УДК 517

ВЫДАЮЩИЕСЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПАППА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО

Ткаченко А.Е., студент, Казакова Е.И., проф., д.т.н.
Донецкий национальный технический университет

Папп Александрийский был одним из самых талантливых ученых Греции эллинистиче ского периода. Им был доказан ряд важнейших теорем применяемых сегодня в геометрии и в интегральном исчислении. Кроме того им были обработаны и дополнены теоремы, доказанные другими учеными. Ниже мы рассмотрим некоторые из них. Одной из известнейших теорем, доказанных Паппом является **теорема Паппа –** важнейшая теорема планиметрии. Она впервые была доказана Паппом Александрийским около 300 года нашей эры. Но лишь шестнадцать столетий спустя была признана ее роль в создании проективной геометрии. И тогда Папп был назван последним великим геометром древности. Эта выдающаяся теорема носящая его имя, может быть сформулирована различными способами, один из которых дается ниже.

Если A,C,E – три точки на одной прямой, а B,D,F – на другой, и если три прямые AB,CD,EF пересекают прямые DE,FA,BC, соответственно, то три их точки пересечения L, M, N коллинеарны.

«Проективная» природа этой теоремы видна из того, что она использует только принадлежность точек прямым или прохождение прямых через точки, без измерения длин или углов и даже без какой-либо ссылки на порядок: в каждом множестве из трех коллинеарных точек безразлично, какая из них лежит между двумя другими (рис.1-2).

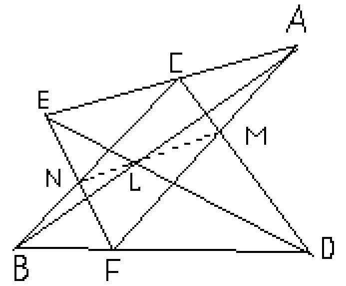

Рис. 1

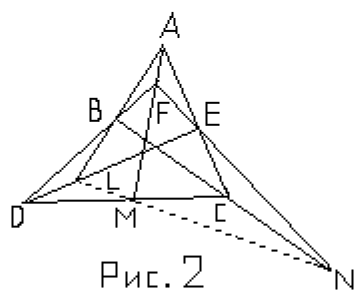

Рис. 2

Мы можем циклически переставить буквы A,B,C,D,E, F при условии, что соответственно переименуем точки L, M, N. Чтобы избежать рассмотрения бесконечно удаленных точек, которое завело бы нас слишком далеко в направлении проективной геометрии, предположим, что три прямые AB,CD,EF образуют треугольник UVW, (рис.3). Применяя **теорему Менелая**, которая гласит, что *если точки X,Y,Z, лежащие на сторонах BC,CA,AB соответственно продолженных треугольника ABC коллинеарны, то*

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$$

и обратно, если это уравнение выполняется для точек X,Y,Z, лежащих на трех сторонах треугольника, то эти три точки коллинеарны,

к пяти тройкам точек $\{L,D,E\},\{A,M,F\},\{B,C,N\},\{A,C,E\},\{B,D,F\}$, лежащих на сторонах этого треугольника, получаем:

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,\ \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FA}=-1,$$
$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}=-1,\ \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,$$
$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{CU}\cdot\frac{UF}{FV}=-1.$$

Разделив произведение первых трех соотношений на произведение последних двух и произведя массу сокращений, мы получаем

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UN}{NV}=-1,$$

т.е. точки L, M, N коллинеарны, что и требовалось доказать.

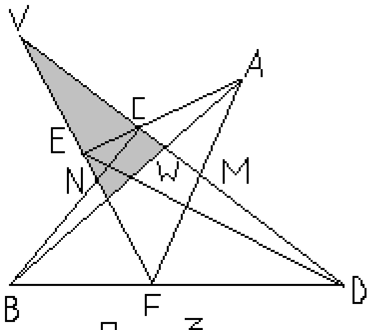

Рис. 3

Подобным образом данная теорема формулируется и доказывается в наше время. Сам Папп формулировал ее несколько иначе и доказывал на основании собственных лемм. Поэтому мы рассмотрим сейчас весь путь, пройденный Паппом, к доказательству данной теоремы.

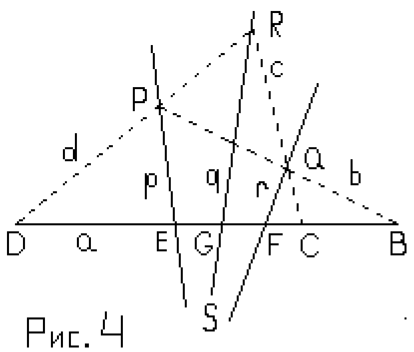

Рис. 4

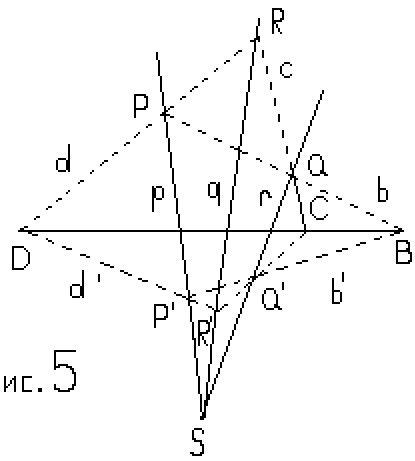

Рис. 5

Во введении к седьмой книге своего «Собрания» Папп говорит, что некоторое число поризмов Евклида может быть объединено в одно предложение, которое гласит (рис.4)

Если из шести точек пересечения четырех прямых (a,b,c,d *на нашем чертеже) три, лежащие на одной прямой* (a) *или две – в случае параллельности– будут неподвижны, а две из трех остальных* (P и Q) *лежат на неподвижных прямых* (p и q), *то шестая точка* (R) *будет лежать на неподвижной прямой* (r).

Папп мог бы еще добавить, что прямые p, q, r проходят через одну точку S, или параллельны. На нашем чертеже переменные прямые обозначены пунктиром, а неподвижные – сплошной чертой.

Если мы представим себе два различных положения пунктирных прямых (b, c, d и b', c', d'), получиться чертеж известной **теоремы Дезарга**:

Если два треугольника PQR и P'Q'R' (рис.5*.) расположены так, что точки пересечения соответствующих сторон* (b *и* b', c *и* c', d *и* d') *лежат на одной прямой* (a), *то прямые , соединяющие соответственно вершины* (P *и* P', Q *и* Q', R *и* R'), *проходят через одну точку* S и *обратно.*

Папп же добавляет обобщение более чем для четырех прямых . Однако остается вопрос: каким образом Евклид доказал терему для четырех прямых?

Для доказательства этого Папп излагает свои теоремы.

Теорема о полном четырехугольнике

Чертеж для теоремы о четырех прямых можно также рассматривать как чертеж полного четырехугольника PQRS, в котором шесть сторон его (PQ, RS и т.д.) пересекаются некоторой неподвижной прямой a. Если теперь можно доказать, что из шести точек пересечения B, C, D, E, F, G шестая G однозначно определяется пятью остальными, то отсюда непосредственно следует, что если P пробегает неподвижную прямую ES, а Q – прямую PS, то R должна описать неподвижную прямую GS, чем и доказывается теорема для четырех прямых.

Предложение , что G однозначно определяется через B, C, D, E, и F, называют **второй теоремой Дезарга, или теоремой о полном четырехугольнике**. Папп же по-своему формулирует это предложение, выражая соотношение между шестью точками B, C, D, E, F, G в виде пропорции, причем в леммах I и II он рассматривает случай, когда одна из сторон четырехугольника параллельна прямой a, а в лемме IV – случай, когда все шесть точек B, C, D, E, F, G остаются на конечных расстояниях.

Действительно, лемма I гласит :

Пусть будет построена фигура $\mathrm{AB\Gamma\Delta EZH\Theta}$ *и пусть* $\mathrm{A\Delta : \Delta\Gamma = AZ : ZH}$, (1)

а Θ *соединена с К; я утверждаю, что* ΘK *параллельна* $A\Gamma$.

На рисунке 6 легко узнать полный четырехугольник $\mathrm{BE\Theta K}$, шесть сторон которого пересечены одной прямой. Если между пятью из шести точек сечения имеется соотношение (1), то эта шестая точка будет “бесконечно удаленной, как говорят в наше время.

Лемма II совершенно аналогична, но в задании предполагается, что Θ К параллельна АΓ.

Лемма IV гласит (рис.7):

Пусть будет построена фигура $\mathrm{AB\Gamma\Delta EZH\Theta K\Lambda}$ *и пусть*

$$(AZ \cdot \Delta\mathrm{E}) : (\mathrm{A\Delta \cdot EZ}) = (\mathrm{AZ \cdot B\Gamma}) : (\mathrm{AB \cdot \Gamma Z}). \qquad (2)$$

Я утверждаю, что точки Θ, H, Z лежат на одной прямой.

Мы опять узнаем полный четырехугольник HΘKΛ, в котором шесть сторон пересечены одной прямой. Равенство (2) выражает в современной терминологии, что двойное отношение (AZ : EΛ) равно двойному отношению (ZA : ВГ). В настоящее время мы говорим, что три пары точек A, Z; B,E и Г,Δ находятся в инволюции.

Лемма V относится к частному случаю, когда две пары из шести точек сливаются вместе на прямой АГ (рис.8). Тогда вместо (2) мы получаем пропорцию

$$AB:B\Gamma = A\Delta:\Delta\Gamma.$$

В таком случае мы говорим о двух гармонических парах точек A, Г и B, Δ.

Свои леммы Папп доказывает, проводя параллельные прямые и искусно применяя пропорции. В своих доказательствах он мог бы также использовать и то, что двойное отношение четырех точек остается неизменным при проектировании этих четырех точек на какую-нибудь другую прямую, как он и сделал, формулируя это предложение в качестве леммы III . Правда, он рассматривает только тот частный случай, когда одна из четырех точек представляет точку пересечения двух прямых.

Лемма III. (рис.9*). Через три прямые AB, АГ, AΔ проведены прямые ΘE и ΘΔ. Я утверждаю, что*

$$(\Theta B \cdot \Gamma\Delta):(\Theta\Delta \cdot B\Gamma) = (\Theta E \cdot HZ):(\Theta H \cdot ZE).$$

Лемма X представляет обращение леммы III, а Лемма XI касается особого случая, когда одна из двух трансверсалей параллельна одной из четырех прямых. При помощи этих лемм Папп и доказывает знаменитую теорему Паппа (рис.9), формулируя ее следующим образом (рис.10) :

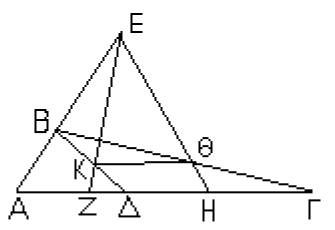

Рис.6

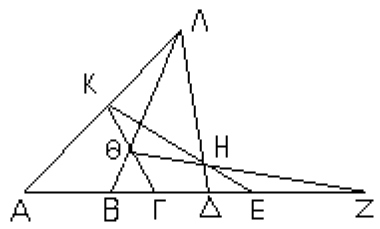

Рис. 7

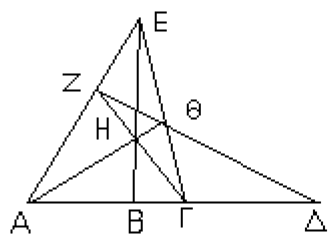

Рис. 8

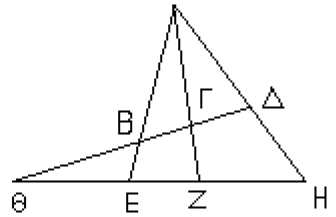

Рис. 9

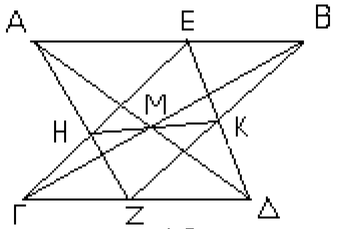

Рис. 10

Если на прямых AB *и* ГΔ *взяты точки* E *и* Z *и проведены линии* AΔ, AZ, ВГ, BZ, EΔ *и* EГ, *то точки пересечения* H, K, M *лежат на одной прямой*.

Папп формулирует и доказывает это предложение сначала для случая, когда АВ и ΓΔ параллельны (лемма XII), а затем для случая, когда они пересекаются (лемма XIII).

Необходимо отметить, что в настоящее время эту теорему рассматривают как частный случай **теоремы Паскаля**:

Точки пересечения противолежащих сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой.

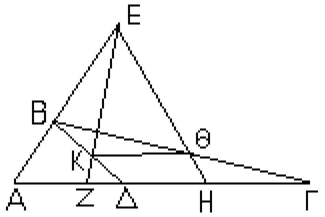

Рис.6

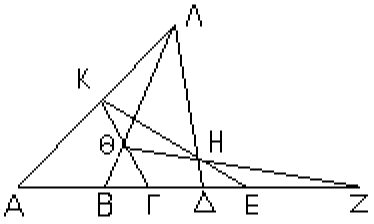

Рис. 7

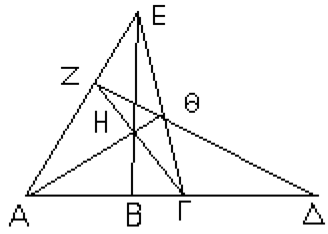

Рис. 8

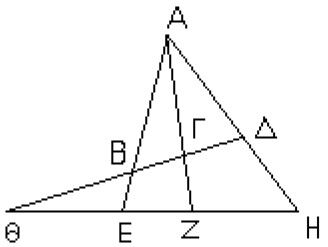

Рис. 9

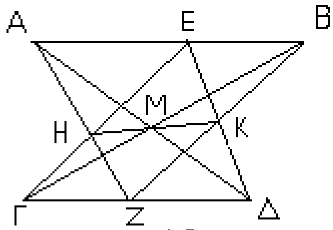

Рис. 10

Задача о параллелограмме, построенном на одной из сторон треугольника

Параллелограмм, построенный на одной из сторон произвольного треугольника в середине его так, что две вершины параллелограмма лежат вне треугольника , равновеликий сумме параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их параллельны соответствующим сторонам треугольника и проходят через вершины первого параллелограмма. (Рис.11.)

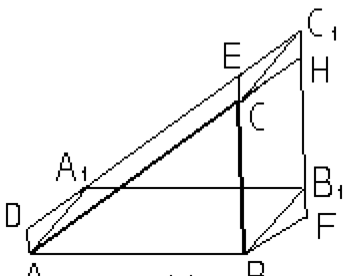

Рис. 11

Действительно,

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1,$$

$$SACC_1A_1 = SACED,\ SBB_1C_1C = SBFHC,$$

$$S\text{фиг.}ABB_1C_1A_1A - S\Delta A_1B_1C_1 = SABB_1C_1,$$

Sфиг.$ABB_1C_1A_1 - S\Delta ABC = SACC_1A_1 + SBB_1C_1C = SBD_1HC + SACED$, что и требовалось доказать.

Необходимо отметить так же достижения Паппа в изучении свойств конических сечений.

Если коническое сечение рассматривается как образ при полярном преобразовании окружности с центром в точке А (относительно окружности ω), то поляра точки А называется директрисой (соответствующей фокусу О) этого конического сечения. Расстояние от фокуса до произвольной точки называется фокальным расстоянием этой точки.

И одно из самых замечательных свойств конических сечений было также доказано Паппом, хотя не исключено, что оно могло быть известно уже Евклиду шестью столетиями раньше. Оно заключается в следующем:

Для любой точки Р *на коническом сечении с эксцентриситетом* ε, *фокусом* О *и директрисой а ее фокальное расстояние* /OP/ *равно произведению числа* ε *на расстояние от точки* Р *до директрисы а.*

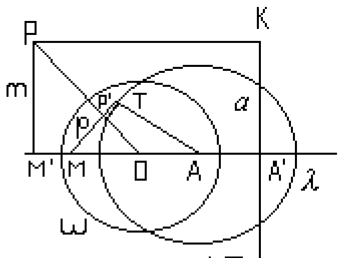

Рис.12

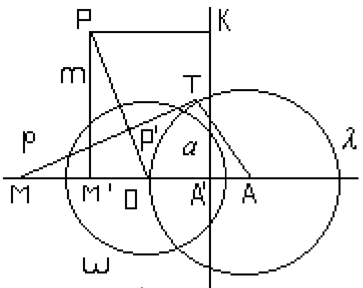

Рис. 13

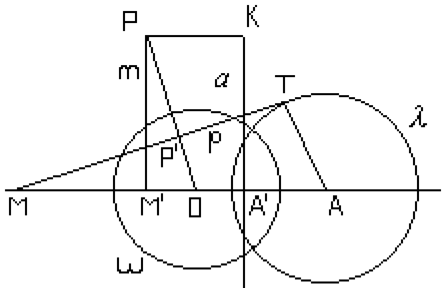

Рис.14

Точка Р (рис.12-14) является полюсом (относительно окружности ω) прямой р, которая касается окружности λ в точке Т, пересекает прямую ОА в точке А и пересекает прямую ОР в точке Р' (образе точки Р при инверсии относительно окружности ω). Директриса и поляра точки М пересекают прямую ОА в точках А' (образе точки А при инверсии) и М' (образе точки М при инверсии);кроме того, точка К является основанием перпендикуляра, опущенного из точки Р на прямую a. Мы хотим доказать, что $|OP|=\varepsilon|PK|$. Для того чтобы учесть все возможности, мы будем считать все расстояния, рассматриваемые на прямой ОА, направленными расстояниями (т. е. обращаться с ними как с направленными отрезками) (т.е. ОМ – ОА = АМ, даже если точка О лежит между точками М и А). Введя k и r – радиусы окружностей ω и λ, мы получим:

$$\frac{|PK|}{|OP|} = \frac{|OA' - OM'|}{|OP|} = \frac{k}{|OP|}\left|\frac{OA'}{k} - \frac{OM'}{k}\right| = \frac{|OP'|}{k}\left|\frac{k}{OA} - \frac{k}{OM}\right| = \frac{|OP'|}{|OM|}\cdot\left|\frac{OM}{OA} - 1\right| =$$

$$= \frac{|AT|}{|AM|}\frac{|AM|}{|OA|} = \frac{r}{|OA|} = \frac{1}{\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

Обратно,

Для любой точки О, *любой прямой* λ, *не проходящей через точку* О, *и любого положительного числа* ε *множество точек , расстояние каждой из которых от точки* О *равно расстоянию до прямой* а, *умноженному на* ε, *является коническим сечением.*

Это легче всего увидеть, приняв в качестве окружности ω с центром в точке О такую окружность, которая касается прямой λ; при этом точка А становится точкой касания. Тогда окружностью a является окружность с центром в точке А радиуса ОА/ε.

И в заключение, рассмотрев несколько из наиболее известных теорем этого действительно талантливого ученого древности, мы можем утверждать, что Папп Александрийский оставил после себя богатое наследство современным математикам.

Список источников:

1. Ван-дер-Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука: математика древнего Египта, Вавилона и Греции: - М.: Госиздат, 1959. – 459 с.
2. Коксетер Г.С., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией // Под ред. Савченко А.П.:- М.: Наука, 1978.- 224 с.
3. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі:-К: Радянська школа, 1981.- с.61-62.