Частотно-временной анализ с использованием волнового преобразования

Волновое преобразование (Wavelet transformation) нашло свое применение в таких разных областях знания как телекоммуникация и биология. Благодаря его свойствам для анализа нестационарных сигналов (чьи статистические свойства изменяются со временем), wavelet преобразование стали мощной альтернативой для Фурье метода во многих медицинских приложениях, где такие сигналы преобладают. Дополнительно к распознаванию и обнаружению ключевых диагностических характеристик, оно обеспечивает мощные средства для сжатия данных (электрокардиограмм, медицинских изображений и т.д.) с небольшой потерей ценной информации.
Wavelet преобразование может обеспечить как очень хорошее временное разрешение на высоких частотах, так и удовлетворительное частотное разрешение на низких частотах. Интересно, что это возможно даже при отсутствии информации о характере временных и частотных параметрах сигнала, благодаря избыточности присущей непрерывному wavelet преобразованию сигнала. Фактически, в реальных приложениях желательно устранить значительную часть этой избыточности, чтобы уменьшить требования к памяти и ускорить численные вычисления. Этого достигают обычно дискретизацией частотных и временных параметров, используя бинарную схему (основание 2) в частотно-временной плоскости.
Wavelet-преобразование определяется как :

$$W_x(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(u) \cdot g^*\left(\frac{u-t}{a}\right) du \qquad (1)$$

,

где g(u,t) - wavelet-функция, . - означает комплексное сопряжение, x(u) - сигнал.
Наиболее широко используется wavelet-функция Морлета (Morlet's wavelet), определяемая как:

$$g(t) = e^{i \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (2)$$

.

Следовательно, можно записать:

$$g\left(\frac{t}{a}\right) = e^{i \cdot \frac{\omega_0}{a} \cdot t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2 \cdot a^2}} \quad (3)$$

.

Преобразование Фурье равенства (3) является симметричной функцией относительно частоты w_0/2a*a. Поэтому wavelet-преобразование можно рассматривать как частотно-временное с частотой анализа равной SUB>t/2a*a. Среди множества известных на данный момент волновых функций wavelet-функция Морлета обладает следующими отличительными свойствами:

1. определяется точной аналитической функцией;
2. проста для вычиления;
3. ее применение ведет к квазинепрерывному представлению;

Любая функция, используемая в качестве wavelet-функции, должна удовлетворять следующему необходимому условию:

$$\int g(t)dt \approx 0. \quad (4)$$

В случае wavelet-функции Морлета это условие выполнимо для широкого диапазона значений w_0. Другой подход основан на фиксации w_0 и модификации g(t) введением дополнительного параметра σ , что приводит к модифицированной wavelet-функции:

$$g(\sigma,t) = e^{j \cdot w_0 \cdot t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad . \qquad (5)$$

Таким образом выбирая малые значения σ1 - высокая концентрация энергия во временной области - получают низкое разрешение в частотной области и, наоборот, большие значения σ2 приводят к более высокому разрешению в частотной области (принцип неопределенности). Принимая во внимание это утверждение, для пары значений σ (σ 1, σ 2) определено модифицированное wavelet-преобразование:

$$W_{\sigma,x}(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(u) \cdot g^*\left(\frac{u-t}{a}\right) du = \left| g\left(\frac{t}{a}\right) = e^{i\omega_0 \frac{t}{a}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2 a^2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(u) \cdot e^{-\frac{(u-t)^2}{2\sigma^2 a^2}} \cdot e^{-i(u-t)\frac{\omega_0}{a}} du = \left| \begin{matrix} v = u - t \\ u = v + t \\ du = dv \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(v+t) \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2 a^2}} \cdot e^{-iv\frac{\omega_0}{a}} dv = |u = v| = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot F\left(x(u+t) \cdot e^{-\frac{u^2}{2(\sigma a)^2}} \right)\left(\frac{\omega_0}{a}\right) \quad (7)$$

где F означает Фурье оператор.
Для данного значения a (связанного с частотой) параметр u определяет ширину Гаусового окна. Малые значения σ улучшают временное разрешение в ущерб спектральному и наоборот. Интуитивно понятно, что произведение (7) принимает большие значения только тогда, когда оба множителя значительны. Таким образом, получается высокое временное разрешением $W_{\sigma 1,x}$, и высокое частотное разрешение $W_{\sigma 2,x}$.
Чтобы получить центральную частоту волновой функции равную 1 Гц при a=1, мы должны принять w_0=2f rad/s. В классическом волновом преобразовании параметр a изменяется согласно закону: $a=2^{-n}$. Если n целое, закон называется двоичным. Из равенства (3) следует, что центральная частота также подчиняется двоичному закону, что несовместимо с классическим частотно-временным распределением. Следовательно, мы можем переписать определение этого параметра как:

$$a = \frac{1}{n \cdot \Delta f},$$

где Δ f - интервал дискретизации по частоте, а n - положительное целое.

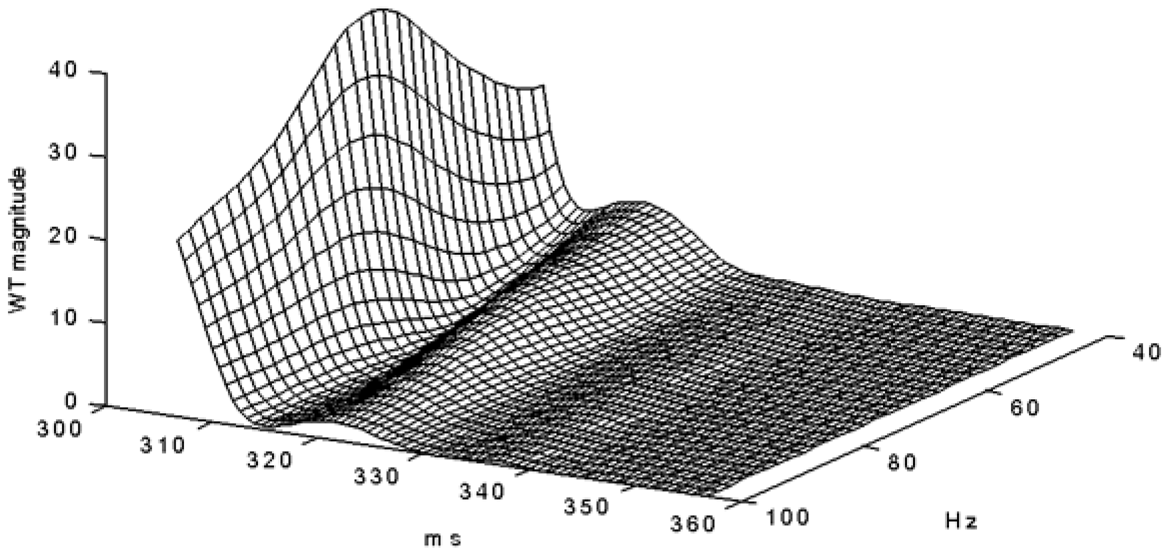

Рис.1 Трехмерное представление векторной суммы с использованием модифицированного волнового преобразования (терминальная часть QRS комплекса).

На Рис.1 показан результат трехмерного представление векторной суммы с использованием модифицированного волнового преобразования. Обрабатывалась та же усредненная запись отведений Франка пациента с ППЖ, что использована при временного анализа). Программа написана на языке MathLab 4.2. Параметры модифицированного wavelet преобразования подбирались экспериментально: a1=1, a2=3.33.

Имеется ряд работ в которых успешно применено волновое преобразование для анализа электрокардиограмм. Применение wavelet анализа дополнительно к временному анализу поздних потенциалов предсердий повысило общую предсказывающую ценность с 52% до 72% при инфаркте миокарда нижней локализации и с 64% до 76% при инфаркте миокарда передней локализации.

Применение волнового преобразования для анализа кардиосигнала представляется черезвычайно перспективным с учетом уже имеющихся данных о негомогенной деполяризации. Об этом свидетельствует наличие нарушений не только конечной части QRS комплекса, проявляющееся наличием ППЖ, но и более сложных нарушений хода волны возбуждения в начале и середине QRS комплекса. Этот метод имеет преимущества для выделения нестационарных характеристик изучаемого сигнала, что вероятно необходимо для исследования частотно-волновых составляющих кардиоцикла и отдельных его участков, в том числе без усреднения сигнала.