К.т.н. Дмитриева О.А., Яковченко С.А.

Донецкий национальный технический университет, Украина

Моделирование динамики экономического роста для будущих периодов времени

Государственное регулирование экономического роста в настоящее время является одной из стратегических задач развития Украины. Поэтому научно-обоснованное предвидение его динамики для будущих периодов времени является актуальной задачей. Представляет практический интерес и зависимость экономического роста от целого ряда факторов, например, объема инвестиций, уровня безработицы, инфляции. Для выявления имеющихся закономерностей на первом этапе необходимо исследовать их динамику.

Анализ известных моделей [1, 2] показал, что предпочтительными являются те, которые исследуют динамику экономического роста, учитывая фактическую информацию. Одна из моделей, удовлетворяющая указанным условиям, описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением, решение которого дает оценку вероятности превышения предельных отклонений [1]

$$\frac{dS(t)}{dt} = m(t)S(t) + s(t)S(t)x(t), \quad S(t = t_0) = S_0, \tag{1}$$

где $S(t)$ – случайная функция, характеризующая экономический рост;

$m(t)$, $s(t)$ - коэффициенты, которые могут рассматриваться как константы или как функции времени t;

$x(t)$ - переменная «белого шума» с нулевым средним и единичной интенсивностью [2].

Выполним тождественные преобразования исходного уравнения (1) и введем две следующие замены

$$ln\, S(t) = V(t), \quad \frac{dV(t)}{dt} = m(t) + \frac{dU(t)}{dt}, \tag{2}$$

где *V(t)*\, $U(t)$ –новые переменные.

В результате получаем следующее дифференциальное стохастическое уравнение, в котором переменная $U(t)$ имеет гауссовское распределение в любой момент времени *t*

$$\frac{dU(t)}{dt} = s\,x(t). \tag{3}$$

Решение уравнения (3) включает следующие зависимости для математического ожидания M_U, дисперсии K_U и плотности распределения вероятностей p [2]:

$$\frac{dM_U}{dt} = 0, \qquad \frac{dK_U}{dt} = s^{\,2}. \tag{4}$$

$$\mathrm{p}(U(t),t) = \frac{exp\{-{}^{1}\!/_{2}\,[U - M_U]^2 K_U^{\,-1}\}}{\sqrt{2p}\sqrt{K_U}}. \tag{5}$$

Для вывода формулы расчета плотности распределения вероятностей p*(V(t),t)* предварительно необходимо, во-первых, решить дифференциальные уравнения (4) и, во-вторых, на основе замены (2) получить выражение для переменной $U(t)$. При этом требуется задание вида коэффициента *m(t).*

Известно, что для рассматриваемого класса задач наилучшие результаты дает следующая логарифмическая функция

$$m(t) = p\,ln\,t + q, \tag{6}$$

где *p, q* – константы.

В итоге на основе (5) была получена следующая зависимость для плотности распределения вероятностей p*(V(t),t)*

$$\mathrm{p}(V(t),t) = \frac{exp\{-\frac{1}{2}[V(t) - t(p(lnt-1)+q) + pt_0(lnt_0-1) + qt_0 - lnS_0]^2 \frac{1}{s^2(t-t_0)}\}}{\sqrt{2p}\sqrt{s^2(t-t_0)}} \tag{7}$$

В формуле плотности (7) в числителе в квадратных скобках стоит разность между переменной и ее математическим ожиданием. Поэтому можем записать следующую формулу для M_V

$$M_V = t[\,p(\ln t - 1) + q\,] - pt_0(\ln t_0 - 1) - qt_0 + \ln S_0\,]\,. \qquad (8)$$

Константы p и q определяются на основе фактической информации по переменным, характеризующим экономический рост на прошедшем периоде времени, следующим образом. Используя массив значений уже реализованных на прошлом периоде математических ожиданий переменной $S(t)$, на основе первой замены (2), рассчитывается соответствующий массив значений математических ожиданий M_V. Далее необходимо выполнить его аппроксимацию функцией (8), определив при этом константы p и q по методу наименьших квадратов. Аналогично определяется и константа s, на основе решения уравнения (4).

На заключительном этапе получим формулу для расчета математического ожидания M_S - переменной, характеризующей экономический рост. Вспоминая (2) (первую замену), запишем

$$S(t) = exp\,V(t), \text{ тогда } M_S = M(exp\,V\,). \qquad (9)$$

Разложим функцию $exp\,V(t)$ в степенной ряд. С учетом формулы (8) для математического ожидания M_V можем записать

$$M_S = 1 + t[\,p(\ln t - 1) + q\,] - pt_0(\ln t_0 - 1) - qt_0 + \ln S_0 +$$

$$+ \frac{M(V^2)}{2!} + \frac{M(V^3)}{3!} + \ldots + \frac{M(V^n)}{n!} + \ldots \qquad (10)$$

где $M(V^n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V^n \mathrm{p}(V,t)dV$, $n = 1,2\ldots$, [4].

Настоящие интегралы на практике эффективно вычисляются по квадратурной формуле Гаусса [3]. При расчетах величина n определяется требуемой и наперед заданной точностью расчета M_S.

В том случае, когда $t > t_k$, где t_k - последний момент времени для которого уже известны фактические данные по исследуемой переменной, полученная формула (10) моделирует ее динамику для будущих периодов времени.

Известна также формула, которая на основе полученной зависимости для плотности p (7) позволяет рассчитать вероятность события P, состоящего в том, что в будущем, например, в момент времени t случайно распределенная переменная $V(t)$ примет значение в интервале, границы которого (a и b) отличаются от математического ожидания M_V на заданную величину

$$P(a \le M_V \le b) = \int_a^b \mathrm{p}(V,t)dV. \tag{11}$$

Пределы, пересчитанные для M_S, позволяют судить о вероятности ее попадания в полученный интервал.

Таким образом на основе исходной модели (1) и имеющейся фактической информации получена формула (10), которая, во-первых, учитывает характер зависимости, имеющейся в данной информации между переменными $S(t)$ и $x(t)$ и, во-вторых, определяя коэффициент m как функцию времени t, обеспечивает возможность моделирования динамики экономического роста с учетом того, что скорость роста математического ожидания M_S может быть величиной переменной. Формула (11) дает оценку превышения предельных отклонений для прогнозируемой величины.

Литература

1. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра – М, 1994.-192с.
2. Кузьмин В.П., Ярошевский В.А. Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных отклонениях. – М.: Наука, Физматлит, 1995. – 304 с.
3. Б.П.Демидович, И.А.Марон. Основы вычислительной математики. – М.:Наука, 1970. – с.664.
4. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831с.