# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

## 1.1 Основные элементы теории оптимизации

Термином «оптимизация» в литературе обозначают процесс или последовательность операций, позволяющих получить уточненное решение. Хотя конечной целью оптимизации является отыскание наилучшего или «оптимального» решения, обычно приходится довольствоваться улучшением известных решений, а не доведением их до совершенства. Поэтому под оптимизацией понимают скорее стремление к совершенству, которое, возможно, и не будет достигнуто.

Задача принятия решения состоит в выборе среди множества возможных решений (их называют также вариантами, планами и т. п.) такого решения, которое являлось бы в определенном смысле лучшим или, как говорят, оптимальным.

Удобно считать, что выбор решения производит некоторое *лицо, принимающее решение (*ЛПР*),* которое преследует вполне определенные цели. В зависимости от конкретной ситуации в роли лица, принимающего решение, может выступать как отдельный человек (инженер, научный сотрудник и т. п.), так и целый коллектив (группа специалистов, занятая решением одной задачи).

Каждое возможное решение характеризуется определенной степенью достижения цели. В соответствии с этим у лица, принимающего решение, имеется свое представление о достоинствах и недостатках решений, на основании которого одно решение, предпочитается другому. Оптимальное решение - это решение, которое с точки зрения лица, принимающего решение, предпочтительнее других возможных решений. Таким образом, понятие оптимального решения связано с предпочтениями лица, принимающего решение. Эти предпочтения на практике выражаются в различной форме, и их математическая формализация может составить сложную задачу, поскольку лицо, принимающее решение, как правило, не может ясно и четко сформулировать их.

Цель теории принятия решений и состоит в разработке методов, которые помогли бы лицу, принимающему решение, наиболее полно и точно выразить свои предпочтения в рамках соответствующей математической модели и в конечном счете обоснованно выбрать действительно оптимальное решение.

Прежде чем приступить к обсуждению вопросов оптимизации, введем ряд определений.

*Проектные параметры (искомые переменные).* Этим термином обозначают независимые переменные параметры, которые полностью и однозначно определяют решаемую задачу проектирования**.**

Проектные параметры - неизвестные величины, значения которых вычисляются в процессе оптимизации. В качестве проектных параметров могут служить любые основные или производные величины, служащие для количественного описания системы. Так, это могут быть неизвестные значения длины, массы, времени, температуры. Число проектных параметров характеризует степень сложности данной задачи проектирования. Обычно число проектных параметров обозначают через $n$, а сами проектные параметры через $x$ с соответствующими индексами. Таким образом $n$ проектных параметров данной задачи будем обозначать через

$$x_1, x_2, x_3,..., x_n.$$

*Целевая функция (критерий качества).* Это выражение, значение которого ЛПР (лицо, принимающее решение) стремится сделать максимальным или минимальным. Целевая функция позволяет количественно сравнить два альтернативных решения. С математической точки зрения целевая функция описывает некоторую ($n$+1)-мерную поверхность. Ее значение определяется проектными параметрами

$$L = L(x_1, x_2,..., x_n).$$

Примерами целевой функции, часто встречающимися в инженерной практике, являются стоимость, вес, прочность, габариты, КПД. Если имеется только один проектный параметр, то целевую функцию можно представить кривой на плоскости. Если проектных параметров два, то целевая функция будет изображаться поверхностью в пространстве трех измерений. При трех и более проектных параметрах поверхности, задаваемые целевой функцией, называются *гиперповерхностями* и не поддаются изображению обычными средствами. Топологические свойства поверхности целевой функции играют большую роль в процессе оптимизации, так как от них зависит выбор наиболее эффективного алгоритма.

Целевая функция в ряде случаев может принимать самые неожиданные формы. Например, ее не всегда удается выразить в замкнутой математической форме, в других случаях она может представлять собой кусочно-гладкую функцию. Для задания целевой функции иногда может потребоваться таблица технических данных (например таблица состояния водяного пара) или может понадобиться провести эксперимент. В ряде случаев проектные параметры принимают только целые значения. Примером может служить число зубьев в зубчатой передаче или число болтов во фланце. Иногда проектные параметры имеют только два значения - да или нет. Качественные параметры, такие как удовлетворение, которое испытывает приобретший изделие покупатель, надежность, эстетичность, тоже возможно учитывать в процессе оптимизации, хотя их сложно охарактеризовать количественно. Однако в каком бы виде не была представлена целевая функция, она должна быть однозначной функцией проектных параметров.

В ряде задач оптимизации требуется введение более одной целевой функции. Иногда одна из них может оказаться несовместимой с другой. Примером служит проектирование самолетов, когда одновременно требуется обеспечить максимальную прочность, минимальный вес и минимальную стоимость. В таких случаях конструктор должен ввести систему приоритетов и поставить в соответствие каждой целевой функции некоторый безразмерный множитель. В результате появляется «функция компромисса», позволяющая в процессе оптимизации пользоваться одной составной целевой функцией.

*Поиск минимума и максимума.* Одни алгоритмы оптимизации приспособлены для поиска максимума, другие - для поиска минимума. Однако независимо от типа решаемой задачи на экстремум можно пользоваться одним и тем же алгоритмом, так как задачу минимизации можно легко превратить в задачу на поиск максимума, поменяв знак целевой функции на обратный.

*Множество допустимых решений (МДР) - пространство решения.* Так называется область, определяемая всеми $n$ проектными параметрами. Пространство решения не столь велико, как может показаться, поскольку оно обычно ограничено рядом условий, связанных с физической сущностью задачи. Ограничения могут быть столь сильными, что задача не будет иметь ни одного удовлетворительного решения. Следует отметить, что очень часто в связи с ограничениями оптимальное значение целевой функции достигается на одной из границ области множества допустимых решений задачи.

*Локальный оптимум.* Так называется точка пространства решений, в которой целевая функция имеет наибольшее значение по сравнению с ее значениями во всех других точках ее ближайшей окрестности.

Часто пространство проектирования содержит много локальных оптимумов и следует соблюдать осторожность, чтобы не принять первый из них за оптимальное решение задачи.

*Глобальный оптимум.* Глобальный оптимум - это оптимальное решение для всего множества допустимых решений. Оно лучше всех других решений, соответствующих локальным оптимумам, и именно его ищет ЛПР. Возможен случай нескольких равных глобальных оптимумов, расположенных в разных частях пространства проектирования.

## 1.2. Математические модели принятия решения, используемые в задачах оптимального проектирования

Рассмотрим классификацию оптимизационных задач по виду математических моделей, которые включают следующие элементы [42]: 1) исходные данные, 2) искомые переменные, 3) зависимости.

*Исходными данными* для математической модели являются: целевая функция $L(\vec{x})$, левые части ограничений $g_i(\vec{x})$ и их правые части $b_i$.Исходные данные могут быть *детерминированными* и *случайными.* Детерминированными называются такие исходные данные, когда при составлении модели их точные значения известны. В достаточно распространенных задачах распределения ресурсов точное значение имеющегося ресурса, а также других элементов, входящих в модель, может быть заранее неизвестно. В таких случаях эти элементы модели являются случайными величинами.

*Искомые переменные* могут быть *непрерывными* и *дискретными.* Непрерывными называются такие величины, которые в заданных граничных условиях могут принимать любые значения. Дискретными называются такие переменные, которые могут принимать только заданные значения. *Целочисленными* называются такие дискретные переменные, которые могут принимать только целые значения.

*Зависимости между переменными* (как целевые функции, так и ограничения) могут быть *линейными* и *нелинейными.* Напомним, что линейными называются такие зависимости, в которые переменные входят в первой степени, и с ними выполняются только действия сложения или вычитания. Если же переменные входят не в первой степени или с ними выполняются другие действия, то зависимости являются нелинейными. При этом следует иметь в виду, что если в задаче хотя бы одна зависимость нелинейная, то и вся задача является нелинейной.

Сочетание различных элементов модели образует различные классы задач оптимизации, которые требуют разных методов решения. Основные классы задач оптимизации приведены на рис. 1.1. (см. прил. 1, табл.6).

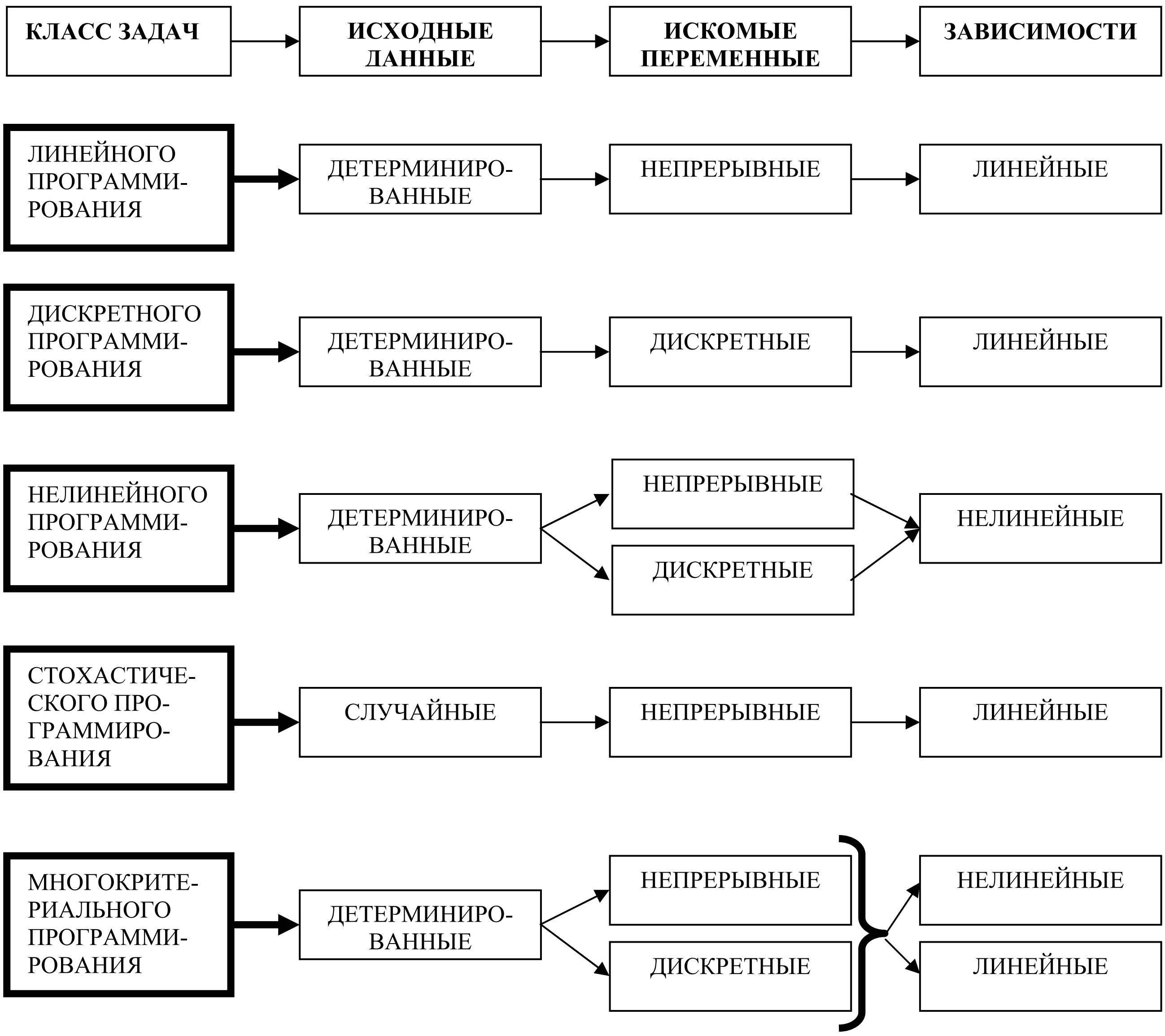


Рис. 1.1. Основные классы задач оптимизации

### 1.2.1 Задача линейного программирования

Задача линейного программирования, которая является частным случаем задачи оптимизации, записывается следующим образом:

$$\begin{cases} L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(\max), \\ g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1 , \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2 , \\ ...................................., \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m , \\ d_j \le x_j \le D_j , j=1,2,...,n . \end{cases}$$

Задача линейного программирования является достаточно распространенной задачей принятия оптимальных решений, особенно в экономике, ее можно решать аналитическими и графическими методами. Аналитические методы, которые представляют собой последовательность вычислений по некоторым правилам, являются основой для решения задачи на компьютере. Их единственный недостаток заключается в том, что в отличие от графических методов, они совершенно не наглядны. Графические же методы достаточно наглядны, но они пригодны лишь для решения таких задач, в которых число переменных $n \le 3$ [44].

На основании графического метода можно сделать исключительно важный вывод для задач линейного программирования: *оптимальное решение выбирается из координат вершин МДР, образованного ограничениями задачи.*

На этом выводе базируется аналитический метод решения задач линейного программирования, который заключается в следующем [42]:
1) найти вершины МДР, как точки пересечения ограничений;
2) определить последовательно значения целевой функции в вершинах;
3) вершина, в которой целевая функция приобретает оптимальное (максимальное или минимальное) значение, является оптимальной вершиной;
4) координаты этой вершины и являются искомыми оптимальными значениями переменных.

Эти правила, сформулированные на основании графического решения задачи в двухмерном и трехмерном пространстве, справедливы и для $n$ −мерного. В этом случае МДР представляет собой многогранник. Координаты каждой его вершины - это допустимые решения. Координаты той вершины, в которой целевая функция имеет максимальное (или минимальное) значение, являются оптимальным решением задачи.

Для аналитического решения задач линейного программирования разработан специальный алгоритм направленного перебора вершин. Этот алгоритм обеспечивает переход от одной вершины к другой в таком направлении, при котором значение целевой функции от вершины к вершине улучшается.

В геометрии есть такое понятие "симплекс". Симплексом тела в $k$-мерном пространстве называют совокупность $k$+1 его вершин. С учетом этого понятия аналитический метод решения задачи линейного программирования называют *симплекс-методом.* Вычисления, обеспечивающие определение значения целевой функции и переменных в одной вершине, называются итерацией.

Решение задачи с помощью симплекс-метода подробно изложены в работе [44].

### 1.2.2. Задача дискретного программирования

Рассмотрим общую задачу дискретного программирования:

$$\begin{cases} L = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j \to \min(\max), \\ g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1 , \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m , \\ \vec{x} \in D , \end{cases}$$

где $D$ - некоторое множество.

Если множество $D$ является конечным или счетным, то условие $\vec{x} \in D$ - это условие дискретности, и данная задача является задачей *дискретного программирования.*

Если вводится ограничение $x_j$ - целые числа ( $j = 1,2,...,n$), то приходят к задачам целочисленного программирования (ЦП), которое является частным случаем *дискретного программирования.*

В задачах дискретного программирования область допустимых решений является невыпуклой и несвязной. Поэтому отыскание решения таких задач сопряжено со значительными трудностями. В частности, невозможно применение стандартных приемов, состоящих в замене дискретной задачи ее непрерывным аналогом, в дальнейшем округлении найденного решения до ближайшего целочисленного.

Проверка показывает, что никакое округление компонент этого плана не дает допустимого решения, удовлетворяющего ограничениям этой задачи. Таким образом, для решения задач дискретного программирования необходимы специальные методы.

*Методы решения задач дискретного программирования* по принципу подхода к проблеме можно разделить на две группы [44]: 1) методы отсечения или отсекающих плоскостей; 2) метод ветвей и границ.

*Математические модели задач дискретного программирования* по структуре модели можно разделить на два класса [44]: 1) целочисленные задачи; 2) экстремальные комбинаторные задачи.

*Математические модели задач с неделимостями (целочисленные задачи)* основаны на требовании целочисленности переменных $\{x_j\}$, вытекающем из физических условий практических задач. К таким задачам относятся: *задача об определении оптимальной структуры производственной программы*, где $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ - объемы выпуска продукции; *задача о ранце*, где необходимо определить, сколько предметов $x_j (j = 1,2,...,n)$ каждого типа должен турист положить в рюкзак, чтобы суммарная ценность снаряжения была максимальной.

В том случае, когда ограничения и целевая функция представляют собой линейные зависимости, задачу называют целочисленной задачей линейного программирования.

Математическая формулировка такой задачи имеет вид:

$$
\begin{cases}
L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max), \\
g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1, \\
g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m, \\
d_j \le x_j \le D_j, \\
x_j - \text{ целые, } j = 1,2,...,n.
\end{cases}
$$

Для решения задач подобного типа применяются методы отсечения (в частности метод Гомори) и модифицированный метод ветвей и границ для задач целочисленного программирования. Подробно об этих методах можно узнать в литературе [43], [44].

*В экстремальных комбинаторных задачах* необходимо найти экстремум некоторой целевой функции, заданной на конечном множестве, элементами которого служат перестановки из *n* символов (объектов).

Наиболее распространенными задачами этого класса являются: *задача о коммивояжере*, в которой имеется *n* городов, расстояния между которыми заданы матрицей $C = \left\| c_{ij} \right\|$. Выезжая из некоторого города, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах по кратчайшему замкнутому маршруту, проходящему через каждый пункт по одному разу, и вернуться назад; *задача о трех станках*, где *n* деталей последовательно обрабатывается на трех $a_i, b_i, c_i$ станках, причем технологические маршруты всех деталей одинаковы, известны длительности обработки *i*-й детали на первом, втором и третьем станке соответственно, необходимо определить порядок запуска деталей на обработку, при котором минимизируется суммарное время обработки всех деталей.

Метод ветвей и границ был разработан именно для комбинаторных задач дискретного программирования. Алгоритм решения задачи коммивояжера и задачи о трех станках по данному методу можно узнать в литературе [42], [44].

### 1.2.3. Задача нелинейного программирования

В задачах линейного программирования глобальный экстремум целевой функции достигается в вершине симплекса и симплекс-метод за конечное число шагов определяет эту вершину.

В задачах нелинейного программирования допустимое множество решений может быть невыпуклым, несвязанным, т.е. иметь довольно сложную структуру. Глобальный экстремум целевой функции может достигаться как на границе области допустимых решений, так и внутри ее. Кроме того, наряду с глобальным экстремумом могут существовать локальные экстремумы, что делает задачу нелинейного программирования гораздо сложнее задачи линейного программирования

Задачи нелинейной оптимизации с точки зрения методов решения делятся на два класса [42]: 1) задачи безусловной оптимизации; 2) задачи условной оптимизации.

*Задача безусловной оптимизации* представляет собой поиск оптимума целевой функции *без всяких дополнительных условий,* что записывается

$$L = f(x) \to \max(\min).$$

*Задача условной оптимизации* в общем случае записывается в известном виде:

$$\begin{cases} L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max), \\ g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2, \\ ............................., \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m, \\ d_j \le x_j \le D_j, \; j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Такая задача оптимизации, кроме целевой функции, включает *дополнительные условия* в виде ограничений и граничных условий.

*Задачи безусловной нелинейной оптимизации* могут решаться различными методами поиска. Чтобы составить маршрут поиска, нужно, во-первых, знать начальную точку, во-вторых, выбрать путь движения и, наконец, определить, достижение какой точки следует считать достижением цели.

Путь движения можно представить как последовательность шагов, а каждый шаг при этом определяется *направлением* движения и *расстоянием,* которое следует пройти в данном направлении.

Идея поиска экстремума заключается в следующем:

1. Задать начальную точку $x_j^0, j = 1, 2, ..., n$.
2. В заданной точке $x_j^0$ определить направление движения на первом шаге $p_1$.
3. Принять величину шага $t_i$.
4. Определить координаты конца первого шага $x_j^1$.

5. Вычислить значения признака экстремума на первом шаге.
6. Проверить выполнение признака экстремума.

Если условие признака выполняется, то принимается, что экстремум находится в точке $x_j^0$, если нет - аналогично выполняется второй шаг и так далее до выполнения условия, характеризующего достижение экстремума.

Важный вопрос поиска - признак достижения экстремума, то есть вершины, обычно таким признаком является величина относительного приращения функции на каждой итерации:

$$\varDelta L_k = \frac{L_{k+1} - L_k}{L_k} \ .$$

Экстремум считается достигнутым, если выполняется условие $\varDelta L_k \leq \varDelta L_{\text{зад}}$, где $\Delta L_{\text{зад}}$ - точность, назначаемая при решении задачи.

Методы выбора направления и длины шага бывают различных типов, но их порядок определяется порядком производных целевых функций, используемых в них.

*Методами нулевого порядка* поиска называются такие методы, которые для определения направления $p$ и величины шага $t$ используют только значение целевой функции.

*Методы первого порядка* или *градиентные методы* - это такие методы, в которых для определения направления $p$ и шага $t$ используются значения первых производных целевой функции, и определяется ее градиент.

*Методами второго порядка* или *методами Ньютона* называются такие методы, в которых для определения направления $p$ и шага $t$ используются значения вторых производных целевой функции.

Чем выше порядок методов, тем больше вычислений на каждой итерации, но тем меньше требуется итераций и, естественно, наоборот. Наиболее распространенными являются градиентные методы. Такое положение объясняется тем, что с одной стороны, они не требуют на каждой итерации очень больших вычислений, так как вычисляется только целевая функция и ее первые производные, а с другой - у этих методов достаточно хорошая сходимость, то есть они обеспечивают нахождение экстремума за небольшое число итераций.

*Задачи условной оптимизации* решаются с использованием следующих подходов:

1. Если число переменных $n \leq 3$, то возможно графическое решение задачи.
2. Классический метод условной оптимизации с помощью определения стационарных, граничных точек и точек разрыва.
3. Метод множителей Лагранжа, если ограничения имеют вид равенств. При этом идея метода заключается в преобразовании задачи условной оптимизации в задачу безусловной оптимизации.
4. Метод штрафных функций, если ограничения имеют вид неравенств и равенств.
5. Метод определения седловой точки, если ограничения имеют вид неравенств.

Подробно указанные методы излагаются в литературе [42], [43]

### 1.2.4. Задача стохастического программирования

Математическая модель задачи оптимизации включает в себя три элемента: 1) целевую функцию; 2) ограничения; 3) граничные условия. При этом допустим ряд вариантов задач стохастического программирования.

Если коэффициенты $c_j$ в *целевой функции* - случайные величины, то возможно две постановки задачи оптимизации:

1. Максимизация (минимизация) среднего значения целевой функции, которая называется *М-постановкой:* $M[L] \to \max(\min)$.

2 Максимизация вероятности получения максимального (минимального) значения, которая называется *Р-постановкой:* $P[L_{\max\,(\min)}] \to \max$.

Если случайными являются величины $a_{ij}$ и $b_i$, входящие в *ограничения,* то $i$-е ограничение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ записывается так: $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right] \ge p_i$, где $p_i$ - заданная вероятность, с которой должно выполняться $i$-е ограничение

Запись *граничных условий* может быть выполнена в двух вариантах. Если в ограничении $d_j, D_j$ - детерминированные величины, то ограничение остается в виде $d_j \le x_j \le D_j$. Если $d_j, D_j$ - случайные величины, то рассматриваются два ограничения $P[x_j \le D_j] \ge p_i$, $P[x_j \ge d_j] \ge p_i$.

В практических задачах граничные условия $d_j, D_j$ случайными величинами являются крайне редко. Объединяя целевую функцию, ограничения и граничные условия, можно сформулировать две постановки задачи стохастического программирования:

*М-постановка*

$$\begin{cases} M\,[L] \to \max\,(\min), \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right] \ge p_i\ , \\ d_j \le x_j \le D_j\ , \\ j = 1,2,\ldots,n, i = 1,2,\ldots,m; \end{cases}$$

*Р- постановка*

$$\begin{cases} P[L_{\max\,(\min)}] \to \max\ , \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right] \ge p_i\,, \\ d_j \le x_j \le D_j, \\ j = 1,2,\ldots,n, i = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Обе постановки представляют собой задачи нелинейного программирования.

### 1.2.5. Задача многокритериальной оптимизации

В задачах, которые были рассмотрены до сих пор, был только один критерий оптимальности, одна цель, однако зачастую свести задачу к одному критерию достаточно трудно, так как целей может быть много. В этом случае оптимизацию производят по нескольким частным критериям $Q_i(\vec{x})(i=1,2,...,s)$, а полученные задачи называют задачами *многокритериальной или векторной оптимизации*. Многокритериальная оптимизация представляет собой попытку получить наилучшее значение для некоторого множества характеристик рассматриваемого объекта, то есть найти некоторый компромисс между теми частными критериями $Q_i(\vec{x})(i=1,2,...,s)$, по которым требуется оптимизировать решение.

Постановку задачи можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} Q_1(\vec{x}) \to \min(\max), \\ Q_2(\vec{x}) \to \min(\max), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Q_s(\vec{x}) \to \min(\max), \\ g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m, \\ d_j \le x_j \le D_j, \ j=1,2,...,n. \end{cases}$$

Различные методы решения подобных задач представлены в литературе [40], [42], [45], в разд. 1.4 подробно описывается метод свертывания векторного критерия $\vec{Q}(\vec{x})=(Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}),...,Q_s(\vec{x}))$.

## 1.3. Причины многокритериальности в задачах оптимального проектирования

Наиболее общей математической моделью принятия оптимального решения является задача многокритериальной оптимизации. Приведем несколько причин, приводящих к многокритериальным задачам [40].

1. Одной из причин, приводящей к многокритериальности, является *множественность технических требований*, которые предъявляются к характеристикам проектируемого устройства. Их можно свести к системе неравенств.

$$q_i(\vec{x}) \le q_i^+, i = 1,2,...,s, \tag{1.1}$$

где $q_i^+$ – предельное значение $i$ – го технического требования.

В этом случае частные критерии оптимальности обычно в явном виде отсутствуют и их приходится вводить искусственно с помощью выражений:

$$Q_i(\vec{x}) = \begin{cases} 0, \text{если } q_i(\vec{x}) \le q_i^+; \\ w_i(q_i(\vec{x}) - q_i^+;), \text{если } q_i(\vec{x}) > q_i^+. \end{cases}$$

Здесь $w_i$ – весовой коэффициент, учитывающий важность $i$-го ограничения ($\sum_{i=1}^{s} w_i = 1$).

Таким образом, решение системы неравенств (1.1) сводится к решению задачи векторной оптимизации:

$$\min_{\vec{x}\in D_x} Q_1(\vec{x}), \min_{\vec{x}\in D_x} Q_2(\vec{x}), ..., \min_{\vec{x}\in D_x} Q_s(\vec{x}). \quad (1.2)$$

2. Следующей причиной многокритериальности является *необходимость обеспечения оптимальности проектируемого устройства при различных условиях его функционирования,* то есть обеспечение экстремальных значений критерия оптимальности при неопределенности условий, в которых приходится работать устройству. При этом неопределенность может иметь либо количественный характер, выраженный с помощью параметра $v$, что приводит к задаче оптимизации.

$$\min_{\vec{x}\in D_x} Q(\vec{x}, v) \text{ для всех } v \in [v^-, v^+], \quad (1.3)$$

либо качественный характер, связанный с указанием конкретных условий функционирования. В последнем случае эффективность и качество работы устройства для каждого режима могут быть охарактеризованы различными критериями оптимальности. Например, в зависимости от исходного состояния для логического элемента представляет опасность либо помеха $Q_1(\vec{x})$, вызывающая запирание схемы, либо помеха $Q_2(\vec{x})$, приводящая к отпиранию схемы. Тогда, если под помехоустойчивостью логической схемы понимать минимальный порог срабатывания максимально чувствительной схемы, задача оптимального проектирования логического элемента может быть сформулирована как задача векторной оптимизации:

$$\max_{\vec{x}\in D_x} Q_1(\vec{x}), \max_{\vec{x}\in D_x} Q_2(\vec{x}),$$

где $D_x$ – допустимая область работоспособности логического элемента.

Если неопределенность функционирования имеет количественный характер, то задача оптимизации (1.3) сводится к задаче векторной оптимизации (1.2) путем дискретизации критерия оптимальности $Q(\vec{x}, v)$ по параметру $v$ и рассмотрению в качестве частных критериев оптимальности функций.

$$Q_i(\vec{x}) = Q(\vec{x}, v_i), \text{где } v_i \in [v^-, v^+].$$

Такой подход к задаче оптимального проектирования позволяет учитывать влияние внешних факторов (температуры, ускорения, радиации и т. д.) на критерий оптимальности и ограничения проектируемого устройства.

3. При постановке задачи оптимального проектирования одним из *основных вопросов является выбор критерия оптимальности $Q(\vec{x})$.* С одной стороны, критерий должен иметь конкретный физический смысл, а с другой - от него

требуется, чтобы он как можно полнее характеризовал проектируемое устройство. Однако требования функциональной полноты трудно удовлетворить с помощью только одного скалярного показателя, так как он обычно описывает конкретное свойство устройства. В связи с этим приходится рассматривать совокупность показателей ($Q_1,...,Q_s$), каждый из которых имеет наглядную физическую интерпретацию и позволяет оценить качество оптимального решения $\vec{x}^*$ с различных точек зрения.

Таким образом, *необходимость обеспечения функциональной полноты показателей, конкретизирующих оптимальные свойства проектируемого устройства, при одновременной их физической наглядности приводит к многокритериальности,* которая вытекает прямо из постановки задачи оптимального проектирования. Например, при проектировании транзисторного логического элемента бортовой ЭВМ автотракторного средства необходимо рассматривать одновременно несколько частных критериев оптимальности, отражающих различные свойства схемы, что приводит к следующей задаче векторной оптимизации:

$$\max_{\vec{x}\in D_x} Q_1(\vec{x}), \max_{\vec{x}\in D_x} Q_2(\vec{x}), \min_{\vec{x}\in D_x} Q_3(\vec{x}), \max_{\vec{x}\in D_x} Q_4(\vec{x}), \min_{\vec{x}\in D_x} Q_5(\vec{x}). ,$$

где $D_x$ - допустимая область работоспособности схемы, $Q_1(\vec{x})$ - нагрузочная способность; $Q_2(\vec{x})$, $Q_3(\vec{x})$ - статическая помехоустойчивость в закрытом состоянии к отпирающей по напряжению помехе и к запирающей по току, действующей в открытой схеме, соответственно, $Q_4(\vec{x})$ - рассеиваемая мощность, $Q_5(\vec{x})$ - среднее время задержки сигнала. Оптимальный вариант логической схемы должен иметь экстремальные значения по каждому из частных критериев ($Q_1,...,Q_s$).

4. В тех случаях. *когда проектируемое устройство состоит из нескольких взаимосвязанных узлов и блоков, оптимальность* всего *устройства определяется эффективностью и качеством его отдельных частей, каждая из которых может быть охарактеризована, по крайней мере, хотя бы одним частным критерием оптимальности* $Q_i(\vec{x})$.

В этом случае функционирование всего устройства можно считать наилучшим, если за счет выбора управляемых параметров $\vec{x}$ обеспечиваются экстремальные значения всех частных критериев оптимальности как основных подцелей одной общей цели проектирования.

5. Другой ситуацией, приводящей к многокритериальности, является *случай, когда функционально-логическая модель проектируемого устройства отсутствует и требуется ее построить таким образом, чтобы внешние параметры устройства наилучшим образом соответствовали экспериментальным данным.*

В связи с этим параметры модели $\vec{x}$, построенной с помощью эквивалентных схем замещения компонент, могут не иметь непосредственного отношения к внутренним процессам в устройстве, а должны подбираться так, чтобы наилучшим образом (в некотором смысле) аппроксимировать экспериментально полученные внешние параметры проектируемого устройства.

### 1.4. Векторная оптимизация

#### 1.4.1. Векторные критерии оптимальности

Многокритериальная задача оптимизации вместе со *множеством возможных, (допустимых) решений* $D_x$ включает *набор целевых функций* (называемых также частными критериями оптимальности) $Q_1, Q_2, ..., Q_s$. Набор частных критериев оптимальности образует вектор-функцию (векторный критерий), которую далее будем обозначать через $\vec{Q}(\vec{x}) = (Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}), ..., Q_s(\vec{x}))$ [41].

Наряду с множеством допустимых решений $D_x$ удобно рассматривать множество $D_Q$ – область критериев

$$D_Q = \{\vec{Q} = (Q_1, Q_2, ..., Q_s) / Q_i = Q_i(\vec{x}),\ \vec{x} \in D_x\}.$$

Каждому решению $\vec{x} \in D_x$ соответствует один вполне определенный векторный критерий $\vec{Q}(\vec{x})$. С другой стороны, каждой оценке $\vec{Q}(\vec{x})$ могут отвечать несколько решений $\vec{x} \in D_x$. Таким образом, между множествами $D_x$ и $D_Q$ имеется тесная связь, и поэтому выбор решения из $D_x$ в указанном смысле равносилен выбору соответствующей оценки из $D_Q$.

Таким образом, при существовании в задаче нескольких частных критериев рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации, как задачу нахождения такого вектора $\vec{x} \in D_x$, который обеспечивает одновременно минимальное значение каждому частному критерию оптимальности

$$\min_{\vec{x} \in D_x} Q_1(\vec{x}),\ \min_{\vec{x} \in D_x} Q_2(\vec{x}), ...,\ \min_{\vec{x} \in D_x} Q_s(\vec{x}),$$

$$D_x = \{\ \vec{x} / g_i(\vec{x}) \ge 0,\ i = 1, 2, ..., m\ \}.$$

Любые два векторных критерия $\vec{Q}^k = (Q_1^k, Q_2^k, ..., Q_s^k)$ и $\vec{Q}^l = (Q_1^l, Q_2^l, ..., Q_s^l)$ являются противоречивыми, если

$$Q_i^k \le Q_i^l,\ i \in I_1,\ Q_j^k \ge Q_j^l,\ j \in I_2,\ I_1 \cup I_2 = \{1,2,...,s\},$$

и по крайней мере одно из этих соотношений является строгим. В случае доминирования $\vec{Q}^k$ над $\vec{Q}^l$ : $Q_i^k \le Q_i^l,\ i = 1, 2, ..., s$, и хотя бы для одного $i$ это неравенство строгое, альтернатива $\vec{x}^l$ может быть исключена из рассмотрения, так как вектор $\vec{Q}^k$ лучше вектора $\vec{Q}^l$ по всем частным критериям.

В этом случае при переходе от критерия $\vec{Q}^l$ к критерию $\vec{Q}^k$ ни один из частных критериев не ухудшится, а хотя бы один из них будет улучшен.

Множество критериев, для которых всегда справедлив принцип доминирования, образует множество $D_s (D_s \subseteq D_Q)$, которое называется *областью согласия.* В области согласия нет противоречия между частными критериями оптимальности, и, если область критериев состоит только из области согласия, тогда существует единственная точка $\vec{x}^* \in D_x$, в которой все частные критерии согласованы между собой в том смысле, что при движении к $\vec{x}^*$значения всех компонент $Q_i(\vec{x})$ уменьшаются. Точка $\vec{x}^*$ называется *оптимальным решением*, и при этом значения всех частных критериев достигают в ней минимума.

Такая ситуация на практике встречается крайне редко, наиболее типичным является случай, когда частные критерии являются противоречивыми и минимум по каждому из них достигается в различных точках. В этом случае уменьшение одного частного критерия приводит к увеличению других частных критериев. Такие точки $\vec{x}^0 \in D_x$, в которых не выполняется принцип доминирования относительно любой точки $\vec{x} \in D_x$, называются *эффективными точками,* то есть точка $\vec{x}^0 \in D_x$ называется эффективной, если не существует ни одной точки $\vec{x} \in D_X$ такой, что $Q_i(\vec{x}) \le Q_i(\vec{x}^0)$, $i = 1,2,...,s$ и хотя бы для одного $j$ это неравенство строгое $Q_j(\vec{x}) < Q_j(\vec{x}^0)$.

Поскольку в эффективных точках векторный критерий оптимальности $\vec{Q}$ является не уменьшаемым по всем частным критериям одновременно, то эти точки также называются *неулучшаемыми решениями или оптимальными по Парето.*

Множество векторных критериев $\vec{Q}$, соответствующих множеству всех эффективных точек, называется областью компромиссов $D_k (D_k \subset D_Q)$, а само множество эффективных точек - *областью решений, оптимальных по Парето.*

Оптимальность по Парето означает, что нельзя дальше уменьшать значение одного из частных критериев , не увеличивая при этом хотя бы одного из остальных, таким образом в области компромиссов $D_k$ не выполняется принцип доминирования, а частные критерии являются противоречивыми. Это приводит к необходимости введения компромисса между частными критериями оптимальности для того, чтобы решить, какой из векторов $\vec{Q}^l$ или $\vec{Q}^k$ из области компромиссов $D_k$ считать предпочтительным.

*Под оптимально-компромиссным решением* будем понимать одну их эффективных точек $\vec{x}^0 \in D_x$, являющуюся предпочтительней с точки зрения ЛПР. Таким образом, задача векторной оптимизации не позволяет однозначно ответить на вопрос, получено ли оптимальное решение. Положительный ответ на этот вопрос зависит от качественной информации о важности частных критериев, которая имеется у ЛПР.

### 1.4.2. Преобразования векторного критерия и нормализация частных критериев оптимальности

При помощи бинарного предпочтения $\succ$ будем определять тот факт, что векторный критерий $\vec{Q}^k$ предпочтительнее $\vec{Q}^l$ $\left(\vec{Q}^k \succ \vec{Q}^l\right)$, если ни тому, ни другому нельзя отдать предпочтение, то они считаются эквивалентными ($\vec{Q}^k \sim \vec{Q}^l$) В случае $\vec{Q}^k \succ \vec{Q}^l$ будем говорить, что решение $\vec{x}^k$ предпочтительнее решения $\vec{x}^l$

При решении задачи многокритериальной оптимизации часто возникает необходимость преобразования векторного критерия оптимальности $\vec{Q}$ в другой векторный критерий $\psi(\vec{Q})$. Очевидно, чтобы не исказить смысл исходной задачи, новый критерий $\psi(\vec{Q})$ должен быть эквивалентен исходному критерию $\vec{Q}$ на всем множестве допустимых решений $D_x$ ($\vec{Q} \sim \psi(\vec{Q})$).

*Преобразование* $\psi$*, дающее эквивалентный исходному векторный критерий, называется допустимым преобразованием вектора* $\vec{Q}$*, так как сохраняет истинность отношений предпочтения для преобразованного вектора, то есть если для некоторых решений* $\vec{x}^k, \vec{x}^l \in D_x$ *имеет место* $\vec{Q}(\vec{x}^k) \succ \vec{Q}(\vec{x}^l)$*, то это предпочтение сохраняется и для вектора* $\psi(\vec{Q})$: $\psi\vec{Q}(\vec{x}^k) \succ \psi\vec{Q}(\vec{x}^l)$.

Важным применением допустимого преобразования $\psi$ является нормализация частных критериев оптимальности $Q_i(\vec{x})$. Под нормализацией понимается приведение частных критериев к единому безразмерному виду.

Пусть частные критерии оптимальности имеют одинаковую шкалу измерения $[\alpha, \beta]$ и приведены к безразмерному типу при помощи положительного линейного преобразования:

$$\psi(Q_i(\vec{x})) = \tilde{Q}_i(\vec{x}) = \frac{Q_i(\vec{x}) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}(\beta - \alpha) + \alpha,$$

где $Q_i^+ = \max\limits_{x \in D_x} Q_i(x)$, $Q_i^- = \min\limits_{x \in D_x} Q_i(x)$, $Q_i^+ \neq Q_i^-$, $i = 1,2,\ldots s$.

### 1.4.3. Метод свертывания векторного критерия

Этот метод является наиболее распространенным методом решения многокритериальных задач, учитывающим относительную важность частных критериев оптимальности с помощью построения скалярной функции $F$, являющейся обобщенным критерием относительно векторного критерия $\vec{Q}(\vec{x})$, и решения однокритериальной задачи оптимизации

$$\min_{x \in D_X} F(w, \vec{Q}(\vec{x})),$$

где $\vec{w} = \{w_1, \ldots, w_s\}$ - весовые коэффициенты относительной важности частных критериев.

В качестве обобщенных критериев могут быть использованы функции $F$ следующего вида:

а) аддитивный критерий оптимальности

$$F(\vec{w}, \vec{Q}(\vec{x})) = \sum_{i=1}^{s} w_i Q_i(\vec{x});$$

б) мультипликативный критерий оптимальности

$$F(\vec{w},\vec{Q}(\vec{x}))=\prod_{i=1}^{s} w_i Q_i(\vec{x});$$

в) среднестепенной обобщенный критерий оптимальности

$$F(\vec{w},\vec{Q}(\vec{x}))=\left[\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{s} w_i\, Q_i^p(\vec{x})\right]^{1/p}.$$

### 1.4.4. Аддитивный критерий оптимальности

В дальнейшем в качестве обобщенного критерия будем использовать обобщенный критерий оптимальности при дополнительном условии $\sum_{i=1}^{s} w_i=1$, где $w_i$ – весовые коэффициенты. Величина $w_i$ определяет важность $i$ – го критерия оптимальности и задает в количественном измерении предпочтение $i$ – го критерия над другими критериями оптимальности.

Решение задачи нахождения минимального значения каждого частного критерия оптимальности $\min\limits_{\vec{x}\in D_X} Q_1(\vec{x}), \min\limits_{\vec{x}\in D_X} Q_2(\vec{x}),..., \min\limits_{\vec{x}\in D_X} Q_s(\vec{x}),$ может быть сведено к минимизации аддитивной функции

$$\min_{\vec{x}\in D_X} F(\vec{w},\vec{Q}(\vec{x}))=\min_{\vec{x}\in D_X}\sum_{i=1}^{s} w_i\, Q_i(\vec{x}),$$

где $x_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{s} w_i=1$.

Этот метод свертывания векторного критерия $\vec{Q}=(Q_1,...,Q_s)$, называемый методом *взвешенных сумм*, позволяет создавать приоритет более важным частным критериям оптимальности за счет увеличения для них значений $w_i$. При этом относительно частных критериев принимается допущение, что они количественно соизмеримы между собой (в частности, $Q_i(\vec{x})$ нормализованы и приведены к безразмерному виду $\tilde{Q}_i(\vec{x})$).

Таким образом, выбрав обобщенный критерий оптимальности $F(\vec{w},\vec{Q}(\vec{x}))$ в виде аддитивной функции, мы от субъективизма при выборе предпочтения между векторными критериями $\vec{Q}^k$ и $\vec{Q}^l$ переходим к субъективизму, связанному с назначением численных значений коэффициентов $w_i(i=1,2,...,s)$. В связи с этим возникает вопрос: «Как выбирать численные значения весовых коэффициентов $w_i$?». Получить ответ на этот вопрос в какой–то степени можно, если имеется дополнительная информация о важности частных критериев оптимальности.

### 1.4.5. Способы назначения весовых коэффициентов в аддитивном критерии оптимальности

Для *равноценных критериев*, то есть критериев, для которых невозможно установить приоритет по важности, значения весовых коэффициентов $w_i$ выбираются одинаковыми [41]

$$w_i = \frac{1}{S},\ i=1,2,...,s.$$

Для *неравноценных критериев*, то есть критериев, для которых ЛПР может установить приоритет по важности, значения весовых коэффициентов выбираются в соответствии с важностью критерия.

$$w_i > 0,\ \sum_{i=1}^{s} w_i = 1,\ i=1,2,...,s.$$

Рассмотрим некоторые способы и числовые приемы, позволяющие по информации о качестве значений частных критериев оптимальности определять значения весовых коэффициентов $w_i$.

**Способ 1.** Для каждого частного критерия оптимальности $Q_i(\vec{x}) > 0$, $i = 1,2,...,s$ вычисляется коэффициент относительного разброса

$$\delta_i = \frac{Q_i^+ - Q_i^-}{Q_i^+} = 1 - \frac{Q_i^-}{Q_i^+},$$

где $Q_i^- = \min\limits_{\vec{x}\in D_x} Q_i(\vec{x}),\ \ Q_i^+ = \max\limits_{\vec{x}\in D_x} Q_i(\vec{x})$, который определяет максимально возможное отклонение по $i$-му частному критерию. Весовые коэффициенты $w_i$ получают наибольшее значение для тех критериев, относительный разброс которых в области $D_Q$ наиболее значителен

$$w_i = \frac{\delta_i}{\sum\limits_{k=1}^{s} \delta_k} \quad (i = 1,...,s).$$

***Пример 1.*** В качестве примера рассмотрим конкретную числовую задачу в следующей постановке:

$$\left.\begin{aligned} &\min_{x\in D_x} Q_1(x) = \min_{x\in D_x} 4(x-2)^2 + 5,\\ &\min_{x\in D_x} Q_2(x) = \min_{x\in D_x} (x-4)^2 + 1,\\ &D_x = \{x/0 \le x \le 5\}, \end{aligned}\right\}$$

| $x$ / $Q_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | 21 | 9 | 5 | 9 | 21 | 41 |
| $Q_2$ | 17 | 10 | 5 | 2 | 1 | 2 |

,

которая с помощью метода взвешенных сумм сводится к минимизации следующей функции:

$$\min_{x\in D_x} F(\vec{Q}) = \min_{x\in D_x} \left\{ w_1 \left[ 4(x-2)^2 + 5 \right] + w_2 \left[ (x-4)^2 + 1 \right] \right\}.$$

При этом имеем следующие значения промежуточных вычислений:

$$Q_1^+ = 41,\ \ Q_1^- = 5\,,\quad \delta_1 = \frac{41-5}{41} = \frac{36}{41},\ Q_2^+ = 17,\ \ Q_2^- = 1\,,\quad \delta_2 = \frac{17-1}{17} = \frac{16}{17}.$$

Тогда весовые коэффициенты будут иметь следующие значения:

$$w_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{36}{41}\bigg/\left(\frac{36}{41} + \frac{16}{17}\right) = 0{,}48\,,$$

$$w_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{16}{17}\bigg/\left(\frac{36}{41} + \frac{16}{17}\right) = 0{,}52\,.$$

Определим зависимость точки минимума функции $F(\vec{Q})$ от коэффициентов $w_1$ и. $w_2$.

$$w_1\left[4\left(x^2 - 4x - 4\right)\right] + w_2\left[\left(x^2 - 8x - 16\right) + 1\right] = w_1\left(4x^2 - 16x - 16 + 5\right) +$$
$$+ w_2\left(x^2 - 8x - 16 + 1\right) = \left(4\,w_1 + w_2\right)x^2 - 8\left(2\,w_1 + w_2\right)x - 11\,w_1 - 15\,w_2\,.$$

Это выражение представляет собой квадратичную функцию ($ax^2 + bx + c$), которая достигает минимум в точке $x = -\dfrac{b}{2a}$. Для найденных числовых значений $w_1$ и $w_2$ будем иметь:

$$x^* = \frac{8(2w_1 + w_2)}{2(4w_1 + w_2)} = \frac{8(2\cdot 0{,}48 + 0{,}52)}{2(4\cdot 0{,}48 + 0{,}52)} = 2{,}42\,,$$

и соответственно

$$\underline{Q_1(x^*)} = 4(2{,}42 - 2)^2 + 5 = 5{,}7\ ,\quad \underline{Q_2(x^*)} = (2{,}42 - 4)^2 + 1 = 3{,}5\,.$$

**Способ 2.** Пусть все $Q_i^- \neq 0,\ i=1,2,...,s$, тогда рассматриваются коэффициенты

$$\beta_i(\vec{x}) = \frac{Q_i(\vec{x}) - Q_i^-}{Q_i^-}\,,$$

которые характеризуют отклонение частного критерия оптимальности от его наименьшего значения.

Предположим, что важность $i$-го критерия оптимальности зависит от выполнения неравенства

$$\beta_i(\vec{x}) \le \xi_i\,. \tag{1.4}$$

Здесь величины $\xi_i$ задаются ЛПР из условия, что чем важнее критерий, тем меньше выбирается значение $\xi_i$.

Пусть $R_i^*$ - наибольший радиус шара, построенного около точки минимума $\vec{x}_i^*$ - $i$-го критерия оптимальности, внутри которого точки $\vec{x} \in d\,(\vec{x}_i^* R_i^*)$ (шар радиуса $R_i^*$ с центром в $\vec{x}_i^*$ ) удовлетворяют условию (1.4).

Тогда $R_i^* = \max\limits_{\vec{x}\in D_x}\left\{\ \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_k^*)^2\right\}$, при условии $\beta_i(\vec{x}) = \dfrac{Q_i(\vec{x}) - Q_i^-}{Q_i^-} \le \xi_i$.

Теперь очевидно, что чем больше радиус шара $R_i^*$, в котором относительное отклонение $i$-го критерия от его минимального значения не превосходит $\xi_i$, тем меньше надо выбирать значение весового коэффициента $w_i$:

$$w_i = \frac{\frac{1}{R_i^*}}{\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{R_i^*}} \quad i = 1,\ldots,s.$$

***Пример 2.*** Рассмотрим задачу из примера 1 и положим, что ЛПР задал $\xi_1 = 0{,}4$, $\xi_2 = 0{,}6$. Тогда будем иметь

$$R_1^* = \max_{0\le x\le 5}(x-2)^2 \quad \frac{4(x-2)^2+5-5}{5} \le 0{,}4 \text{ при } (x-2)^2 \le 0{,}5,$$

$$R_2^* = \max_{0\le x\le 5}(x-4)^2 \quad \frac{(x-4)^2+1-1}{1} \le 0{,}6 \text{ при } (x-4)^2 \le 0{,}6.$$

Откуда $\left.\begin{matrix} R_1^* = 0{,}5 \\ R_2^* = 0{,}6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow w_1 = \frac{6}{11} = 0{,}55 \quad w_2 = \frac{5}{11} = 0{,}45.$

**Способ 3.** *Теоретико-игровая модель выбора весовых коэффициентов.* Пусть имеется $S$ частных критериев оптимальности $Q_i(\vec{x})$, для которых нельзя заранее установить количественное отношение предпочтения по важности с помощью весовых коэффициентов $w_i$.

Введем меру

$$C_{lk} = \left| \frac{Q_k^- - Q_k(\vec{x}_l^*)}{Q_k^-} \right|.$$

Эта величина определяет относительное отклонение оптимального значения $k$-го критерия $Q_k^-$ от его значения, которое получено при оптимальном решении $\vec{x}_l^*$ для $l$-го критерия $Q_k(\vec{x}_l^*)$, где

$$Q_k^- = Q_k(\vec{x}_k^*) = \min_{\vec{x}\in D_x} Q_k(\vec{x}),$$

$$Q_l^- = Q_l(\vec{x}_l^*) = \min_{\vec{x}\in D_x} Q_l(\vec{x}).$$

Очевидно, что $C_{ll} = 0, \quad C_{lk} \ge 0$.

Построим матрицу из величин $C_{lk}$, где строкам соответствуют оптимальные решения по каждому частному критерию $\vec{x}_l^*$, а столбцам – оптимальные значения частных критериев $Q_k^-$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & Q_1^- & Q_2^- & \cdots & Q_l^- & \cdots & Q_s^- \\
\hline
\vec{x}_1^* & 0 & C_{12} & \cdots & C_{1l} & \cdots & C_{1s} \\
\vec{x}_2^* & C_{21} & 0 & \cdots & C_{2l} & \cdots & C_{2s} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vec{x}_l^* & C_{l1} & C_{l2} & \cdots & 0 & \cdots & C_{ls} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vec{x}_s^* & C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sl} & \cdots & 0
\end{array} \tag{1.5}$$

Будем рассматривать матрицу (1.5) как матрицу платежей в игре двух лиц с нулевой суммой. Партию этой игры можно представить следующим образом:

первый игрок выбирает одно из оптимальных решений $\vec{x}_l^*$ (это чистая стратегия игрока 1), а второй игрок независимо от выбора первого игрока выбирает любой критерий $Q_k^-$ (это чистая стратегия второго игрока). В связи с тем, что все $C_{lk} \geq 0$, первый игрок платит второму штраф $C_{lk}$, то есть каждый элемент матрицы (12) представляет проигрыш первого игрока в случае выбора им решения $\vec{x}_l^*$, а вторым игроком критерия $Q_k^-$.

Очевидно, что первый игрок стремится добиться

$$\min_l \max_k C_{lk} = \min_l \max_k \left| \frac{Q_k^- - Q_k(\vec{x}_l^*)}{Q_k^-} \right|,$$

то есть стремится минимизировать за счет выбора значений $\vec{x}_l^*$ проигрыш, который следует ожидать по отношению ко всем возможным значениям критериев $Q_k^-$.

Представим себе, что такая игра разыгрывается многократно. При этом первый игрок чистые стратегии выбирает

$$\left.\begin{array}{l}
\vec{x}_1^* \cdots \text{с вероятностью} \cdots \mu_1, \\
\vec{x}_2^* \cdots \text{с вероятностью} \cdots \mu_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\vec{x}_s^* \cdots \text{с вероятностью} \cdots \mu_s,
\end{array}\right\} \quad \sum_{i=1}^{s} \mu_i = 1.$$

Второй игрок выбирает чистые стратегии с вероятностью

$$\left.\begin{array}{l}
Q_1 \leftrightarrow w_1, \\
Q_2 \leftrightarrow w_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
Q_s \leftrightarrow w_s,
\end{array}\right\} \quad \sum_{i=1}^{s} w_i = 1.$$

Смешанную оптимальную стратегию игры ($m \times n$) второго партнера можно найти из задач линейного программирования [44]

$$\begin{cases} \min\limits_{\vec{v}} \sum\limits_{k=1}^{s} v_k \ , \\ \sum\limits_{k=1}^{s} C_{ik} v_k \geq 1, \quad i = 1,2,...,s \, , \\ v_k \geq 0 \, , \ k = 1,2,...,s \, . \end{cases}$$

Пусть $\vec{v}^* = (v_1^*, \dots, v_s^*)$ решение задачи, тогда оптимальная смешанная стратегия второго игрока определяется, как

$$w_i = \frac{v_i^*}{\sum\limits_{k=1}^{s} v_k^*}, \quad i = 1,2,...,s \, . \tag{1.6}$$

Полученные значения $w_i$ и являются весовыми коэффициентами, определяющими относительную важность $i$-го критерия оптимальности.

Запишем целевую функцию задачи в виде аддитивного критерия оптимальности

$$\min_{\vec{x} \in D_x} F(\vec{Q}) = \min_{x \in D_x} \sum_{i=1}^{s} w_i \, \frac{Q_i(\vec{x})}{Q_i^-}, \tag{1.7}$$

где ненормализованные критерии $Q_i(\vec{x})$ взвешиваются множителями $w_i / Q_i^-$ .

Положим $\tilde{w}_i = \dfrac{w_i}{Q_i^-}$ и зададим вектор весовых коэффициентов

$$w_i^* = \frac{\tilde{w}_i}{\sum\limits_{k=1}^{s} \tilde{w}_k}. \tag{1.8}$$

Тогда эффективная точка может быть найдена путем решения задачи оптимизации $\min\limits_{\vec{x} \in D_x} \sum\limits_{i=1}^{s} w_i^* \, Q_i(\vec{x})$, где $w_i^*$ определяются из (1.6), (1.7), (1.8), причем $\vec{v}^* = (v_1^*, \dots, v_s^*)$ - оптимальное решение задачи линейного программирования, $Q_k^- = Q_k(\vec{x}_k^*) = \min\limits_{\vec{x} \in D_x} Q_k(\vec{x}), \quad k = \overline{1,s}$.

***Пример 3.*** Рассмотрим числовую задачу из примера 1, где было задано

| $x$ / $Q_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | 21 | 9 | 5 | 9 | 21 | 41 |
| $Q_2$ | 17 | 10 | 5 | 2 | 1 | 2 |

, $Q_1^- = 5$, $x_1^* = 2$, $Q_2^- = 1$, $x_2^* = 4$.

По этим данным построим матрицу из величин $C_{lk}$, произведя соответствующие расчеты:

$$C_{12} = \frac{Q_2^- - Q_2(x_1^*)}{Q_2^-} = \left| \frac{1-5}{1} \right| = 4,$$

$$C_{21} = \frac{Q_1^- - Q_1(x_2^*)}{Q_1^-} = \left| \frac{5-21}{5} \right| = \frac{16}{5}.$$

В результате будет получена матрица, имеющая вид:

$$\begin{array}{c|cc|} & Q_1^- & Q_2^- \\ \hline x_1^* & 0 & 4 \\ x_2^* & 16/5 & 0 \end{array}.$$

Далее запишем задачу линейного программирования

$$\begin{cases} L_{\min} = \min\limits_{\vec{v}} \ (v_1 + v_2), \\ 4v_2 \geq 1, \\ \dfrac{16}{5} v_1 \geq 1, \\ v_1, v_2 \geq 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow v_2 = \frac{1}{4}, \ \ v_1 = \frac{5}{16}, \ \ L_{\min} = \frac{9}{16}.$$

Используя решение задачи линейного программирования, определим эффективную точку заданной функции:

$$\min_{x \in D_x} F(\vec{Q}) = \min_{x \in D_x} \ (w_1^* \, Q_1(\vec{x}) + w_2^* \, Q_2(\vec{x})).$$

Минимум этой функции достигается в точке

$$x^* = \frac{4(2w_1^* + w_2^*)}{4w_1^* + w_2^*}.$$

Для определения $x^*$ первоначально из формулы (1.6) находим

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{v_1}{v_1 + v_2} = \dfrac{5/16}{9/16} = \dfrac{5}{9}, \\ w_2 = \dfrac{v_2}{v_1 + v_2} = \dfrac{4/16}{9/16} = \dfrac{4}{9}, \end{cases}$$

а из зависимости (1.7) рассчитаем

$$\begin{cases} \widetilde{w}_1 = \dfrac{w_1}{Q_1^-} = \dfrac{5/9}{5} = \dfrac{1}{9}, \\ \widetilde{w}_2 = \dfrac{w_2}{Q_2^-} = \dfrac{4/9}{1} = \dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

По формуле (1.8) находим $w_1^*$ и $w_2^*$:

$$w_1^* = \frac{\widetilde{w}_1}{\widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2} = \frac{1/9}{5/9} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$w_2^* = \frac{\widetilde{w}_2}{\widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2} = \frac{4/9}{5/9} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

По результатам сделанных расчетов минимум функции достигается в точке

$$x^* = \frac{4(2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8)}{4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8} = 3.$$

**Способ 4.** Информация, содержащаяся в матрице (1.5) может быть использована для выбора весовых коэффициентов следующим образом.

Рассмотрим $k$-й столбец матрицы, где указаны относительные значения $k$-го критерия, достигнутые при оптимальных решениях, $\vec{x}_l$ других критериев. Если в $k$-м столбце все элементы невелики, то есть $Q_k(\vec{x}_l^*)$ мало отличаются от оптимального значения $k$-го критерия, то значение весового коэффициента $w_k$ может быть взято небольшим по величине. Если в $k$-м столбце значения $Q_k(\vec{x}_l^*)$ сильно отличаются от $Q_k^*$, то есть элементы $C_{lk}$ имеют большие значения, то весовой коэффициент должен быть взят большим. На этих соображениях основан следующий способ выбора весовых коэффициентов.

Для каждого столбца матрицы (1.5) находим максимальный и минимальный (ненулевой) элементы:

$$\alpha_k = \max_{1 \le i \le S} \{C_{ik}\},$$

$$\mu_k = \min_{\substack{1 \le i \le S \\ C_{ik} \ne 0}} \{C_{ik}\}.$$

Вычисляется разность между экстремальными элементами $k$-го столбца:

$$[\gamma_k = \alpha_k - \mu_k],$$

и значения весовых коэффициентов выбираются пропорционально полученным значениям $\gamma_k$ по формуле

$$w_k = \frac{\gamma_k}{\sum_{i=1}^{s} \gamma_i}, \quad k = 1,2,\dots,s/.$$

***Пример 4.*** Дана матрица из величин $C_{lk}$

$$\|C_{lk}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5/34 & 1 \\ 1 & 0 & 46 & 1 \\ 1 & 7/8 & 0 & 1 \\ 1 & 9/10 & 6/34 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда $\gamma_1, \gamma_4 = 0$, $\gamma_2 = 1/8$, $\gamma_3 = 1/34$ и соответственно вектор $\vec{w}$ будет определен как $\vec{w} = (0; 0{,}81; 0{,}19; 0)$.

**Способ 5.** *Назначение весовых коэффициентов по численным значениям попарных приоритетов.* В некоторых случаях информация о важности частных критериев оптимальности может быть задана по бальной шкале в виде числовых оценок приоритетов $\mu_{ij}$ между двумя частными критериями $Q_i$ и $Q_j$.

Пусть ЛПР задал дискретный ряд значений бальных оценок, например $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, и определил по этой шкале сравнительную важность двух критериев оптимальности $Q_i$ и $Q_j$ следующим образом:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \delta/\alpha - \text{подавляющая важность } Q_i \text{ по сравнению с } Q_j, \\ \gamma/\alpha - Q_i \text{ имеет значительно большую важность, чем } Q_j, \\ \beta/\alpha - Q_i \text{ имеет большую важность, чем } Q_j, \\ \alpha/\alpha - Q_i \text{ и } Q_j \text{ примерно равны по важности.} \end{cases}$$

$$\mu_{ji} = 0.$$

При этом чаще всего $\alpha$=1.

По имеющейся информации о степени предпочтения по важности каждой пары частных критериев оптимизации составлена матрица размером $S \times (S+1)$, каждый элемент которой образуется следующим образом: в $i$-ю строку на место $j$-го столбца ставится числитель оценки $\mu_{ij}$, а в $j$-ю строку на место $i$-го столбца – 1

В последнем $(S+1)$ столбце матрицы для каждой строки находится сумма оценок по столбцам $S_k$, которая характеризует суммарную важность $k$-го критерия относительно всех остальных частных критериев.

Очевидно, что частным критериям, имеющим большую суммарную оценку $S_k$, должен соответствовать больший весовой коэффициент $w_k$. Это предположение позволяет находить весовые коэффициенты $w_i$ по следующей формуле:

$$w_i = \frac{S_i}{\sum_{k=1}^{s} S_k}, \quad i = 1.2, ..., s.$$

***Пример 5.*** Имеется векторный критерий $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$. Предположим, что по бальной шкале (1,3,7,14) ЛПР указал следующие числовые оценки приоритетов:

$$\mu_{12} = 14/1, \quad \mu_{13} = 3/1, \quad \mu_{14} = 1/1,$$
$$\mu_{23} = 1/1, \quad \mu_{24} = 7/1, \quad \mu_{34} = 14/1.$$

Матрица имеет вид:

$$\begin{array}{c|cccc|c|}
 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & S \\
Q_1 & 0 & 14 & 3 & 1 & 18 \\
Q_2 & 1 & 0 & 1 & 7 & 8 \\
Q_3 & 1 & 1 & 0 & 14 & 16 \\
Q_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3
\end{array}.$$

Из матрицы получаем численные значения весовых коэффициентов, определяющие относительную важность каждого частного критерия оптимальности: $w_1 = 0{,}39$, $w_2 = 0{,}2$, $w_3 = 0{,}34$, $w_4 = 0{,}07$.

**Способ 6.** *Метод экспертных оценок для выбора весовых коэффициентов. Алгоритм индивидуальной экспертизы* заключается в систематической проверке суждений об отношениях предпочтения для оцениваемых критериев $Q_i$ $(i = 1,2,...,s)$ путем последовательных сравнений и состоит из следующих этапов

*Этап* 1. ЛПР осуществляет ранжировку частных критериев в порядке убывания их предпочтительности, перенумеровывая критерии: $Q_1 \succ Q_2 \succ \ldots \succ Q_s$

*Этап* 2. Критерию $Q_s$ присваивается оценка $\mu_s = 1$. После чего ЛПР назначает другие величины $\mu_i$, которые отражают его суждения об относительной важности частных критериев оптимальности.

*Этап* 3. Строится таблица вариантов логического выбора.

| | 1 | 2 | … | $S-2$ |
|---|---|---|---|---|
| Вариант | $Q_1 \cup Q_2 + \ldots + Q_s$ | $Q_2 \cup Q_3 + \ldots + Q_s$ | | $Q_{s-2} \cup Q_{s-1} + Q_s$ |
| | $Q_1 \cup Q_2 + \ldots + Q_{s-1}$ | $Q_2 \cup Q_3 + \ldots + Q_{s-1}$ | | |
| | ......................... | ......................... | ……………….. | |
| | $Q_1 \cup Q_2 + Q_3$ | $Q_2 \cup Q_3 + Q_4$ | | |

Лицу, принимающему решение, предлагается рассмотреть столбцы с первого по $S-2$ сверху вниз и зафиксировать свои суждения при помощи отношений предпочтения $\prec$ или $\succ$, ставя их вместо знака $\cup$.

Если левая часть одного из вариантов какого-либо столбца предпочтительнее правой или эквивалентна, то переходим к первому варианту следующего столбца и так далее до последнего столбца.

*Этап* 4. ЛПР предлагается проставить оценки $\mu_i$ в таблицу. Если обнаруживается несоответствие, то оценки $\mu_i$ изменяются в минимально возможной степени так, чтобы достигнуть соответствия с решениями, зафиксированными в таблице. Проверка таблицы начинается с нижней строки последнего столбца.

*Этап* 5. По уточненным данным оценок $\mu_i$ вычисляются весовые коэффициенты.

$$w_i = \frac{\mu_i}{\sum_{k=1}^{s} \mu_k}, \quad i = 1,2,...,s.$$

***Пример* 6.** Пусть имеется 5 частных критериев, которые ЛПР расположил в порядке убывания важности и указал следующие оценки важности:

$$\begin{array}{c|ccccc} Q_i & Q_1 \succ & Q_2 \succ & Q_3 \succ & Q_4 \succ & Q_5 \\ \hline \mu_i & 7 & 4 & 2 & 1{,}5 & 1 \end{array}.$$

Таблица вариантов имеет следующий вид:

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 1) $Q_1 \cup Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$<br>2) $Q_1 \cup Q_2 + Q_3 + Q_4$<br>3) $Q_1 \cup Q_2 + Q_3$ | 4) $Q_2 \cup Q_3 + Q_4 + Q_5$<br>5) $Q_2 \cup Q_3 + Q_4$ | 6) $Q_3 \cup Q_4 + Q_5$ |

Лицо, принимающее решение, высказал следующие суждения:

1) $Q_1 \prec Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$;
2) $Q_1 \prec Q_2 + Q_3 + Q_4$;
3) $Q_1 \succ Q_2 + Q_3$ - переходим к первому варианту столбца 2;
4) $Q_2 \prec Q_3 + Q_4 + Q_5$;
5) $Q_2 \succ Q_3 + Q_4$ - переходим к столбцу 3;
6) $Q_3 \succ Q_4 + Q_5$.

Проверка (этап 4):

6) $\mu_3 \succ \mu_4 + \mu_5$ $2 \succ 1{,}5 + 1 = 2{,}5$ - несоответствие, увеличиваем $\mu_3$ до =3;
5) $\mu_2 \succ \mu_3 + \mu_4$ $4 \succ 3 + 1{,}5 = 4{,}5$ - несоответствие, увеличиваем $\mu_2 = 5$;
4) $\mu_2 \prec \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$ $5 \prec 3 + 1{,}5 + 1 = 5{,}5$ - соответствие;
3) $\mu_1 \succ \mu_2 + \mu_3$ $7 \succ 5 + 3 = 8$ - несоответствие, увеличиваем $\mu_1 = 8{,}5$;
2) $\mu_1 \prec \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ $8{,}5 \prec 5 + 3 + 1{,}5 = 9{,}5$ - соответствие.

Получаем уточнение оценки:

| $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_{31}$ | $\mu_4$ | $\mu_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 8,5 | 5 | 3 | 1,5 | 1 |

$\Rightarrow$ весовые коэффициенты

| $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,45 | 0,26 | 0,16 | 0,07 | 0,06 |

.

**Способ 6 (продолжение).** Далее при помощи рассмотренной процедуры каждый из $N$ экспертов определяет значения $w_{ik}$, $i = 1,2,...,s$, $k = 1,2,...,N$, которые можно свести в матрицу экспертных оценок:

$$W = \begin{Vmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{S1} & w_{S1} & \cdots & w_{SN} \end{Vmatrix}.$$

Простейший способ получения групповой оценки - это условие, что все эксперты равны, при этом вычисляются средние оценки

$$w_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} w_{ik}\ ,\ \ i = 1,2,...,s\ .$$

Однако на практике эксперты отличаются компетентностью, объективностью и информированностью. Для учета этих факторов введем *весовые коэффициенты компетентности экспертов* $q_k$ ($k = 1,2,...,N$).

Тогда оценки вычисляются так:

$$w_i = \sum_{k=1}^{N} q_k w_{ik}\ ,\ \ i = 1,2,...,s\ .$$

Численные значения коэффициентов компетентности $q_k$ могут быть получены по информации о том, насколько оценки $k$-го эксперта согласованы с оценками других экспертов. Для этого мы можем использовать следующую итерационную процедуру.

Начальное значение вектора компетентности $\vec{q}^{\,0}$ выбирается из условия, что все эксперты равноправны:

$$\vec{q}^{\,0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} \\ \cdots \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix}.$$

Последующие итерации выполняются по формулам:

$$\begin{cases} \vec{w}^{\,r} = W\,\vec{q}^{\,r-1}\ , \\ (\vec{q}^{\,r})^T = \dfrac{1}{Z^r}(\vec{w}^{\,r})^T W, \\ Z^r = \displaystyle\sum_{i=1}^{S}\sum_{k=1}^{N} w_i^r w_{ik}\ , (\,r = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

После нескольких итераций при выполнении условия $\max\limits_{1\le i\le S}\left|w_i^r - w_i^{r-1}\right| \le \xi$ получается групповое решение о значениях коэффициентов $w_i^r$, $i = 1,2,...,s$ с учетом компетентности экспертов.

***Пример 7.*** Пусть имеем матрицу оценок, созданную $N$ экспертами:

$$W = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \frac{N}{i} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.45 & 0.1 & 0.6 \\ 2 & 0.26 & 0.15 & 0.2 \\ 3 & 0.16 & 0.05 & 0.1 \\ 4 & 0.07 & 0.3 & 0.05 \\ 5 & 0.06 & 0.5 & 0.05 \\ \hline \end{array} \right\|.$$

При предположении равноправности всех экспертов ($N$=3) для вектора коэффициентов компетентности можно записать

$$\vec{q}^{\,0} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Тогда на 1-м шаге получаем следующие средние оценки для весовых коэффициентов $w_i$:

$$\vec{w}^{1} = W\,\vec{q}^{\,0} = \begin{vmatrix} 0.45 & 0.1 & 0.6 \\ 0.26 & 0.15 & 0.2 \\ 0.16 & 0.05 & 0.1 \\ 0.07 & 0.3 & 0.05 \\ 0.06 & 0.5 & 0.05 \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.20 \\ 0.10 \\ 0.14 \\ 0.20 \end{pmatrix}.$$

Пересчитаем вектор коэффициентов компетентности с учетом полученных значений $\vec{w}^1$. Для этого вычислим вектор $(\vec{w}^1)^T W = \begin{pmatrix} 0.29 & 0.22 & 0.30 \end{pmatrix}$ и получим, что $Z^1 = 0.81$. Тогда $(\vec{q}^{\,1})^T = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.27 & 0.37 \end{pmatrix}$. Следовательно

$$\vec{w}^2 = W\,\vec{q}^{\,1} = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.20 \\ 0.10 \\ 0.12 \\ 0.17 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляем $(\vec{w}^2)^T W,\ Z^2$, получаем $(\vec{q}^{\,2})^T = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.26 & 0.39 \end{pmatrix}$.

$$\vec{w}^3 = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.20 \\ 0.11 \\ 0.12 \\ 0.17 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая $\vec{w}^3$ и $\vec{w}^2$, видим, что с точностью до $\xi = 0{,}01$ получена групповая оценка для весовых коэффициентов $\vec{w}$ при условии, что компетентность экспертов оценивается вектором $(\vec{q}^{\,2})^T = \begin{pmatrix}0.35; & 0.26; & 0.39\end{pmatrix}$.

## 1.5. Многокритериальная оптимизация в задачах проектирования, оценки подвижности, конкурентоспособности и диагностике автотракторной техники

Изложенные теоретические основы оптимизации раскрывают существо вопроса, связанного с поиском рационального решения поставленной задачи. Одной из областей применения математических методов оптимизации является транспортно-технологическое машиностроение и в частности его наиболее крупная отрасль – автотракторостроение. Другой областью использования показанных математических методов является эксплуатация подвижного состава транспортно-технологических машин, которая охватывает все области производственной деятельности человека. В связи с чем можно обозначить круг главных задач, связанных с производством и эксплуатацией автотракторной техники, в которых целесообразно приложение методов поиска оптимального решения (см. рис.1.2).

В задачах конструкционного проектирования автотракторной техники методы поиска оптимального (рационального) варианта конструкции использовались практически всегда. Однако на ранних этапах поиски оптимальной конструкции разрабатываемого автотракторного средства носили чисто интуитивный характер и во многом зависели от квалификации конструктора и возможности качественного и оперативного проведения лабораторно-полевых испытаний разработанных опытных образцов. Поэтому процесс проектирования новых автотракторных средств и совершенствование существующих конструкций машин затягивалось на многие годы.

Появление вычислительных машин позволило внедрить в практику проектирования методики сложных прочностных расчетов и совместить их с математическими методами поиска оптимальных решений, что позволило сократить сроки проектирования и уменьшить число испытаний.

В основном задачи оптимального конструкционного проектирования машин носят *однокритериальный характер* и направлены на отыскание оптимального размера критического сечения элемента (детали) конструкции автотракторного средства при наличии ряда ограничивающих условий как по компоновочной схеме машины, так и по нагрузочным режимам. Иначе говоря, задача конструкционной оптимизации ставится следующим образам: *для заданных эксплуатационных условий и выбранных режимов движения определить оптимальное конструкционное решение.* Однако, как будет показано во второй главе, с точки зрения оценки подвижности автотракторной техники, такая задача носит многокритериальный характер.

Совершенствование электронно-вычислительных машин и разработка мощных математических методик проведения научных и опытно-конструкторских исследований (математическое моделирование) позволило поставить проектирование автотракторной техники на новый более качественный уровень, то есть на стадии проектирования математически решать задачи выбора рациональной (оптимальной) концепции создаваемой машины, что напрямую связано с подвижностью машины и ее конкурентоспособностью (см. раздел. 3.3)

Применению метода векторной оптимизации с использованием аддитивного обобщенного критерия (см. раздел 1.2.5.) посвящены вторая и первая главы книги. Во второй главе рассматривается задача подвижности автотракторной техники. Задача подвижности машины формулируется как

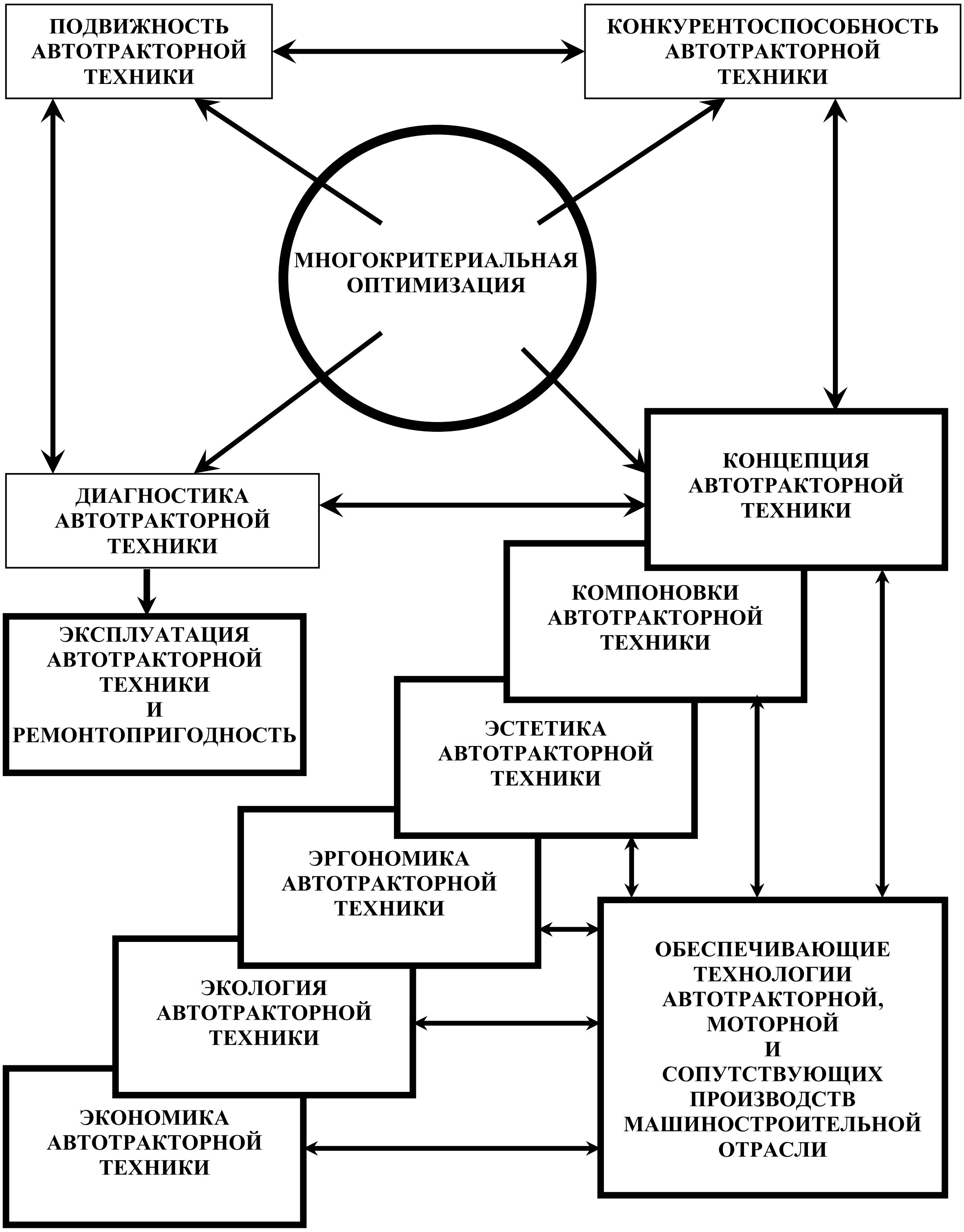


Рис. 1.2. Взаимосвязи методов многокритериальной оптимизации и основных характеристик автотракторной техники

пятикритериальная, где частные критерии зависят от некоторых обобщенных величин, составляющих аргументы рассматриваемых целевых функций. В качестве аргументных обобщенных величин используются параметры и характеристики, описывающие конструкцию машины, ее эксплуатационные свойства и режимы движения. В связи с этим формулируются четыре постановки задачи оценки подвижности:

- во-первых, *в заданных условиях эксплуатации при принятых режимах движения определить оптимальную конструкционную конфигурацию машины;*
- во-вторых, *при заданных конструкционной конфигурации машины и условиях эксплуатации определить оптимальные режимы ее движения;*
- в-третьих, *при заданной конструкционной конфигурации машины и выбранных режимах ее движения определить критические (оптимальные) условия эксплуатации;*
- в-четвертых, *определить экстремумы обобщенных целевых функций автотракторных средств как показателей их подвижности и провести их сравнение с целью поиска наилучшего варианта.*

Последняя задача граничит с задачей оценки конкурентоспособности автотракторной техники. Однако в отличие от задачи подвижности, задача оценки конкурентоспособности опирается на неограниченное множество частных целевых функций, включая и такие, которые описывают не только конструкционные, эксплуатационные и режимные показатели, но и экономические, технологические и потребительские свойства автотракторной техники. В целом задача конкурентоспособности формулируется следующим образом: *определить оптимальные конструкционные, эксплуатационные, технологические, экономические и потребительские свойства с целью достижения наивысшей конкурентоспособности вновь создаваемой и модернизируемой автотракторной техники.* Однако определение обобщенной целевой функции, описывающей оценку конкурентоспособности автотракторной техники, может производиться и для сравнения качества двух и более образцов машин. При этом задача формулируется таким образом: *определить оптимальные значения обобщенных целевых функций, описывающих конкурентоспособность автотракторных средств с целью их качественного сравнения.*

Никакая конкурентоспособная машина не сможет обладать достаточной подвижностью без грамотной ее эксплуатации. Достижение этого связано со своевременным проведением технического обслуживания и ремонтов. На сегодняшний день основой постановки машины на техническое обслуживание являются косвенные показатели (пробег машины) или физическое разрушение систем, агрегатов, узлов и деталей машины. В ряде случаев дефектное состояние автотракторной техники приводит не только к экономически невыгодной эксплуатации машины, но к вредным экологическим последствиям (ЭП) и дорожно-транспортным происшествиям (ДТП). Основой грамотной эксплуатации и эффективного функционирования автотракторной техники является своевременная ее диагностика. Наиболее выгодной формой является *бортовая диагностика* автотракторных средств. Она позволяет не только своевременно предупредить о необходимости обслуживания или ремонта, но и в ходе активной эксплуатации настраивать системы, агрегаты и узлы машины на оптимальную их работу.

Четвертая и пятая главы посвящены рассмотрению создания оптимальной системы бортовой диагностики сложных технических систем, включая и автотракторную технику. Задачи создания надежных диагностических систем сложных технических объектов решаются с применением методов оптимизации и в частности многокритериальной (см. гл. 4). В общем случае задача формулируется следующим образом: *определить оптимальное число точек контроля диагностируемого объекта из условия полного распознавания дефектов с учетом минимизации затрат на создание диагностической системы.* Однако для автотракторной техники изложенная постановка задачи несколько усложняется (см. гл. 5.): *определить оптимальную совокупность считываемых параметров и характеристик с каждой точки контроля для оценки подвижности и работопригодности автотракторного средства при оптимальном количестве точек контроля с точки зрения распознавания дефектов любой кратности и минимизации затрат на создание системы бортовой диагностики разрабатываемой машины..*

На необходимость интенсифицировать работы в области создания современной бортовой диагностики для отечественных автомобилей и тракторов, а также созданных на их базе транспортно-технологических машин, указывает тот факт, что большинство из зарубежных автотракторных фирм в своих новейших конструкциях закладывают сложнейшие системы бортовой диагностики. В некоторых случаях пробные разработки выходят на уровень создания систем диагностики и управления с использованием идей и методов, закладываемых в конструкции искусственного интеллекта. По данным Лаборатории параллельных информационных технологий НИВЦ МГУ специалисты фирмы FORD и Jet Propulsion Laboratory (NASA) разработали чип, основанный на идее нейронных сетей, который позволяет за счет диагностики сгорания топлива уменьшить как расход топлива, так и объем вредных выбросов в выхлопных газах, помогая достижению самых жестких экологических норм. Данный чип способен оказать серьезную конкуренцию традиционным методам бортовой диагностики. Особенно важно, что фирма FORD планирует оснастить подобными чипами свои автомобили без дополнительного увеличения их стоимости.