Автореферат выпускной работы магистра

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Яковченко С.А.
Донецкий национальный технический университет, Украина

Государственное регулирование экономического роста в настоящее время имеет важное значение. Поэтому научно-обоснованное предвидение его динамики для будущих периодов времени является актуальной задачей.

Анализ известных моделей показал, что предпочтительными являются те, которые исследуют динамику экономического роста, учитывая фактическую информацию. Данному условию удовлетворяет модель [1]

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t) + \sigma S(t)\xi(t), \tag{1}$$

где $S(t)$ – случайно распределенная переменная, характеризующая экономический рост;

$\mu,\ \sigma$ - коэффициенты, которые могут рассматриваться как константы или как функции времени t;

$\xi(t)$ - переменная «белого шума» с нулевым средним и единичной интенсивностью [2, с.32].

Известны решения модели (1), когда коэффициенты μ (скорость роста математического ожидания переменной $S(t)$), и σ (дисперсия логарифма $S(t)$) являются константами. Такие решения дают хорошие результаты, когда исследуются зависимости близкие к линейным. Известны также решения модели (1), когда коэффициент μ является функцией времени. Но в этом случае не учитывается взаимное влияние переменных $S(t)$ и $\xi(t)$. Анализ фактических данных, например, по ВНП, который является одним из основных показателей экономического роста, свидетельствует о том, что его зависимость от времени не может рассматриваться как линейная [3, с.31]. Поэтому целью настоящей работы является получение решения для модели (1), которое учитывает, во-первых, взаимное влияние переменных $S(t)$ и $\xi(t)$ и, во-вторых, зависимость коэффициента μ от времени, то есть $\mu = \mu(t)$.

Выполнив тождественное преобразование исходного дифференциальн-ого уравнения, получаем

$$\frac{1}{S(t)} \cdot \frac{dS(t)}{dt} = \mu(t) + \sigma\xi(t). \tag{2}$$

В левой части уравнения (2) отношение $\frac{1}{S(t)}$ можно внести под знак дифференциала

$$\frac{d\, ln\, S(t)}{dt} = \mu(t) + \sigma\xi(t). \tag{3}$$

Дальнейшие преобразования будут связаны с двумя заменами, которые позволят дифференциальное стохастическое уравнение (3) преобразовать к виду, для которого возможно получить аналитическое решение. Запишем первую замену

$$ln\, S(t) = V(t), \tag{4}$$

где *V(t)* –новая переменная.

С учетом (4) получаем следующую зависимость

$$\frac{dV(t)}{dt} = \mu(t) + \sigma\xi(t). \tag{5}$$

Вторая замена определяет производную $\frac{dV(t)}{dt}$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \mu(t) + \frac{dU(t)}{dt}. \tag{6}$$

С учетом этой замены уравнение (5) упрощается

$$\frac{dU(t)}{dt} = \sigma\xi(t). \tag{7}$$

Новая переменная $U(t)$ имеет гауссовское распределение в любой момент времени t с математическим ожиданием M_U и дисперсией K_U. Величины M_U и K_U полностью определяют плотность распределения вероятностей $p(U(t),t)$ [2, с.32] для $U(t)$

$$p(U(t),t) = \frac{exp[-\frac{1}{2}(U - M_U)^2 K_U^{-1}]}{(\sqrt{2\pi})(det\, K_U)^{1/2}}. \tag{8}$$

Известны дифференциальные уравнения, которые в случае решения (7), определяют математическое ожидание M_U и дисперсию K_U [2, с.34]

$$\frac{dM_U}{dt} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{dK_U}{dt} = \sigma^2 . \tag{10}$$

Решая уравнения (9) и (10) получаем

$$M_U = M_U(t=0) = U(0) = V(0) = \ln S(0), \tag{11}$$

$$K_U = \int_0^t \sigma^2 d\tau = \sigma^2 t, \text{ (так как } K_U(0) = 0\text{)}. \tag{12}$$

С учетом полученных формул для M_U и K_U зависимость (8) для расчета плотности распределения вероятностей $p(U(t),t)$ упрощается

$$p(U(t),t) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}(U - \ln S(0))^2 \frac{1}{\sigma^2 t}]}{(\sqrt{2\pi})(\sqrt{\sigma^2 t})} . \tag{13}$$

На следующем этапе решения задачи необходимо записать замену, обратную (6)

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{dV(t)}{dt} - \mu(t) \tag{14}$$

и для определения переменной $U(t)$ выполнить интегрирование уравнения (14)

$$U(t) = V(t) - \int_0^t \mu(t) d\tau . \tag{15}$$

Дальнейшие выкладки требуют задания коэффициента μ *(t)*. Общий подход здесь такой. Необходимо исследовать различные типы функций (полиномиальные, степенные, логарифмические и другие) и сопоставив результаты моделирования на их основе, сделать окончательный выбор. Из практики нам известно, что для рассматриваемого класса задач наилучшие результаты дает следующая логарифмическая функция

$$\mu(t) = p\,ln\,t + q\,, \tag{16}$$

где p, q – константы, которые будут определены ниже.

В этом случае интеграл, входящий в (15) является табличным и равен

$$\int_0^t \mu(t)d\tau = \int_0^t (\,p\,ln\,\tau + q\,)d\tau = t[\,p(ln\,t - 1) + q\,]\,. \tag{17}$$

Таким образом с учетом выражений (15) и (17), получаем

$$U(t) = V(t) - t[\,p(ln\,t - 1) + q\,]\;. \tag{18}$$

Теперь уточним плотность распределения вероятностей (13) с учетом полученной формулы (18)

$$p(V(t),t) = \frac{exp\{-\tfrac{1}{2}[V(t) - t(\,p(ln\,t - 1) + q\,) - ln\,S(0)]^2\,\frac{1}{\sigma^2 t}\}}{(\sqrt{2\pi})(\sqrt{\sigma^2 t})}\,. \tag{19}$$

Если вспомнить, что в формуле плотности в квадратных скобках стоит разность между переменной и ее математическим ожиданием (см. (8)), то можем записать

$$M_V = t[\,p(ln\,t - 1) + q + ln\,S(0)]\,. \tag{20}$$

Константы p и q определяются на основе фактической информации по переменным, характеризующим экономический рост на прошедшем периоде времени, следующим образом. Указанные фактические данные по существу являются математическими ожиданиями M_S, которые на практике уже реализовались. На их основе с использованием формулы (4) рассчитываются математические ожидания переменной $V(t)$ также на прошедшем периоде времени

$$M_V = ln\,M_S\,. \tag{21}$$

Имея массив математических ожиданий M_V в различные моменты времени на прошедшем периоде времени необходимо выполнить его аппроксимацию функций (20), определив при этом константы p и q по методу наименьших квадратов.

Аналогично находится константа σ. Для этого, используя массив M_V на прошедшем периоде времени, рассчитывают соответствующий ему массив величин K_V, равных $K_{V(i)} = \sum_{i=1}^{m} (M_{Vi} - M_{Vcp})^2 / m$. Его аппроксимация функцией $K_V = \sigma^2 t$ (что следует из формулы (19)) позволяет определить константу σ также по методу наименьших квадратов.

На заключительном этапе получим формулу для расчета математического ожидания M_S - переменной, характеризующей экономический рост. Вспоминая (4), запишем

$$S(t) = exp\,V(t), \text{ тогда } M_S = M(exp\,V). \tag{22}$$

Разложим функцию $exp\,V(t)$ в степенной ряд [4, с.729]

$$exp\,V(t) = 1 + V(t) + \frac{V^2(t)}{2!} + \ldots + \frac{V^n(t)}{n!} + \ldots, \tag{23}$$

Математическое ожидание M_S получаем после подстановки ряда (23) в формулу (22)

$$M_S = 1 + M_V + \frac{M(V^2)}{2!} + \ldots + \frac{M(V^n)}{n!} + \ldots\,. \tag{24}$$

С учетом зависимости (20) окончательно имеем

$$M_S = 1 + t[\,p(ln\,t - 1) + q + ln\,S_0\,] + \frac{M(V^2)}{2!} + \ldots + \frac{M(V^n)}{n!} + \ldots\,. \tag{25}$$

где $M(V^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x,t)dx$, $n = 1,2\ldots$,[4, с.544].

Настоящие интегралы на практике эффективно вычисляются по методу Гаусса. Плотность p рассчитывается по формуле (19). Причем, величина n – количество членов ряда (25), определяется требуемой и наперед заданной точностью расчета M_S.

В том случае, когда $t > t_k$ (t_k- последний момент времени для которого уже известны фактические данные по переменной, определяющей экономический рост), полученная формула (25) моделирует динамику экономического роста для будущих периодов времени.

Известна также формула, которая на основе полученной зависимости для плотности p (19) позволяет рассчитать вероятность события P, состоящего в том, что в будущем, например, в момент времени t_k случайно распределенная переменная $S(t_k)$, определяющая экономический рост, примет значение в заданном интервале $a \le S(t_k) \le b$, [4, с.544]

$$P(a \le S \le b) = \int_{\ln a}^{\ln b} p(x, t_k)dx. \tag{26}$$

Таким образом на основе исходной модели (1) и имеющейся фактической информации получена формула (25), которая, во-первых, учитывает характер зависимости, имеющейся в данной информации между переменными $S(t)$ и $\xi(t)$ и, во-вторых, определяя коэффициент μ как функцию времени *t,* повышает точность моделирования динамики экономического роста для будущих периодов времени.

Литература

1. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра – М, 1994.-192с.
2. Кузьмин В.П., Ярошевский В.А. Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных отклонениях. – М.: Наука, Физматлит, 1995. – 304 с.
3. Статистичний щорічник України за 2002 рік. – Київ.:Консультант,2003.
4. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831с.