим распределения $\mathbf{P}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{P}_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $\mathbf{P}_N = (0, 0, ..., 1)$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\mathbf{P}_N \succeq ... \succeq \mathbf{P}_1. \tag{4.14}$$

Если $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \sim ... \sim \mathbf{P}_N$, то утверждение теоремы тривиально (см. упражнение 4.8), поэтому сразу считаем $\mathbf{P}_N \succ \mathbf{P}_1$. Пусть A_1, A_N – произвольные постоянные с $A_1 < A_N$, зададим $U(\theta_1) = A_1$, $U(\theta_N) = A_N$. Обозначим $\alpha_i,\ \ i = 1, ..., N$ те (по лемме 4.1 однозначно определенные) постоянные, при которых

$$\mathbf{P}_i \sim \alpha_i \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_i)\mathbf{P}_N,\ \ i = 1, ..., N. \tag{4.15}$$

Ясно, что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_N = 0$. Определим

$$U(\theta_i) = A_i = \alpha_i A_1 + (1 - \alpha_i) A_N,\ \ i = 1, ..., N. \tag{4.16}$$

Покажем теперь, что так определенная функция U обладает свойством (4.13). Для произвольного распределения $\mathbf{P} = (p_1, ..., p_N) \in \mathcal{P}$, как нетрудно заметить $\mathbf{P}_N \succeq \mathbf{P} \succeq \mathbf{P}_1$ (см. упражнение 4.9), так что мы можем задать $\alpha(\mathbf{P})$ как (однозначно определенную) постоянную из $[0, 1]$, для которой

$$\mathbf{P} \sim \alpha(\mathbf{P})\mathbf{P}_1 + (1 - \alpha(\mathbf{P}))\mathbf{P}_N. \tag{4.17}$$

Из леммы 4.2 вытекает, что $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mathbf{P}) \geq \alpha(\mathbf{P}')$. Из (4.15) имеем:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbf{P}_i \sim \sum_{i=1}^{N} p_i \left[\alpha_i \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_i)\mathbf{P}_N\right] \sim \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \alpha_i\right) \mathbf{P}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} p_i \alpha_i\right) \mathbf{P}_N. \tag{4.18}$$

Сравнивая (4.17) и (4.18), видим, что

$$\alpha(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{N} p_i \alpha_i.$$

Таким образом, $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{N} p_i'\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{N} p_i\alpha_i. \tag{4.19}$$

Из (4.16) вытекает, что $\alpha_i = (A_N - A_i)/(A_N - A_1)$; подставляя это в (4.19), заключаем, что $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{N} p_i' \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1} \leq \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1},$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^{N} p_i' A_i \geq \sum_{i=1}^{N} p_i A_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} p_i' U(\theta_i) \geq \sum_{i=1}^{N} p_i U(\theta_i),$$

и (4.13) доказано.

Осталось показать, что U определено единственным образом с точностью до положительного аффинного преобразования. Пусть U^* – другая функция полезности, удовлетворяющая (4.13). Обозначим $A_i^* = U^*(\theta_i)$, $i = 1, ..., N$ из (4.13) и (4.16) имеем:

$$U^*(\theta_i) = \alpha_i U^*(\theta_i) + (1 - \alpha_i) U^*(\theta_i),$$

откуда

$$\alpha_i = \frac{A_N^* - A_i^*}{A_N^* - A_1^*} = \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1},$$

так что

$$A_i^* = A_N^* - (A_N^* - A_1^*)\frac{A_N - A_i}{A_N - A_1} = A_N^* - \frac{(A_N^* - A_1^*)A_N}{A_N - A_1} + \frac{A_N^* - A_1^*}{A_N - A_1} A_i.$$

Таким образом, U^* действительно является положительным аффинным преобразованием от U. □

Упражнение 4.6. *Доказать, что в условиях леммы 4.1 условие* $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \sim \mathbf{P}_1$ *влечет выполнение (4.5) при единственном значении* $\alpha = 1$.

Упражнение 4.7. *Доказать, что в условиях леммы 4.1 условие* $\mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$ *влечет выполнение (4.5) при единственном значении* $\alpha = 0$.

Упражнение 4.8. *Доказать, что если в условиях теоремы 4.3* $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \sim ... \sim \mathbf{P}_N$, *то ее утверждение справедливо.*

Упражнение 4.9. *Доказать, что если в условиях теоремы 4.3 справедливо (4.14), то для произвольного распределения* $P \in \mathcal{P}$ *имеет место* $P_N \succeq P \succeq P_1$.

4.4. Решения

Введем теперь в рассмотрение активного индивидуума. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает множество его действий (решений), и поведение системы в целом описывается функцией $X : \mathcal{A} \times \Omega \mapsto \Theta$, измеримой относительно ω при каждом фиксированном $a \in \mathcal{A}$ (т.е. $\{\omega \in \Omega : X(a, \omega) \in F\} \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}_\Theta$), так что если индивидуум принял решение $a \in \mathcal{A}$, а среда оказалась в (случайном) состоянии $\omega \in \Omega$, то результатом действия a будет $\theta = X(a, \omega) \in \Theta$. Так, например, решением a может служить структура инвестиционного портфеля, состоянием среды ω – доходности ценных бумаг, входящих в портфель, а результатом θ – доходность портфеля в целом.

5. Характеризация отношения к риску

5.1. Отношение к риску

Пусть $\mathcal{X}$ – совокупность всех рисков (для определенности – случайных величин); рассмотрим произвольный риск $X \in \mathcal{X}$ с функцией распределения $F(z) = \mathbf{P}\{X \le z\}$ и математическим ожиданием $\mu_X = \mathbf{E}X$; в качестве меры полезности риска будем использовать $u(X)$ – среднее значение некоторой функции полезности U на этом риске:

$$u(X) = \mathbf{E}U(X). \tag{5.1}$$

Исследуем связь формы функции полезности с отношением ее обладателя к риску. Значения X здесь будем трактовать, как доход (чем больше, тем лучше), а функцию полезности U считать возрастающей, так что индивидуум с данной функцией полезности стремится максимизировать значение $u(\cdot)$. В зависимости от соотношения $u(X)$ и μ_X будем различать следующие варианты отношения индивидуума к риску:

- нейтральное отношение: $u(X) = \mu_X,\ X \in \mathcal{X}$;
- склонность к риску: $u(X) \ge \mu_X,\ X \in \mathcal{X}$;
- неприятие риска: $u(X) \le \mu_X,\ X \in \mathcal{X}$.

Будем обозначать классы функций полезности, описывающих нейтральное отношение, склонность к риску и неприятие риска $\mathcal{U}_\mathcal{N}, \mathcal{U}_\mathcal{R}, \mathcal{U}_\mathcal{A}$, соответственно:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\mathcal{N} &= \{U:\ \mathbf{E}U(X) = U(\mathbf{E}X),\ X \in \mathcal{X}\},\\ \mathcal{U}_\mathcal{R} &= \{U:\ \mathbf{E}U(X) \ge U(\mathbf{E}X),\ X \in \mathcal{X}\},\\ \mathcal{U}_\mathcal{A} &= \{U:\ \mathbf{E}U(X) \le U(\mathbf{E}X),\ X \in \mathcal{X}\}.\end{aligned}$$

5.1.1. Нейтралитет

Рассмотрим сначала линейную функцию полезности $U(z) = az + b$. В этом случае

$$u(X) = \mathbf{E}U(X) = \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}X + b = U(\mathbf{E}X) = U(\mu)$$

ввиду линейности математического ожидания. Это означает, что линейная функция полезности описывает нейтральное отношение к риску и любая линейная функция U является элементом $\mathcal{U}_\mathcal{N}$.

5.1.2. Склонность к риску

Пусть теперь функция полезности U выпукла, т.е. удовлетворяет условию

$$U(\alpha y + (1-\alpha)z) \le \alpha U(y) + (1-\alpha)U(z),\ \alpha \in [0,1],$$

и, более общо,

$$U(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i) \le \sum_{i=1}^n \alpha_i U(z_i),\ \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \tag{5.2}$$

Тогда, полагая распределение X для простоты дискретным со значениями z_i и соответствующими вероятностями p_i, $i = 1, ..., n$, получаем

$$\mathbf{E}U(X) = \int U(z)\, dF(z) = \sum_{i=1}^{n} U(z_i)p_i \geq U(\sum_{i=1}^{n} z_i p_i) = U(\mathbf{E}X) = U(\mu), \tag{5.3}$$

т.е. выпуклая функция полезности описывает склонность к риску. Отметим здесь, что вывод формулы (5.3) справедлив для произвольного, а не только дискретного распределения X.

5.1.3. Неприятие риска

Рассмотрим теперь случай вогнутой функции полезности, удовлетворяющей условию

$$U(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(z_i),\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{5.4}$$

Здесь аналогично получаем неравенство

$$\mathbf{E}U(X) = \int U(z)\, dF(z) = \sum_{i=1}^{n} U(z_i)p_i \leq U(\sum_{i=1}^{n} z_i p_i) = U(\mathbf{E}X) = U(\mu), \tag{5.5}$$

означающее, что вогнутые функции полезности описывают неприятие риска (risk aversion). Верно и обратное утверждение: неприятие риска описывается вогнутой функцией полезности; сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 5.1. *Если для произвольного риска X выполняется неравенство*

$$\mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X),\ X \in \mathcal{X}$$

то функция U является вогнутой, т.е. удовлетворяет условию (5.4).

Замечание 5.1. *Поскольку реальные участники рынков с рисками не приемлют риск, т.е. предпочитают детерминированный актив μ_X риску X с $\mathbf{E}X = \mu_X$, всюду в дальнейшем будем рассматривать только строго вогнутые функции полезности. Без существенного ущерба для общности можно считать U достаточно гладкой функцией.*

Таким образом, можно дать следующее определение:

Определение 5.1. *Функцией полезности называется дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами*

$$U(0) = 0,\ U'(x) > 0,\ U''(x) < 0,\ \ x \geq 0. \tag{5.6}$$

Упражнение 5.1. *Доказать теорему 5.1.*

Упражнение 5.2. *Доказать аналогичную теорему:*

$$\mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X),\ X \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow U \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$$

Упражнение 5.3. *Доказать:*

$$\mathbf{E}U(X) = U(\mathbf{E}X),\ X \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow U \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$$

5.2. Количественное выражение неприятия риска

5.2.1. Цена риска

Пусть X – произвольный риск, w – начальный капитал индивидуума. Очевидно, $w + X$ также является риском. Ясно, что если $\mathbf{D}X > 0$, то $\mathbf{E}U(X) < U(\mathbf{E}X)$ и, следовательно, для произвольного $w \geq 0$ имеем

$$\mathbf{E}U(w + X) < U(w + \mathbf{E}X), \tag{5.7}$$

так что уравнение

$$\mathbf{E}U(w + X) = U(w + \mathbf{E}X - \pi) \tag{5.8}$$

имеет единственное решение $\pi > 0$, зависящее от риска X, начального капитала w и функции полезности U.

Определение 5.2. *Решение $\pi = \pi(X) = \pi_{w,U}(X)$ уравнения (5.8) называется* **ценой** *риска X.*

Явное выражение для цены риска имеет вид

$$\pi = w + \mathbf{E}X - U^{-1}[\mathbf{E}U(w + X)], \tag{5.9}$$

откуда, с учетом (5.7) очевидна его положительность.

Представляет интерес зависимость цены риска от формы функции полезности. Введем сначала количественное понятие неприятия риска.

5.2.2. Неприятие риска

Определение 5.3. *Неприятием риска (для заданной строго вогнутой функции полезности U) называется отношение*

$$a(z) = -U''(z)/U'(z).$$

Интересующая нас связь описывается теоремой Пратта [7]. Рассмотрим две функции полезности U_1, U_2 и обозначим a_1, a_2 соответствующие величины неприятия риска, π_1, π_2 – цены риска.

5.2.3. Теорема Пратта

Теорема 5.2. *Для двух произвольных функций полезности U_1, U_2 следующие утверждения эквивалентны:*

а) $a_1(z) > a_2(z),\ z \geq 0$;

б) $\pi_1(X) > \pi_2(X),\ \forall X$;

в) Существует функция T такая, что $T'(z) > 0$, $T''(z) < 0$, $z \geq 0$ и

$$U_1(z) = T(U_2(z)),\ z \geq 0.$$

Доказательство проведем по схеме а) $\Leftrightarrow$ в), б) $\Leftrightarrow$ в), следуя изложению в [6].

1. а) $\Rightarrow$ в). Имеем $a_1(z) > a_2(z),\ z \geq 0$. Зададим функцию T выражением

$$T(v) = U_1(U_2^{-1}(v)) \tag{5.10}$$

и покажем, что она обладает требуемыми свойствами. Подстановкой $v = U_2(z)$ легко проверяется, что $U_1(z) = T(U_2(z))$, поэтому остается проверить вогнутость T. Проделаем проверку прямым вычислением производных и определением их знака. Имеем:

$$T'(v) = U_1'(U_2^{-1}(v))(U_2^{-1})'(v) = \frac{U_1'(U_2^{-1}(v))}{U_2'(U_2^{-1}(v))} > 0$$

и

$$\begin{aligned} T''(v) &= \frac{U_2'\left(U_2^{-1}(v)\right)U_1''\left(U_2^{-1}(v)\right)\left(U_2^{-1}(v)\right)' - U_1'\left(U_2^{-1}(v)\right)U_2''\left(U_2^{-1}(v)\right)\left(U_2^{-1}(v)\right)'}{\left(U_2'\left(U_2^{-1}(v)\right)\right)^2} \\ &= \left\{\frac{U_2'\left(U_2^{-1}(v)\right)U_1''\left(U_2^{-1}(v)\right)}{U_2'\left(U_2^{-1}(v)\right)} - \frac{U_1'\left(U_2^{-1}(v)\right)U_2''\left(U_2^{-1}(v)\right)}{U_2'\left(U_2^{-1}(v)\right)}\right\} / \left\{\left(U_2'\left(U_2^{-1}(v)\right)\right)^2\right\} \\ &= \frac{U_1'(z)}{(U_2'(z))^2}\left\{\frac{U_1''(z)}{U_1'(z)} - \frac{U_2''(z)}{U_2'(z)}\right\} = \frac{U_1'(z)}{(U_2'(z))^2}\left\{a_2(z) - a_1(z)\right\}, \end{aligned}$$

что строго меньше 0 по предположению.

2. в) $\Rightarrow$ а). Пусть $U_1 = T(U_2)$ и $T' > 0,\ T'' < 0$. Отсюда $U_1' = T'U_2'$ и $U_1'' = T'U_2'' + T''(U_2')^2$, поэтому

$$a_1 = -\frac{U_1''}{U_1'} = -\frac{T'U_2'' + T''(U_2'')^2}{T'U_2'} = a_2 - \frac{T''}{T'}U_2',$$

так что, очевидно, $a_1 > a_2$.

3. в) $\Rightarrow$ б). Пусть снова $U_1 = T(U_2)$ и $T' > 0,\ T'' < 0$. Поскольку

$$\pi_i = w + \mathbf{E}X - U_i^{-1}(\mathbf{E}U_i(w + X)),\ i = 1, 2,$$

имеем:

$$\pi_1 - \pi_2 = U_2^{-1}(\mathbf{E}U_2(w + X)) - U_1^{-1}(\mathbf{E}U_1(w + X)) = U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y)),$$

где $Y = U_2(w + X)$. По неравенству Йенсена имеем $\mathbf{E}T(Y) < T(\mathbf{E}Y)$, а так как функция U_1^{-1} является возрастающей, то и $U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y)) < U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y))$. Таким образом,

$$\pi_1 - \pi_2 > U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y)) = U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(U_1(U_2^{-1}(\mathbf{E}Y))) = 0,$$

что и требовалось.

4. б) $\Rightarrow$ в). Зададим снова T формулой (5.10), из $\pi_1 > \pi_2$ получим с учетом $U_2 = T^{-1}(U_1)$, $U_2^{-1} = U_1^{-1}(T)$: $U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) > U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y))$, откуда $U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y)) > U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y))$ и, следовательно, ввиду монотонности U_1^{-1}, $T(\mathbf{E}Y) > \mathbf{E}T(Y)$. Выполнение последнего соотношения для произвольной случайной величины Y эквивалентно вогнутости T.
$\square$

Упражнение 5.4. *Для функции полезности $U(z) = 1 - \exp(\alpha z)$ $(\alpha > 0)$ выписать меру неприятия риска и явное выражение для цены риска (рисковой премии) π. Какие функции данного класса лежат в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$?*

Упражнение 5.5. *То же для функции полезности $U(z) = z^\alpha$ $(\alpha > 0)$. Какие функции данного класса лежат в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$?*

Упражнение 5.6. *В теореме 5.2 утверждение в) можно прочитать так: если $U_1 = T(U_2)$ и преобразование T таково, что $T' > 0, , T'' < 0$, то обладатель функции полезности U_1 менее рискован. Однако, ввиду условия $T' > 0$ функция T взаимно однозначна, следовательно, имеет обратную T^{-1}, так что $U_2 = T^{-1}(U_1)$ и функция U_2 должна бы описывать менее рискованного индивидуума. В чем заключается асимметрия свойств T, не позволяющая сделать такой вывод?*

Упражнение 5.7. *Теорема 5.2 доказана по схеме, требующей четырех логических цепочек доказательств. Попробуйте найти способ доказательства, использующий минимальное возможное (3) количество цепочек (например, а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ а)).*

Упражнение 5.8. *Проверить, является ли цена риска $\pi_{w,U}(X)$ монотонной функцией w при фиксированных X, U. Каков характер монотонности?*

6. Простейший процесс риска

6.1. Описание процесса

Рассмотрим простейшую модель процесса риска в терминах следующей игры ([3], гл. XIV): в игре участвуют два игрока, в каждой партии первый игрок выигрывает единицу с вероятностью $p \in (0,1)$ и проигрывает единицу с вероятностью $q = 1 - p$. Суммарный начальный капитал обоих игроков равен a, начальный капитал первого игрока равен z; здесь a, z - целые числа, $0 \le z \le a$. Таким образом, процесс описывается уравнением

$$X(t) = z + \sum_{i=1}^{t} Z_i, \tag{6.1}$$

где $Z_1, Z_2, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с дискретным распределением,

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p, \\ -1, & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases} \tag{6.2}$$

Игра заканчивается, когда обнуляется капитал одного из игроков (капитал первого игрока становится равным 0 или a), что трактуется, как разорение соответствующего игрока. Ясно, что при $p < 1/2$ игра невыгодна для первого игрока ввиду $\mathbf{E}Z_1 < 0$, при $p > 1/2$ – выгодна ($\mathbf{E}Z_1 > 0$), а при $p = 1/2$ является нейтральной, "справедливой": $\mathbf{E}Z_1 = 0$. Обозначим t_z - момент разорения первого игрока: $t_z = \min\{t : X(t) = 0\}$ (несобственная случайная величина), q_z вероятность разорения первого игрока при начальном капитале z: $q_z = \mathbf{P}\{t_z < \infty\}$. Отметим, что ввиду известной симметрии игры вероятность разорения $\tilde{q}_z$ второго игрока при начальном капитале первого, равном z, может быть вычислена формальной заменой a на $z - a$ и перестановкой p и q в выражении для q_z.

6.2. Уравнение для вероятности разорения

Если начальный капитал первого игрока равен 0 или a, то игра не проводится и соответствующие значения вероятностей разорения равны

$$q_0 = 1, \quad q_a = 0. \tag{6.3}$$

Если же $0 < z < a$, то после первой партии капитал первого игрока принимает значение $z+1$ с вероятностью p или значение $z-1$ с вероятностью q. Поэтому, по формуле полной вероятности,

$$q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}. \tag{6.4}$$

(6.4) представляет собой разностное уравнение второго порядка с характеристическим уравнением

$$\lambda^2 - \frac{1}{p}\lambda + \frac{q}{p} = 0, \tag{6.5}$$

корни которого равны 1 и q/p, соответственно. Обозначим второй корень

$$y = \frac{q}{p}. \tag{6.6}$$

6.3. Вычисление вероятностей разорения

Если $p \neq 1/2$, то $y \neq 1$, корни различны, и общее решение уравнения (6.4) имеет вид

$$q_z = C_1 + C_2 y^z. \tag{6.7}$$

Используя краевые условия (6.3), находим значения постоянных C_1, C_2 и соответствующее частное решение:

$$q_z = \frac{y^z - y^a}{1 - y^a}, \quad p \neq \frac{1}{2}. \tag{6.8}$$

Вычислим вероятность разорения второго игрока упомянутым формальным приемом. Перестановка p и q означает замену y на y^{-1}, так что

$$\tilde{q}_z = \frac{y^{-(a-z)} - y^{-a}}{1 - y^{-a}} = \frac{y^z - 1}{y^a - 1} = \frac{1 - y^z}{1 - y^a}.$$

Нетрудно заметить, что $q_z + \tilde{q}_z = 1$, так что в игре без ограничения времени с вероятностью 1 происходит разорение одного из игроков.

При $p = 1/2$ имеем $y = 1$, так что корни характеристического уравнения вещественны и совпадают. Второе линейно независимое решение уравнения (6.4) имеет в этом случае вид z, общее решение - $q_z = C_1 + C_2 z$, частное решение -

$$q_z = 1 - \frac{z}{a}, \quad p = \frac{1}{2}. \tag{6.9}$$

К тому же результату можно прийти, раскрывая неопределенность в (6.8) при $y \longrightarrow 1$ по правилу Лопиталя. Вероятность разорения второго игрока имеет вид

$$\tilde{q}_z = 1 - \frac{a-z}{a} = \frac{z}{a},$$

так что снова с вероятностью 1 происходит разорение одного из игроков.

Функция q_z в (6.8) и (6.9) монотонно убывает от 1 до 0 при изменении z от 0 до a. Если $p > 1/2$, то $y < 1$, и (6.8) является выпуклой; если же $p < 1/2$, то $y > 1$, и (6.8) является вогнутой.

6.4. Игра с бесконечно богатым противником

Изучим поведение вероятности разорения при $a \to \infty$; для случая $p \leq 1/2$ при произвольном фиксированном z имеем

$$\lim_{a\to\infty} q_z = 1,$$

что означает бесперспективность игры с бесконечно богатым противником в случае невыгодности ($p < 1/2$) или нейтральности ($p = 1/2$) игры. При $p > 1/2$ получаем

$$\lim_{a\to\infty} q_z = y^z = e^{-\alpha z},$$

т.е. зависимость вероятности разорения от начального капитала является экспоненциальной с показателем $\alpha = -\ln y = -\ln(q/p) > 0$. Отметим, что условие положительности рисковой надбавки $\mathbf{E}Z_1 > 0$ эквивалентно $p > 1/2$.

7. Классический процесс риска

Классический процесс риска изучался на протяжении всего 20 века, начиная с работы Лундберга [4]. Уравнением этого процесса описывается динамический портфель страховой компании, банка, других финансовых организаций, являющихся перераспределителями финансовых потоков в окружении рискованной среды. Среди других приложений можно упомянуть описание уровня воды в водохранилище.

7.1. Определение

Рассмотрим определение процесса риска на примере работы страховой компании. Пусть страховые премии поступают равномерным потоком[1] с интенсивностью $\tilde{c}$, а в случайные моменты времени $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ наступают страховые события, наносящие ущерб случайного размера $\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2, \ldots$, соответственно. Тогда размер капитала компании в момент времени t при условии, что начальный капитал (в момент времени $T_0 = 0$) равен x, описывается выражением

$$\widetilde{X}(t) = x + \tilde{c}t - \sum_{i=1}^{N(t)} \widetilde{Z}_i, \tag{7.1}$$

где

$$N(t) = \max\{k:\ T_k \leq t\}- \tag{7.2}$$

количество страховых событий, наступивших в интервале времени $[0, t]$. Поскольку моменты времени T_i, $i = 1, 2, \ldots$ случайны, случайными оказываются и промежутки времени между последовательными страховыми событиями

$$\theta_i = T_{i+1} - T_i \geq 0. \tag{7.3}$$

[1] От требования равномерности потока можно избавиться введением так называемого **операционного времени**; этот прием будет рассмотрен позже.

Случайный процесс вида (7.1) называется **классическим процессом риска**, если случайные величины θ_i, $i = 1, 2, ...$ являются независимыми, одинаково распределенными и имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$F_\theta(v) = \mathbf{P}\{\theta_1 \le v\} = 1 - \exp(-\lambda v),\ v \ge 0, \tag{7.4}$$

случайные величины $\widetilde{Z}_i$, $i = 1, 2, ...$ также являются независимыми и одинаково распределенными и имеют функцию распределения

$$\widetilde{F}_{\widetilde{Z}}(v) = \mathbf{P}\{\tilde{Z}_1 \le v\},\ v \ge 0; \quad \widetilde{F}(0) = 0. \tag{7.5}$$

При этом, как известно [3], количество страховых событий $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt:

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ \ k = 0, 1, ..., \tag{7.6}$$

а накопленный размер страховых убытков

$$\widetilde{Z}_{[0,t]} = \sum_{i=1}^{N(t)} \widetilde{Z}_i$$

на интервале времени $[0, t]$ является случайной величиной с так называемым составным распределением Пуассона, функция распределения которого имеет вид

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Z}_{[0,t]} \le v\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\widetilde{F}_{\widetilde{Z}}^{*k}(v),\ v \ge 0, \tag{7.7}$$

где F^{*k} означает k – кратную свертку функции распределения F с собой, т.е. функцию распределения суммы k независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F.

В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть зависимость значения процесса $\widetilde{X}(t)$ от случайного аргумента $\omega \in \Omega$, будем использовать обозначение $\widetilde{X}(\omega, t)$, в частности, отдельную траекторию процесса при фиксированном ω будем обозначать

$$\widetilde{X}_\omega = \{\widetilde{X}(\omega, t),\ t \ge 0\}. \tag{7.8}$$

Как видим, классический процесс риска вполне определяется значениями четырех параметров $(x, \tilde{c}, \lambda, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}})$, удовлетворяющих условиям

$$x \ge 0,\ \tilde{c} > 0,\ \lambda > 0,\ \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}(0) = 0. \tag{7.9}$$

Произвольный классический процесс риска с фиксированными значениями параметров, удовлетворяющих условиям (7.9), будем обозначать

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}(x, \tilde{c}, \lambda, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}), \tag{7.10}$$

а совокупность всех классических процессов риска с такими параметрами –

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{\widetilde{X}(x, \tilde{c}, \lambda, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}) :\ x \ge 0,\ \tilde{c} > 0,\ \lambda > 0,\ \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}(0) = 0\}. \tag{7.11}$$

7.2. Разорение процесса

Под разорением процесса (7.1) понимается достижение уровня 0, то есть событие

$$\widetilde{\mathcal{R}}(x) = \widetilde{\mathcal{R}}(x, \lambda, \tilde{c}, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}) = \{\omega \in \Omega : \ \exists t \geq 0, \ \widetilde{X}(\omega, t) \leq 0\}, \tag{7.12}$$

при этом **моментом разорения** называется случайная величина

$$\tilde{\tau}(x) = \tilde{\tau}(x, \lambda, \tilde{c}, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}) = \min\{t : \ \widetilde{X}(t) \leq 0\}. \tag{7.13}$$

Эта случайная величина зависит от параметров процесса (7.1) и может оказаться несобственной, с положительной вероятностью принимая значение ∞; такая ситуация соответствует траекториям, которые не разоряются на всей временной полуоси $[0, \infty)$.

Вероятностью разорения процесса (7.1) называется величина

$$\mathbf{P}\{\tilde{\tau}(x) < \infty\} = \mathbf{P}(\widetilde{\mathcal{R}}(x)),$$

т.е. вероятностная мера множества тех траекторий, которые разоряются за конечное время. Эта величина также является, очевидно, функцией параметров процесса, что будем подчеркивать обозначением

$$\widetilde{R}(x) = \widetilde{R}(x, \lambda, \tilde{c}, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}) = \mathbf{P}\{\tilde{\tau}(x) < \infty\}. \tag{7.14}$$

В некоторых случаях более удобной характеристикой процесса риска оказывается вероятность выживания процесса

$$\widetilde{S}(x) = \widetilde{S}(x, \lambda, \tilde{c}, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}) = 1 - \widetilde{R}(s). \tag{7.15}$$

7.3. Зависимость вероятности разорения процесса от параметров

Отметим следующие свойства монотонности вероятности разорения, как функции параметров процесса.

- $\widetilde{R}$ является невозрастающей функцией x;
- $\widetilde{R}$ является невозрастающей функцией $\tilde{c}$;
- $\widetilde{R}$ является неубывающей функцией λ;
- $\widetilde{R}$ является невозрастающей функцией $\widetilde{F}_{\widetilde{Z}}$, если порядок на множестве функций распределения задан отношением $F_1 \preceq F_2 \iff F_1(x) \leq F_2(x) \ \forall x$.

Проверка перечисленных свойств производится путем сравнения событий разорения (7.12) при соответствующих значениях параметров.

8. Агрегированный процесс риска

В данном разделе рассматривается процесс риска в дискретном времени, который оказывается тесно связанным с классическим процессом риска посредством операции агрегирования.

8.1. Операция агрегирования

Рассмотрим классический процесс риска (7.1), зафиксируем число $\delta > 0$ и разобьем положительную полуось $\mathbf{R}^+$ на интервалы $\Delta_i = [(i-1)\delta, i\delta)$ длины δ. Далее, сгруппируем все премиальные поступления и страховые убытки, произошедшие в этих интервалах времени. Тогда размер премиальных поступлений за любой период Δ_i равен, очевидно,

$$c = \tilde{c}\delta. \tag{8.1}$$

Размер Z_i накопленных страховых убытков на интервале Δ_i вычисляется следующим образом. Для каждого i размер Z_i является случайной величиной, причем для $i = 1$ ее распределение уже вычислено в (7.7), следует лишь подставить значение длины интервала времени $t = \delta$:

$$F_Z(v) = \mathbf{P}\{Z_1 \le v\} = \mathbf{P}\{\widetilde{Z}_{[0,\delta)} \le v\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^k}{k!} \widetilde{F}_{\widetilde{Z}}^{*k}(v), \; v \ge 0. \tag{8.2}$$

Далее, ввиду стационарности потока страховых событий и независимости и одинаковой распределенности убытков классического процесса риска $\{\widetilde{Z}_k, \; k = 1, 2, ...\}$ размеры убытков $\{Z_i, \; i = 1, 2, ...\}$ на интервалах Δ_i также являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения (8.2).

Таким образом, значение классического процесса риска (7.1) в момент времени $n\delta$ при целых n равно

$$X(n) = x + cn - \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{8.3}$$

Процесс (8.3) называется **агрегированным процессом риска** и является аппроксимирующей моделью для классического процесса риска при $\delta \to 0$.

Ясно, что процесс (8.3) зависит от трех параметров (x, c, F_Z) вычисляемых по параметрам исходного классического процесса $(x, \tilde{c}, \lambda, \widetilde{F}_{\widetilde{Z}})$ и значению параметра агрегирования δ по формулам (8.1), (8.2). Будем обозначать

$$X = X(x, c, F_Z) \tag{8.4}$$

агрегированный процесс риска, определяемый параметрами x, c, F_Z, а $\mathcal{X}$ – совокупность всех аргегированных процессов риска при всевозможных допустимых значениях параметров:

$$\mathcal{X} = \{X(x, c, F_Z); \; x \ge 0, \; c > 0, \; F_Z(0) = 0\}. \tag{8.5}$$

8.2. Разорение

Обозначим

$$\mathcal{R}(x, c, F_Z) = \mathcal{R}(x) = \{\omega : \; \exists n > 0, \; X_\omega(n) \le 0\} \tag{8.6}$$

событие разорения агрегированного процесса,

$$\tau(x) = \tau(x, c, F_Z) = \min\{n : \; X(n) \le 0\} - \tag{8.7}$$

момент разорения и

$$R(x) = R(x, c, F_Z) = \mathbf{P}\{\tau < \infty\}, \tag{8.8}$$

$$S(x) = S(x, c, F_Z) = \mathbf{P}\{\tau = \infty\} = 1 - R(x) \quad - \tag{8.9}$$

вероятность разорения и выживания процесса, соответственно. Рассматривая отношение включения событий разорения (выживания) при различных значениях параметров процесса риска, нетрудно заключить, что вероятность выживания является неубывающей функцией начального капитала x, интенсивности премиального потока c и функции распределения убытков F_Z, если на множестве функций распределения рассмотреть естественный частичный порядок

$$F_1 \preceq F_2 \Longleftrightarrow F_1(v) \le F_2(v),\ v \ge 0.$$

8.3. Случайное блуждание

Агрегированный процесс риска заменой переменных $Y_i = c - Z_i,\ i = 1, 2, ...$ можно представить в виде случайного блуждания [3]

$$X(n) = x + \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{8.10}$$

с независимыми одинаково распределенными "шагами" Y_i, $i = 1, 2, ...$ Отсюда, используя теорему п. **2**.XII.2 из [3], выводим

Теорема 8.1. *Агрегированный процесс риска (8.3) может принадлежать к одному и только к одному из трех типов в зависимости от соотношения между его параметрами:*
1. $c = \mathbf{E}Z_1$: осциллирующий тип; процессы этого типа с вероятностью единица достигают любого наперед заданного уровня; точнее:

$$\mathbf{P}\{\inf_{n \in \mathbf{N}} X(n) = -\infty\} = 1 \tag{8.11}$$

и

$$\mathbf{P}\{\sup_{n \in \mathbf{N}} X(n) = \infty\} = 1. \tag{8.12}$$

2. $c < \mathbf{E}Z_1$: разоряющийся тип; для процессов этого типа выполняется (8.11) и с вероятностью 1 существует конечный максимум

$$\mathbf{M}(x) = \max_{n \in \mathbf{N}} X(n). \tag{8.13}$$

3. $c > \mathbf{E}Z_1$: выживающий тип; для процессов этого типа выполняется (8.12) и с вероятностью 1 существует конечный минимум

$$\mathbf{m}(x) = \min_{n \in \mathbf{N}} X(n). \tag{8.14}$$

Из приведенной теоремы ясно, что процессы первого типа ввиду (8.11) разоряются с вероятностью 1. Поскольку для процессов второго типа (8.11) также имеет место, они тоже являются разоряющимися с вероятностью 1. Для процессов третьего типа вероятность выживания есть

$$S(x) = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(x) > 0\} \tag{8.15}$$

и может быть, вообще говоря, положительной. Более того, поскольку для произвольных $x, y \geq 0$ имеет место $\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(y) + (x - y)$, для G_x – функции распределения $\mathbf{m}(x)$ – получаем

$$G_x(v) = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(x) \leq v\} = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(y) - y \leq v - x\} = G_y(v + y - x) \to 0$$

при $x \to \infty$ и фиксированных v, y, поэтому справедлива

Теорема 8.2. *Пусть выполнено*

$$c > \mathbf{E}Z_1. \tag{8.16}$$

Тогда

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = 1. \tag{8.17}$$

Замечание 8.1. *Условие (8.16) обычно называется условием "положительности рисковой надбавки"* $c - \mathbf{E}Z_1$.

8.4. Уравнение для вероятности разорения

Используя формулу полной вероятности, нетрудно вывести интегральное уравнение для вероятности выживания процесса (8.3), как функции начального капитала. Зафиксируем параметры c, F_Z, и определим событие "выживание при условии, что начальный капитал равен x":

$$\mathcal{S}(x) = \{\omega \in \Omega : \; X(n) > 0, \; n = 0, 1, ...; \; X(0) = x\}, \tag{8.18}$$

а для интервала I – аналогичное событие "выживание при условии, что начальный капитал принадлежал интервалу I":

$$\mathcal{S}(I) = \{\omega \in \Omega : \; X(n) > 0, \; n = 0, 1, ...; \; X(0) \in I\}. \tag{8.19}$$

Ясно, что $\mathcal{S}(x) \subseteq \mathcal{S}_1 = \{Z_1 < x + c\}$. Для произвольного целого $m > 0$ разобьем отрезок $[0, x + c)$ на m равных частей I_k длины $\gamma = (x + c)/m$: $I_k = [(k-1)\gamma, k\gamma), \; k = 1, ..., m$. Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\mathcal{S}(x)\} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{S}(x + c - I_k)\mathbf{P}\{Z_1 \in I_k\} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{S}(x + c - I_k)\left(F_Z(k\gamma) - F_Z(k-1)\gamma)\right).$$

Правая часть последнего выражения представляет собой, очевидно, интегральную сумму для интеграла

$$\int_0^{x+c} S(x + c - v)\, dF_Z(v),$$

и сходится к нему при $m \to \infty$, а левая часть не зависит от m и равна $S(x)$, так что

$$S(x) = \int_0^{x+c} S(x + c - v)\, dF_Z(v). \tag{8.20}$$

Это интегральное уравнение позволяет изучать многие свойства агрегированного процесса риска, выраженные в терминах вероятностей выживания или разорения.

8.5. Пример: простейший процесс риска

Положим $c = 1$, $p \in (0, 1)$ и

$$F_Z(v) = \begin{cases} 0, & v < 0, \\ p, & 0 \le v < 2, \\ 1, & v \ge 2. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что при этом агрегированный процесс риска (8.3) превращается в простейший процесс риска (6.1), а уравнение для вероятности выживания приобретает вид

$$S(x) = S(x+1) + (1-p)S(x-1),$$

что согласуется с (6.4).

9. Время жизни процессов риска

В параграфах 6–8 получены уравнения для вероятности разорения. Представляет интерес также и момент разорения. В настоящем параграфе изучим среднее время жизни процессов риска.

9.1. Простейший процесс риска

Рассмотрим простейший процесс риска (6.1):

$$X_n = z + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \tag{9.1}$$

где Z_i, $i = 1, 2, ...$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью p и значение -1 с вероятностью $q = 1 - p$, и обозначим τ_z момент окончания игры (разорения одного из игроков) при условии, что первый игрок имел начальный капитал z, а второй: $a - z$:

$$\tau_z = \min\{n \ge 0 : \ X_n = 0 \text{ или } X_n = a\}. \tag{9.2}$$

Как мы помним, на бесконечном горизонте времени разорение одного из игроков наступает с вероятностью 1, так что τ_z является собственной случайной величиной. Обозначим $m(z) = \mathbf{E}\tau_z$ ее среднее значение, и поставим задачу вычисления этой величины. Из формулы полной вероятности для математических ожиданий нетрудно получить уравнение для $m(z)$ вида $m(z) = 1 + pm(z+1) + qm(z-1)$, откуда

$$m(z+1) - \frac{1}{p}m(z) + \frac{q}{p}m(z-1) = -\frac{1}{p}. \tag{9.3}$$

Характеристическое уравнение для (9.3) имеет корни $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = q/p = y$. Рассмотрим сначала случай некратных корней $y \ne 1$ ($p \ne 1/2$). Тогда частное решение неоднородного уравнения (9.3) имеет вид $m_0(z) = \frac{z}{p(y-1)}$, так что его общее решение запишется в форме

$$m(z) = C_1 + C_2 y^z + \frac{z}{p(y-1)}. \tag{9.4}$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 можно определить из краевых условий $m(0) = m(a) = 0$, которые дают

$$-C_2 = C_1 = \frac{a}{p(1-y)(1-y^a)},$$

так что решение уравнения (9.3) есть

$$m(z) = \frac{1}{p(1-y)}\left(a\frac{1-y^z}{1-y^a} - z\right). \tag{9.5}$$

В случае кратных корней $y = 1$ ($p = 1/2$) общее решение уравнения (9.3) имеет вид $C_1 + C_2 z + m_0(z)$, где частное решение $m_0(z)$ легко находится в классе квадратичных функций и равно $m_0(z) = -z^2$, так что искомое решение после определения постоянных из краевых условий записывается в форме

$$m(z) = z(a-z). \tag{9.6}$$

Интересно отметить, что решение (9.6) может быть получено предельным переходом из (9.5) с помощью двукратного применения правила Лопиталя.

Рассмотрим, наконец, игру с бесконечно богатым противником ($a \to \infty$). При $y < 1$ из (9.5), видно, что среднее время жизни неограниченно увеличивается. Этот эффект связан с тем, что при $y < 1$ имеем $p > 1/2$, и даже в игре с бесконечно богатым противником первый игрок разоряется с вероятностью, меньшей 1, то есть с положительной вероятностью время жизни процесса бесконечно.

При $y = 1$ из (9.6) также вытекает $m(z) \to \infty$ при $a \to \infty$. Отсюда вытекает, что хотя в этом случае ($p = 1/2$) первый игрок и разоряется с вероятностью 1 в игре с бесконечно богатым противником, однако среднее время ожидания разорения бесконечно велико.

При $y > 1$ ($p < 1/2$) из (9.5) следует, что ожидаемое время до разорения в игре с бесконечно богатым противником есть

$$m(z) = \frac{z}{p(y-1)},$$

и линейно возрастает вместе с z.

9.2. Игра в кошки – мышки

Рассмотрим еще одну задачу на вычисление ожидаемой длительности процесса. Пусть в двух комнатах обитают кот и мышь, и перемещаются из комнаты в комнату независимо друг от друга в соответствии с матрицами переходных вероятностей

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

где элемент c_{ij} матрицы C есть вероятность перемещения кота из комнаты i в комнату j; $i, j = 1, 2$, а элементы матрицы M описывают аналогичные вероятности для мыши. Если в какой–либо из моментов времени кот и мышь оказываются в одной комнате, то кот съедает мышь. Определить среднее время жизни мыши при различных начальных расположениях.

Опишем задачу в виде марковской цепи с четырьмя состояниями $E = (i, j)$; $i, j = 1, 2$: кот находится в комнате i, а мышь – в комнате j, и обозначим t_{ij} среднее время оставшейся жизни мыши в состоянии (i, j). Обозначим E_n состояние цепи в момент времени n, тогда, очевидно, $t_{11} = t_{22} = 0$, а для t_{12}, t_{21} по формуле полной вероятности запишем уравнения

$$t_{12} = 1 + t_{12}\mathbf{P}\{E_1 = (1,2)|E_0 = (1,2)\} + t_{21}\mathbf{P}\{E_1 = (2,1)|E_0 = (1,2)\},$$

$$t_{21} = 1 + t_{12}\mathbf{P}\{E_1 = (1,2)|E_0 = (2,1)\} + t_{21}\mathbf{P}\{E_1 = (2,1)|E_0 = (2,1)\}.$$

Вычисляя переходные вероятности с учетом условия независимости, получаем систему уравнений

$$0.94t_{12} - 0.56t_{21} = 1,$$

$$-0.48t_{12} + 0.92t_{21} = 1,$$

которая имеет решение $t_{12} = 2.483$, $t_{21} = 2.383$.

Список литературы

[1] *Методика расчета тарифных ставок по рисковым видам страхования.* Финансовая газета, 1993, № 40, с. 2-3.

[2] фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука.

[3] В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* **1,2**, М.: Мир, 1984.

[4] Lundberg F.I. (1903) *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen*, II. Aterförsäkring av Kollektivrisker.–Uppsala: Almqvist & Wiksell.

[5] Richard D. MacMinn (1989) *The expected Utility Theorem.* Lecture note, 11p., http://kiwiclub.bus.utexas.edu/uncertainty/expected_utility/eu.pdf

[6] Richard D. MacMinn (1996) *Notes on Pratt's "Risk Aversion in the Small and in the Large".* Lecture note, 6p., http:// kiwiclub.bus.utexas.edu/ uncertainty/ expected_utility/ pratt.pdf

[7] Pratt J.W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32**, pp. 122–136.