Д.А. Петренко, А.Д. Петренко

Донецкий национальный технический университет

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Традиционно актуальной в экономике остается проблема организации и планирования производственной деятельности. Столь ценимая ранее «предпринимательская способность», в настоящее время вытесняется «аналитической способностью». Для успешной деятельности уже недостаточно предположений основанных на интуиции или личном опыте предпринимателя, сегодня необходимы тщательный анализ и прогнозирование, подкрепленные соответствующими математическими расчетами.

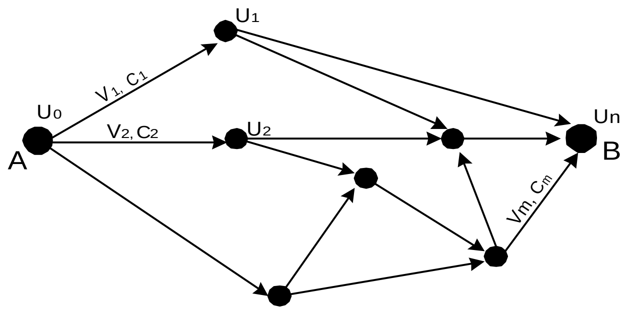
Несмотря на то, что методы математического программирования разработаны достаточно хорошо, на практике они применяются сравнительно редко. Это связано с тем, что экономисты либо ставят под сомнение значимость теоретических методов, либо не применяют их из-за кажущейся сложности.

Как известно, эффективность оптимизационных методов, прежде всего, зависит от качества математической модели экономического процесса. Чем точнее модель, тем меньше вероятность ошибок при реальном проектировании. Качественная математическая модель должна учитывать множество факторов, однако при этом соответствующие расчеты значительно усложняются.

Одним из способов реализации даже весьма сложных факторных моделей представляется метод, основанный на использовании ориентированных графов в которых вершины соответствуют состоянию процесса, а дуги – преобразованиям между этими состояниями. К настоящему времени для обработки графов созданы довольно мощные алгоритмы, что, в свою очередь, обусловливает высокую эффективность их использования при разработке и расчетов сложных моделей экономических задач.

В качестве примера, рассмотрим процесс материального производства, в результате которого из продукта A посредством конечного числа технологических операций создается продукт B. В общем случае производство одного и того же продукта, может быть осуществлено различными способами, которые могут отличаться количеством операций, их последовательностью, стоимостью, временем выполнения, степенью надежности и т.п.

Для моделирования, каждое возможное промежуточное состояние продукта можно представить в виде вершины графа, а операцию, соответствующую переходу в это состояние - дугой. Каждую дугу (технологическую операцию) взвесим, т.е. присвоим ей какое-либо числовое значение. Это может быть стоимость технологической операции, время ее выполнения, надежность исполнения, производительность и т.п. Схематически граф модели представлен на рисунке.



Здесь U_i – вершины (промежуточные состояния) ($i \in 1..n$), V_j – дуги (технологические операции) ($j \in 1..m$).

Допустимым решением задачи является некоторый путь из U_0 в U_n, представляющий собой множество R – k целых чисел R_t – номеров вершин пути.

В рамках такой модели могут быть решены, например, следующие задачи оптимизации:

1. минимизация стоимости производства;
2. минимизация количества технологических операций при заданных затратах;
3. максимизация общей надежности процесса.

Математические модели этих задач выглядят следующим образом.

Решением задачи 1 будет минимум следующей целевой функции:

$$\sum_{t=1}^{k} c_{R_t} \Rightarrow \min,$$

где c_{R_t} – стоимость технологической операции.

Он обеспечивается на кратчайшем пути R, который может быть найден, например, с помощью алгоритма Дейкстры или его разновидностей. Его достоинством является квадратичная сложность, что позволяет на современных ЭВМ за несколько минут получать точное решение для графа с несколькими тысячами вершин.

Решение задачи 2, сводится к нахождению всех путей стоимостью <= M, и последующему выделению пути, содержащего минимальное количество вершин:

$$\sum_{t=1}^{k} c_{R_t} \le M,\ k \Rightarrow \min$$

Решением задачи 3 является путь, максимизирующий общую надежность системы

$$\prod_{t=1}^{k} p_{R_t} \Rightarrow \max,$$

где p_{R_t} – надежность выполнения операции.

Для нахождения соответствующего пути, можно воспользоваться модификацией алгоритма Дейкстры: находить кратчайший путь не по сумме длин его составляющих, а по их произведению.

Подобным образом могут быть поставлены и решены многие другие и более сложные задачи математического программирования.