Теория и практика вейвлет-преобразования. ВОРОБЬЕВ В.И., ГРИБУНИН В.Г. ВУС, 1999. С.1-204.

О преимуществе преобразования при помощи блоков фильтров перед преобразованием Фурье

Итак, преобразование Фурье и ему аналогичные применяются для декорреляции отсчетов сигнала. Блоки фильтров предоставляют альтернативный путь достижения этой цели и обладают некоторыми преимуществами.
Для понимания того, каким образом блоки фильтров декоррелируют сигнал, рассмотрим следующий пример. Пусть имеется гауссовский источник с памятью и спектральной плотностью мощности. Необходимо произвести квантование данного источника. Функция скорость-искажение для него имеет вид

$$D(\theta)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\omega}\min(\theta,\Phi_X(\omega))d\omega\ , \tag{1.28}$$

$$R(\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\omega}\max\left(0,\log\frac{\Phi_X(\omega)}{\theta}\right)d\omega\ . \tag{1.29}$$

Каждое значение θ соответствует точке на кривой скорость-искажение. Цель любой схемы квантования состоит в приближении к этой кривой, которая является оптимальной. Поэтому из равенств (1.28) и (1.29) можно вывести простой метод: на частотах, на которых мощность сигнала меньше θ, нет смысла тратить биты на квантование. Таким образом, мощность сигнала на этих частотах будет равна мощности шума. Для кодирования сигнала на тех частотах, на которых его мощность больше θ, отводится ровно столько бит, чтобы мощность шума была точно равна θ. Тогда мощность сигнала всегда будет больше мощности шума. Данная процедура известна в мире под названием "inverse waterfilling", что переводится примерно как "заполнение водой наоборот". Суть метода показана на рис. 1.
Разумеется, непрактично рассматривать каждую частоту в отдельности: их бесконечно много. Необходимо принимать решение не по отдельным частотам, а по полосам частот. Это возможно в том случае, когда внутри них спектральная плотность мощности постоянна. Для разделения сигнала на полосы и применяются блоки фильтров.
Например, двухканальный блок фильтров делит спектр сигнала на две субполосы – высокочастотную и низкочастотную. Гауссовский процесс может быть декоррелирован путем разбиения его спектра на примерно плоские сегменты и умножения сигнала в каждом сегменте на некоторый коэффициент. Далее сигналы складываются. Результирующий сигнал будет иметь плоскую плотность распределения вероятности (то есть является белым шумом).

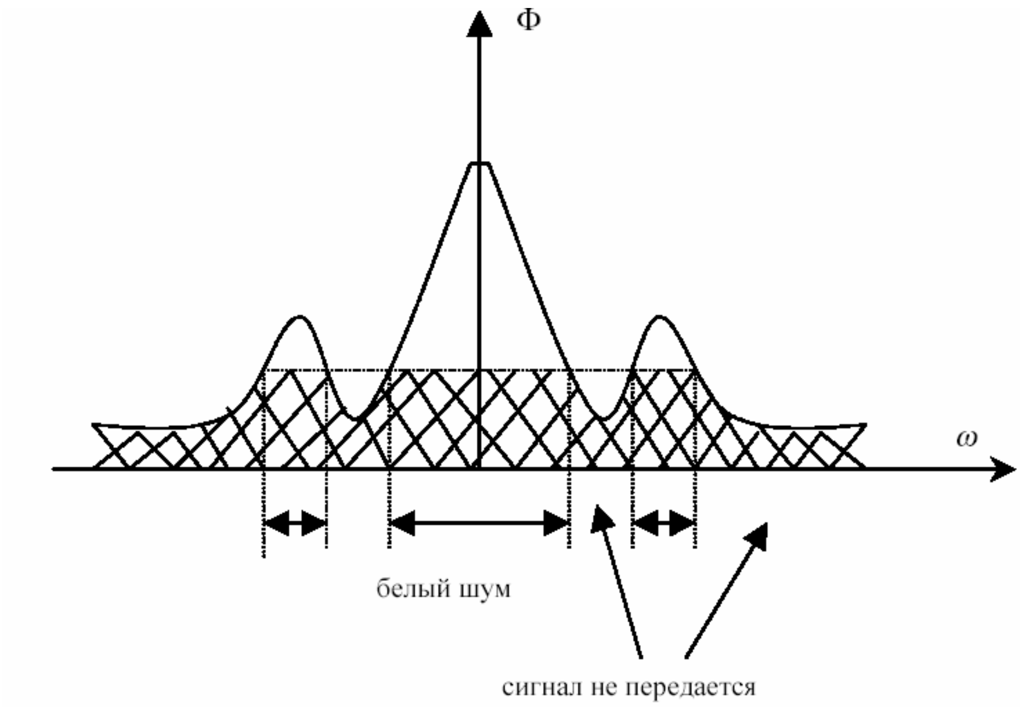

Рис. 1. Процедура «заполнения водой наоборот» для гауссовского источника без памяти

Таким образом, и преобразование Фурье, и блоки фильтров «работают» в частотной области. Почему же мы говорим о преимуществе блоков фильтров? Ответ заключается в пространственно-частотных свойствах этих методов. Базисы Фурье локализованы по частоте, но не в пространстве. Для кодирования сигнала, описываемого гауссовским процессом, это не является недостатком. Однако на изображениях присутствуют контуры, которые не могут быть описаны этой моделью и требуют локализованных в пространстве базисов. Поэтому блоки фильтров, являясь локальными и в пространстве, обеспечивают в среднем лучшую декорреляцию.

Возникает следующий вопрос: каким образом произвести разбиение спектра сигнала для заданного числа блоков фильтров? Известно, что корреляция между пикселами изображения убывает экспоненциально с увеличением расстояния. То есть

$$R_X(\delta) = e^{-\omega_0|\delta|}, \qquad (1.30)$$

где δ - переменная расстояния. Соответствующая спектральная плотность мощности

$$\Phi_X(\omega) = \frac{2\omega_0}{\omega_0^2 + (2\pi\omega)^2}. \qquad (1.31)$$

Эта функция показана на рис.1.7. Из рисунка видно, что для получения плоских сегментов спектра необходимо точно делить спектр на низких частотах и грубо – на высоких. Субполосы, получаемые в результате выполнения такой процедуры, будут описываться белым шумом с дисперсией, пропорциональной спектру мощности в данном диапазоне. Как мы увидим в следующих главах, такое разделение спектра осуществляется посредством вейвлет-преобразования.

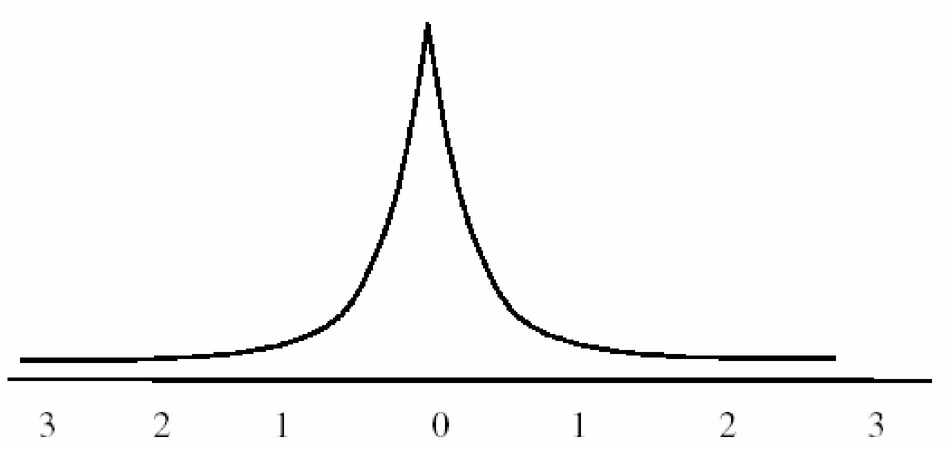

Рис. 2. Спектральная плотность мощности, соответствующая экспоненциальной корреляции

Итак, мы обсудили свойства различных линейных преобразований, которые могут использоваться для сжатия изображений. В частности отмечено, что базисные функции анализа и синтеза преобразования должны быть локализованы как в пространственной, так и в частотной областях. Кроме того, желательно, чтобы преобразование было ортогональным.

Несколько приведенных примеров иллюстрируют эти свойства. Базисные функции синтеза Габора хорошо локализованы, но неортогональность преобразования ведет к плохой локализации функций анализа. Блочное ДКП является преобразованием с равными размерами субполос с плохой частотной локализацией. Перекрывающееся ортогональное преобразование улучшает частотную локализацию ДКП. Пирамида Лапласа служит примером октавополосного преобразования. Она является неортогональным, неориентированным и избыточным разложением сигнала и плохо пригодна для кодирования неподвижных изображений. Однако для кодирования видео пирамида Лапласа может найти применение.

Субполосное преобразование, основанное на банках КЗФ, хорошо локализовано, ортогонально и может применяться рекурсивно для получения октавополосного разбиения. Это преобразование является, по сути, быстрым алгоритмом вычисления вейвлет-преобразования и тесно связано с теорией вейвлет-функций и концепцией кратномасштабного анализа, которые будут рассмотрены в следующей главе.