МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра ЕОМ

Метод Пікара та його застосування для паралельного вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь

Ігор І. Терзі

Група СП-00н

Донецьк, 2003р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Значне зростання складності інженерних проблем, які виникають при виробництві, та доступність комп'ютерних ресурсів зробили комп'ютерне моделювання дуже важливим та широко використовуваним інструментом як для наукових досліджень, так і для інженерного проектування. Оскільки багато задач для моделювання описуються як системи диференціально-алгебраїчних рівнянь, то питанню ефективного розв'язування цього класу задач присвячується багато досліджень. Одним з напрямків цих досліджень є питання паралельного вирішування таких систем. Паралельні системи моделювання використовують одночасно багато обчислювальних елементів, що значно прискорює процес моделювання, а для деяких класів задач навіть є єдино можливим підходом до рішення [1].

Утім слід відзначити, що паралелізація вирішування систем диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь не є тривіальною задачею, тобто потребує використання існуючих та створення нових чисельних методів, які принципово відрізняються від методів, що застосовуються при послідовному вирішуванні. Ці методи мають бути орієнтовані на паралельне вирішування та враховувати особливості паралельних обчислювальних систем, які будуть використовуватися для вирішування.

Мета цієї роботи – розглянути один із існуючих методів, а саме метод Пікара та його модифікацію – метод хвильової релаксації для паралельного вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь.

Метод Пікара, також відомий як метод послідовного наближення або послідовної підстановки [2-4], був запропонований як ітеративний метод для вирішування диференціальних рівнянь. Він є узагальненням методу послідовних наближень, який застосовується для вирішування алгебраїчних рівнянь [4]. Цей метод також придатний для вирішування систем диференціальних рівнянь. Основні зведення щодо методу Пікара наведені у першому розділі даної роботи.

Своєрідним поєднанням методу Пікара та звичайних ітераційних методів вирішування диференціальних рівнянь є метод хвильової релаксації (Waveform Relaxation) [5-8]. Він становить собою релаксаційний ітеративний метод для числового паралельного вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь. Інформацію щодо метода хвильової релаксації та переваг і недоліків його використання для паралельного вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь можна знайти у другому розділі роботи.

1 МЕТОД ПІКАРА ДЛЯ ВИРІШУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Метод Пікара

Загальні відомості про метод Пікара, які наведені нижче, можна знайти у підручнику [2].

Нехай дано рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.1}$$

права частина якого у деякій області

$$G(x, y): \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\} \tag{1.2}$$

безперервна та має безперервну часткову похідну по y. Треба знайти рішення рівняння (1.1), яке задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Інтегруючи обидві частини рівняння від x_0 до x, отримаємо:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y) dx,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y) dx,$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y) dx. \tag{1.4}$$

Рівняння (1.1) замінюється інтегральним рівнянням (1.4), в якому невідома функція y знаходиться під знаком інтегралу. Інтегральне рівняння (1.4) задовольняє диференціальному рівнянню (1.1) та початковим умовам (1.3). Дійсно:

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y) dx = y_0.$$

Замінюючи у рівняння (1.4) функцію y деяким початковим значенням y^0, отримаємо перше наближення:

$$y^1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^0) dx.$$

Далі у рівнянні (1.4) замінюємо y знайденим значенням y^1 та отримаємо друге наближення:

$$y^2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^1) dx$$

Продовжуючи процес послідовного приближення далі, послідовно знаходимо:

$$y^3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^2)dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{n-1})dx.$$

Таким чином, отримаємо послідовність із n функцій (де n – кількість ітерацій методу Пікара), які будемо називати послідовними наближеннями:

$$y^1(x), y^2(x), y^3(x), \ldots, y^n(x),$$

де кожна із цих функцій залежить від попередньою та знаходиться згідно і ітераційною формулою:

$$y^k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{k-1})dx, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Для того, щоб знайти перше наближення $y^1(x)$, треба мати якесь початкове наближення. Існує декілька способів знаходження цього наближення [3]. Говорячи взагалі, в якості початкового наближення треба вибирати будь-яку функцію, достатньо близьку до точного рішення y. Звичайно в якості початкового наближення вибирають пряму:

$$y^0 = y(x_0). \tag{1.6}$$

Як показано у [3], знайдені послідовні наближення геометрично уявляють собою криві $y^k(x), k = \overline{1;n}$, які проходять через спільну точку $M_0(x_0, y_0)$ (Рисунок 1.1).

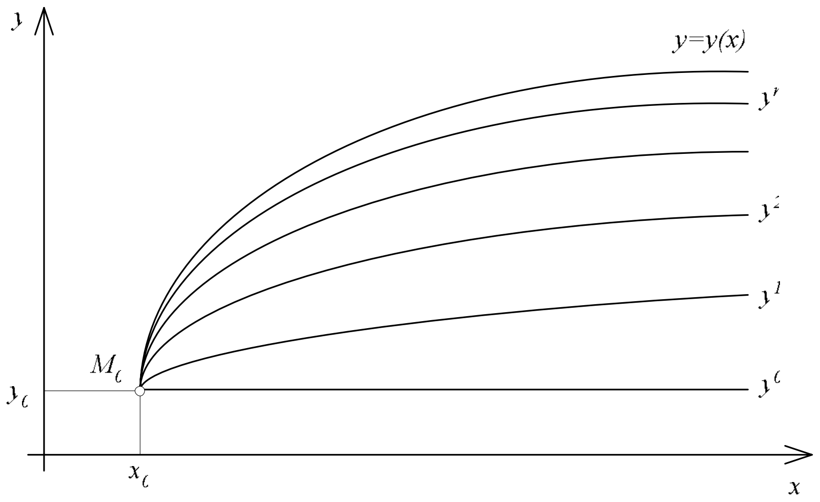

Рисунок 1.1 – Геометричне уявлення послідовних приближень

1.2 Збіжність методу та оцінка погрішності

Згідно з [4], збіжність методу Пікара можна довести так, як показано нижче.

Припустимо, що права частина вихідного рівняння (1.1) на області (1.2) безперервна та задовольняє по y умові Ліпшица:

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right| . \qquad (1.7)$$

Позначимо погрішність наближеного рішення на k-ому кроці через

$$z^k(x) = y^k(x) - y(x). \qquad (1.8)$$

Віднімаючи (1.4) із (1.5), отримаємо:

$$y^k(x) - y(x) = \int_{x_0}^{x} f\left(x, y^{k-1}\right) dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y) dx, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

що еквівалентно:

$$y^k(x) - y(x) = \int_{x_0}^{x} \left(f\left(x, y^{k-1}\right) - f(x, y) \right) dx .$$

З іншого боку, використовуючи умову Ліпшица (1.7), отримаємо:

$$\int_{x_0}^{x} \left| f\left(x, y^{k-1}\right) - f(x, y) \right| dx \le \int_{x_0}^{x} L \left| y^{k-1}(x) - y(x) \right| dx = L \int_{x_0}^{x} \left| y^{k-1}(x) - y(x) \right| dx ,$$

Комбінуючи два попередні рівняння та нерівність із (1.8), отримаємо:

$$\left| z^k(x) \right| \le L \int_{x_0}^{x} \left| z^{k-1}(x) \right| dx .$$

Вирішуючи це рекурентне співвідношення і беручи до уваги (1.2), знайдемо послідовно:

$$\left| z^1(x) \right| \le bL(x - x_0),$$

$$\left| z^2(x) \right| \le \frac{1}{2} bL^2 (x - x_0)^2,$$

....

$$\left| z^k(x) \right| \le \frac{1}{k!} bL^k (x - x_0)^k,$$

....

Звідси та із (1.2) випливає оцінка погрішності на k-ому кроці на всьому проміжку вирішування:

$$\max \left| z^k(x) \right| \le \frac{b}{k!} (aL)^k \approx \frac{b}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{eaL}{k} \right)^2 . \qquad (1.9)$$

Можна побачити, що, якщо $k \to \infty$, то $\max \left| z^k(x) \right| \to 0$, тобто наближене рішення рівномірно сходиться до точного на всій області $G(x, y)$.

1.3 Метод Пікара для вирішування системи диференціальних рівнянь

Як сказано у [3], неважко розвити метод Пікара для системи диференціальних рівнянь. Отже, дана система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y), \qquad (1.10)$$

права частина кожного з яких якого у області (1.2) безперервна та має безперервну частkову похідну по y. Треба знайти рішення системи рівнянь (1.10), яке задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}, \tag{1.11}$$

де

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_m(x) \end{bmatrix}, \quad F(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, \overline{y}) \\ f_2(x, \overline{y}) \\ \dots \\ f_m(x, \overline{y}) \end{bmatrix}, \quad Y(x_0) = \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \dots \\ y_m(x_0) \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Тоді рівняння (1.4) для системи диференціальних рівнянь набуває наступного вигляду:

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, Y)dx,$$

або, беручи до уваги (1.12):

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \dots \\ y_m(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x} f_1(x, \overline{y})dx \\ \int_{x_0}^{x} f_2(x, \overline{y})dx \\ \dots \\ \int_{x_0}^{x} f_m(x, \overline{y})dx \end{bmatrix}.$$

Послідовні наближення $y_l^k(x), l = \overline{1;m}, k = \overline{1;n}$ визначаються згідно з наступною формулою, яка уявляє собою векторне уявлення формули (1.5):

$$Y^k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F\left(x, Y^{k-1}\right)dx, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{1.13}$$

В якості початкового вектора наближень, по аналогії з (1.6), вибирають прямі:

$$Y^0 = Y(x_0). \tag{1.14}$$

Вектор знайдених послідовних наближень геометрично уявляє собою $n \times m$ кривих $y_l^k(x), l = \overline{1;m}, k = \overline{1;n}$, де m - кількість диференціальних рівнянь у системі, а n - кількість ітерацій методу Пікара (Рисунок 1.2).

Неважко розширити доказ збіжності методу та оцінки погрішності (1.9) для вирішування системи диференціальних рівнянь. В цьому випадку погрішність вирішування кожного із рівнянь системи оцінюється згідно з наступною формулою:

$$\max\left|z_l^k(x)\right| \le \frac{b}{k!}(aL)^k \approx \frac{b}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{eaL}{k}\right)^2, \tag{1.15}$$

де l-індекс рівняння у системі рівнянь.

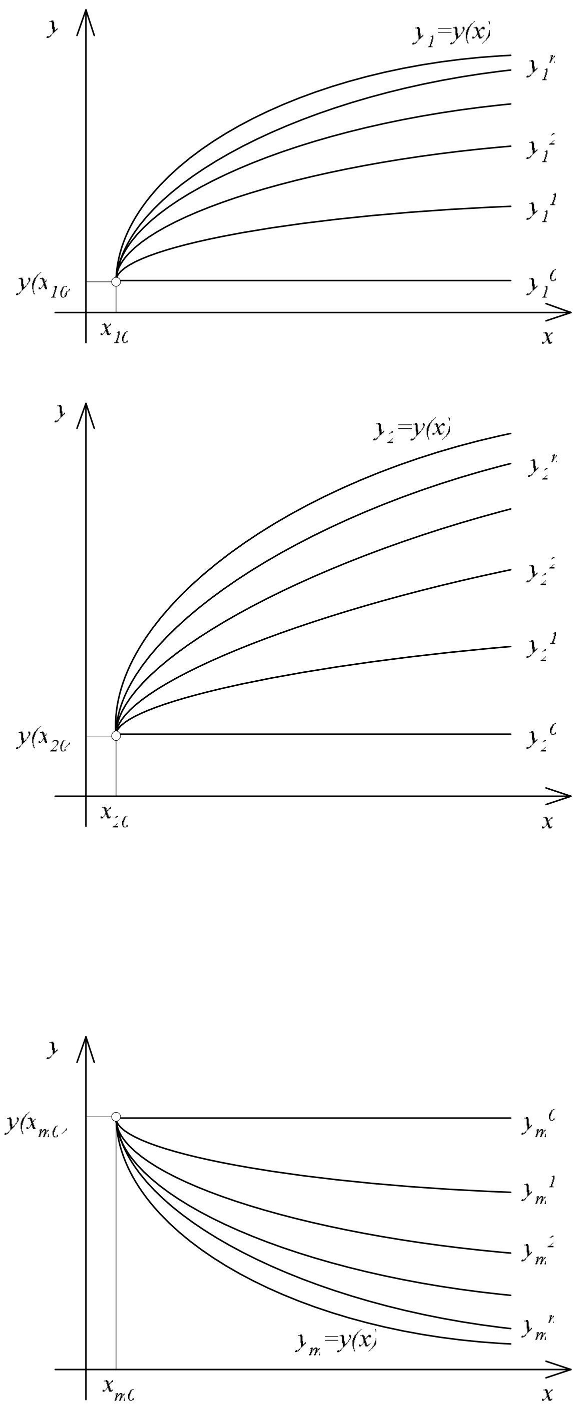

Рисунок 1.2 – Геометричне уявлення рішення системи диференціальних рівнянь

Таким чином, аналізуючи метод Пікара для вирішування систем диференціальних рівнянь, можна сказати, що він є природно паралельним, адже під час кожної з ітерацій методу для обчислення будь-якої з шуканих функцій необхідна лише інформація щодо поведінки інших функцій на попередньої ітерації. Це означає, що на відміну від імплементації звичайних ітераційних методів, де обмін даними між окремими вузлами паралельної обчислювальної системи проводиться після кожного кроку інтегрування, у вирішувачі, створеному із використанням методу Пікара, обмін даними треба проводити лише після кожної ітерації останнього метода. Оскільки цих ітерацій звичайно набагато менше, ніж кроків інтегрування, а обмін даними у паралельних обчислювальних системах є порівняно повільною операцію, застосування методу Пікара може значно прискорити процес вирішування всієї системи.

2 МЕТОД ХВИЛЬОВОЇ РЕЛАКСАЦІЇ – РОЗШИРЕННЯ МЕТОДУ ПІКАРА ДЛЯ ПАРАЛЕЛЬНОГО ВИРІШУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Метод хвильової релаксації

Як було згадано вище, метод Пікара може дати значний приріст швидкості інтегрування системи диференціальних рівнянь за рахунок того, що обмін даними між окремими вузлами паралельної обчислювальної системи треба проводити лише після кожної ітерації методу Пікара, а не після кожного крока інтегрування. Втім на практиці кількість рівнянь звичайно значно перевищує кількість обчислювальних вузлів. Тому логічно модифікувати метод Пікара таким чином, щоб різні рівняння вирішувались на одному обчислювальному вузлі не відокремлено, а разом як система рівнянь.

Метод хвильової релаксації і є цією модифікацією. Суть методу полягає в тому, що система розбивається на підсистеми, кожна з яких інтегрується незалежно. Для вирішування кожної підсистеми на поточній ітерації використовується отримана на попередній ітерації інформація щодо поведінки змінних стану інших підсистем [5]. Далі виконується обмін даними між підсистемами і процес вирішування повторюється із використанням обновленої інформації щодо поведінки змінних стану інших підсистем. Ітерації виконуються, поки не буде досягнута збіжність. Цей метод можна застосовувати як для систем диференціальних, так і систем диференціально-алгебраїчних рівнянь.

Отже, Нехай дана система диференціально-алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = F(X,Y,t), \quad Y(t_0) = Y_0 \\ 0 = G(X,Y,t) \end{cases}, \tag{2.1}$$

де:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \quad F(X,Y) = \begin{bmatrix} f_1(X,Y) \\ f_2(X,Y) \\ \dots \\ f_n(X,Y) \end{bmatrix}, \quad G(X,Y) = \begin{bmatrix} g_1(X,Y) \\ g_2(X,Y) \\ \dots \\ g_m(X,Y) \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Ідея методу полягає в тому що система рівнянь розбивається на підсистеми, кожна з яких вирішується відносно незалежно [6].

Звичайно першим етапом роботи програми, яка використовує метод хвильової релаксації, є розподіл системи з метою визначення, які змінні мають бути згруповані разом та вирішуватися як єдина система рівнянь. Щільно пов’язані змінні мають бути згрупованими разом у підсистеми, в протилежному випадку у системах навіть з декількома щільно пов’язаними змінними алгоритм буде збігатись дуже повільно, тому вдале групування змінних може значно прискорити процес вирішування. Вдалий розподіл – це дуже важка задача. До того ж, якщо забагато змінних згруповані разом, то переваги використання методу хвильової релаксації втрачаються, з іншого боку, якщо щільно пов'язані змінні не будуть згруповані в одній підсистемі, то метод буде збігатися дуже повільно.

Існує декілька підходів до розподілу вихідної системи на підсистеми. Найбільш простим є вимагання до користувача самостійно сформувати підсистеми. Результати такого розподілу не завжди будуть ідеальними, але в деяких системах, наприклад при моделюванні електричних приладів або хімічних процесів, такий підхід зарекомендував себе цілком задовільно.

Отже, після розподілу рівнянь на r підсистем визначеним способом, вихідні вектори змінних складаються з r векторів змінних:

$$Y(t)=\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_1(t) \\ \ldots \\ Y_r(t) \end{bmatrix}, \quad X(t)=\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_1(t) \\ \ldots \\ X_r(t) \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Вектор правих частин рівнянь вихідної системи теж розділяється на r векторів:

$$F(X,Y)=\begin{bmatrix} F_1(X,Y) \\ F_2(X,Y) \\ \ldots \\ F_r(X,Y) \end{bmatrix}, \quad G(X,Y)=\begin{bmatrix} G_1(X,Y) \\ G_2(X,Y) \\ \ldots \\ G_r(X,Y) \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Таким чином, замість однієї системи, маємо r підсистем:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dt} = F_1(X,Y,t), \quad Y_1(t_0) = y_{10} \\ \quad 0 = G_1(X,Y,t) \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{dY_2}{dt} = F_2(X,Y,t), \quad Y_2(t_0) = y_{20} \\ \quad 0 = G_2(X,Y,t) \end{cases} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{cases} \dfrac{dY_r}{dt} = F_r(X,Y,t), \quad Y_r(t_0) = y_{r0} \\ \quad 0 = G_r(X,Y,t) \end{cases} \end{cases}, \tag{2.5}$$

Граф-схема алгоритму роботи вирішувача, створеного із використанням методу хвильової релаксації наведено нижче (Рисунок 2.1).

Перед початком ітераційного процесу встановлюються початкові значення змінних стану. Згідно із (1.14), це прямі:

$$\begin{cases} Y^0(t) = Y(t_0) \\ X^0(t) = X(t_0) \end{cases}. \tag{2.6}$$

Далі починається процес послідовного наближення кривих змінних до точного рішення. Протягом однієї ітерації методу хвильової релаксації підсистеми вирішуються незалежно одна від іншої, обмін даними (тобто інформацією про поведінку змінних на всьому інтервалі інтегрування) проводиться між ітераціями. Це дає можливість паралельного вирішування системи. Тоді, в загальному випадку, кожна підсистема вирішується на окремому вузлі паралельної обчислювальної системи, а обмін даними між вузлами виконується після кожної ітерації алгоритму.

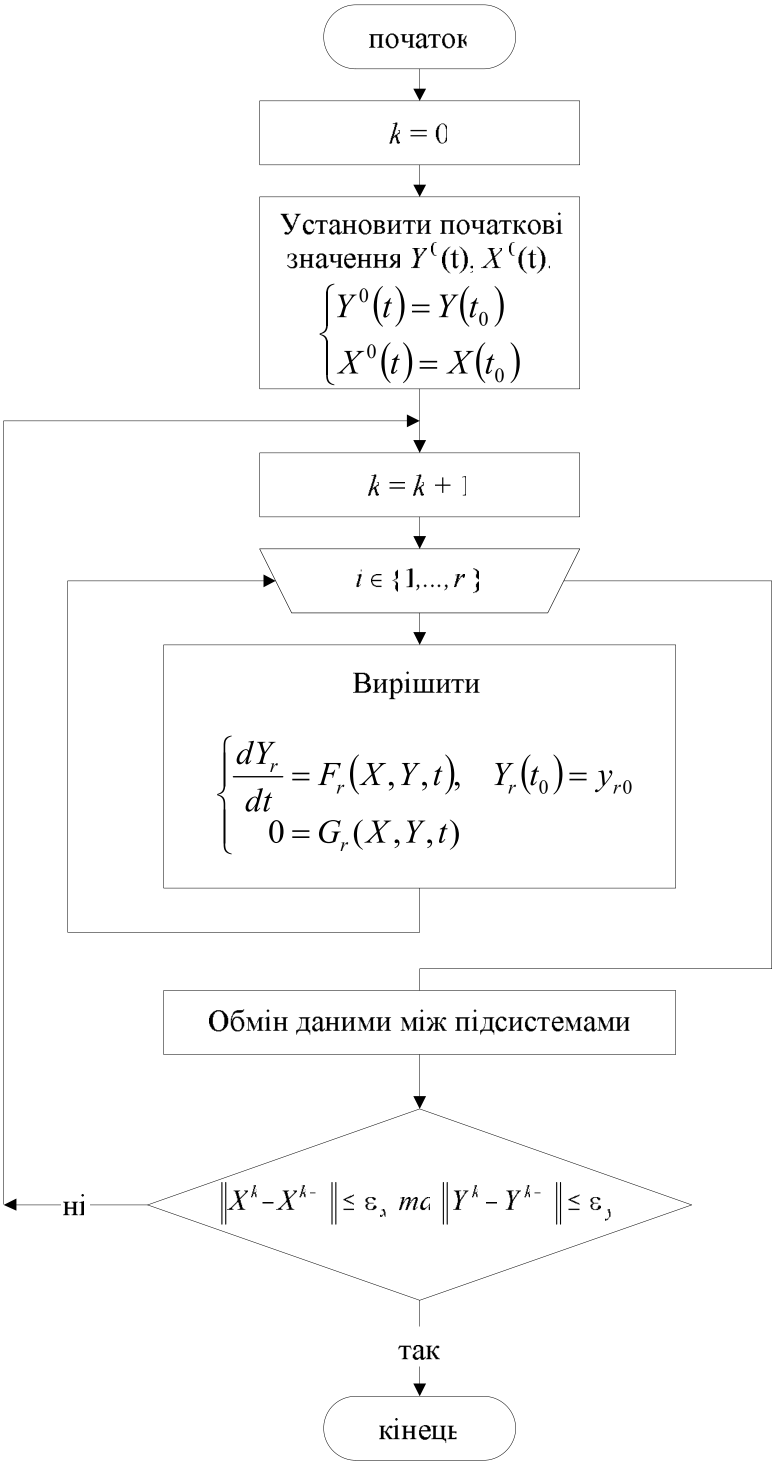

Рисунок 2.1 – Граф-схема алгоритму хвильової релаксації

Відносно незалежне вирішування підсистем дозволяє вибирати часові кроки теж незалежно. Коли для підсистемам вибираються різні кроки, обчислювання значень змінних однієї підсистеми може жадати значення змінних інших підсистем, які не були обчислені того ж самого моменту часу по причині різних часових кроків. Тому це значення повинно бути інтерпольовано. Існує багато методів інтерполяції, але найбільш поширеним методом інтерполяції є лінійна інтерполяція, коли невідоме значення береться на лінії, яка з'єднує найближчі більше та менше значення. Наприклад, якщо відомі $x(t_{i-1}) = x_{i-1}$ та $x(t_i) = x_1$, то шукане

$$x(t) = \left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)(x_i - x_{i-1}) + x_{i-1}, \tag{2.7}$$

де $t_{i-1} \le t \le t_i$. Доведено, що використання лінійної інтерполяції не впливає на збіжність методу хвильової релаксації [5].

Оскільки кожна ітерація уточнює криві змінних, ітераційний процес треба проводити доти, поки різниця між кривими змінних, отриманими на поточній та попередній ітераціях не буде перевищувати заздалегідь визначених погрішностей ε_y та ε_x відповідно для корнів диференціальних та алгебраїчних рівнянь системи. Для визначення різниці між двома векторами використовується визначена норма, умова виходу із циклу виглядає так:

$$\begin{cases} \left\| Y^k - Y^{k-1} \right\| \le \varepsilon_y \\ \left\| X^k - X^{k-1} \right\| \le \varepsilon_x \end{cases}. \tag{2.8}$$

Відносно простою, але достатньо ефективною для оцінки погрішності даного метода є Чебишевська норма [9]: якщо використовується вирішувач з фіксованим кроком інтегрування h і кількість кроків інтегрування дорівнює l, а то умови виходу із циклу будуть такими:

$$\begin{cases} \max\limits_{1 \le i \le n}\left(\max\limits_{1 \le j \le l}\left(Y_i^k(j*h) - Y_i^{k-1}(j*h) \right) \right) \le \varepsilon_y \\ \max\limits_{1 \le i \le m}\left(\max\limits_{1 \le j \le l}\left(X_i^k(j*h) - X_i^{k-1}(j*h) \right) \right) \le \varepsilon_x \end{cases}, \tag{2.9}$$

де n та m – кількість відповідно диференціальних та алгебраїчних змінних стану.

Результатом роботи алгоритму є рішення системи диференціальних рівнянь [9] X та Y.

2.2 Можливість вирішування системи диференціально-алгебраїчних рівнянь при використанні методу хвильової релаксації та збіжність методу.

В цьому підрозділі наведені теореми щодо збіжності методу хвильової релаксації та можливості вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь за його допомогою. Доказ цих теорем оснований на доказі збіжності методу Пікара. Він нескладний, але достатньо довгий, тому ці теореми наведені без доказу.

Як було згадано вище, метод хвильової релаксації поєднує в собі метод Пікара та звичайні ітераційні методи вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь. Звідси випливає питання, як впливає на можливість вирішування вихідної системи окреме вирішування підсистем, які, по суті, є лише частинами цієї вихідної системи рівнянь. У [8] приведена теорема щодо можливості вирішити систему диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою методу хвильової релаксації.

Отже: якщо система

$$C\frac{dY}{dt} = AY(t) + BU, \tag{2.10}$$

вирішувана, тоді вона вирішувана за допомогою методу хвильової релаксації тоді і тільки тоді, коли кожна з підсистем вирішувана (матриця *C* може бути, а може і не бути одиничною). Доказ цієї теореми можна знайти у [7].

Слід відмітити два важливих моменти. Перше-це те, що теорема нічого не говорить про збіжність методу. Вона лише стверджує, що для кожної розв’язуваної системи, якщо є вектор $y^k(t)$, тоді існує унікальний вихідний вектор $y^{k+1}(t)$. Друге – можливість розв’язати систему рівнянь за допомогою методу динамічною ітерації залежить від вибору підсистем, тобто з двох способів розділення системи рівнянь на підсистеми, один може біти розв’язуваний, а інший – ні. Інакше кажучи, в деяких випадках застосування методу хвильовою релаксації може зруйнувати можливість вирішування системи. Це треба враховувати при розподілі вихідної системи рівнянь на підсистеми.

Теорема, яка доказує збіжність методу, наведена у [5]. Згідно з цією теоремою, система диференціально-алгебраїчних рівнянь (2.1) рівномірно сходиться до вірного рішення, якщо кожна з функцій векторів правих частин (2.2) задовольняє умовам Ліпшица, тобто:

$$\begin{cases} \left|F(X_i,Y_i,t)-F(X_j,Y_j,t)\right| \le L\left|Y_i-Y_j\right| \\ \left|G(X_i,Y_i,t)-F(X_j,Y_j,t)\right| \le L\left|X_i-X_j\right| \end{cases}.$$

Таким чином, метод хвильової релаксації дає вірне рішення, якщо кожна із підсистем вирішувана та права частині кожного із рівнянь системи задовольняє умові Ліпшица.

2.3 Переваги та недоліки методу хвильової релаксації

2.3.1 Переваги методу

Головною перевага вирішування систем диференціальних рівнянь за допомогою метода хвильовою релаксації є те, що одна велика система диференціальних рівнянь великого порядку розбивається на багато підсистем меншого порядку. В результаті крок вирішування кожної з підсистем не залежить від інших, завдяки чому у вирішувачах з перемінним кроком інтегрування можна використовувати різні кроки для кожної з підсистем. Це може дати значний приріст у реальних динамічних системах, що моделюються. Рисунок 2.2 демонструє приклад того, як різні підсистеми можуть інтегруватись з різними часовими кроками. Нехай, наприклад, функція y_i^k належить до однієї підсистеми, а y_j^k - до іншої, кожні з цих підсистем складається лише з однієї функції. Нехай також y_i^k змінюється швидко на початку інтервалу інтегрування та повільно на його кінці, а y_j^k – навпаки, повільно на початку та швидко на кінці. В цьому випадку перша підсистема буде спочатку інтегруватись з малим кроком, а наприкінці – з великим, друга – навпаки. В підсумку, це буде значно швидше, як якби рівняння вирішувались у однієї системі за малим кроком інтегрування.

Другою причиною, яка може вплинути на вибір методу хвильової релаксації, є те, що деякі реальні системи природно розбиваються на блоки, причому змінні в одному блоці щільно пов'язані одна з іншою, а взаємний вплив змінних між іншими блоками є відносно невеликим. Гарними прикладом таких систем є установки паливних осередків, електричні системи тощо.

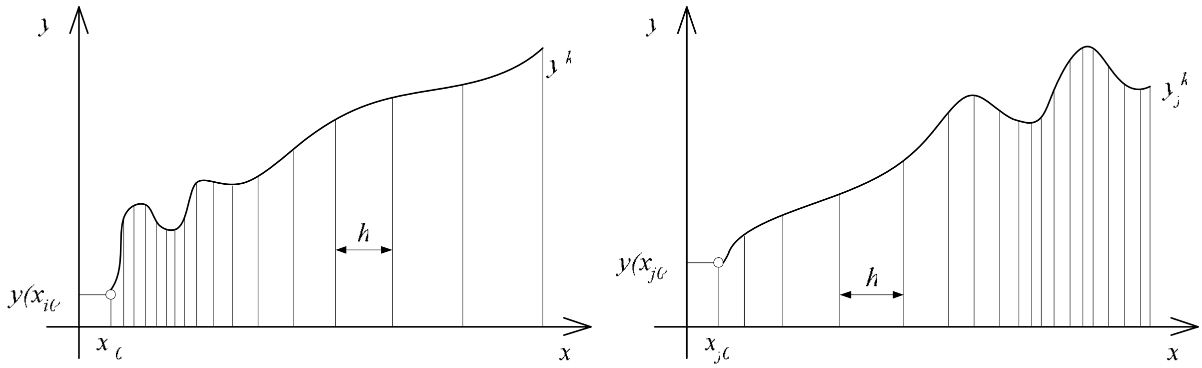

Рисунок 2.2 – Геометричне уявлення різного кроку інтегрування різних підсистем

Говорячи о паралельному вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою методу хвильовою релаксації, треба відмітити, що цей метод природно розпаралелюється. Як було сказано у підрозділі 2.1, не має необхідності в обміні даними протягом однієї ітерації методу хвильової релаксації. Оскільки на практиці кількість таких ітерацій набагато менша, ніж кількість кроків інтегрування системи рівнянь (а особливо великих систем), а операція обміну даними між вузлами паралельної обчислювальної машини – це „дорога" з точки зору витрат часу операція, використання методу хвильової релаксації для паралельного вирішування може дати значний приріст у часі роботи вирішувача.

Нарешті, як було згадано у підрозділі 2.1, існує декілька ефективних технік розподілу вихідної системи рівнянь на підсистеми. Використання автоматичного розподілу дає можливість автоматично розпаралелювати процес вирішування великих систем рівнянь. Більш того, якщо при використанні звичайних ітераційних методів автоматичне розпаралелювання, як правило негативно впливає на ефективність вирішування, то при використанні методу хвильової релаксації якісне автоматичне розпаралелювання лише підвищує швидкість виконання програми! Це пояснюється тим, що в методі хвильової релаксації автоматичне розпаралелювання, фактично, означає автоматичний розподіл вихідної підсистеми рівнянь на підсистеми, а автоматичний розподіл, у свою чергу, забезпечує групування найбільш щільно пов'язаних змінних разом у одній підсистемі.

Таким чином, метод хвильової релаксації є ефективною технікою для вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь, у визначних випадках його використання може дати значний приріст у швидкості процесу вирішування.

2.3.2 Недоліки методу

Втім, незважаючи на суттєві переваги методу хвильової релаксації, він не є „панацеєю" для вирішування систем диференціальних рівнянь

Основним недоліком методу хвильової релаксації є те, що він не є універсальним. Як вже було сказано вище, головною вимогою ефективної роботи методу хвильової релаксації є вдалий розподіл вихідної системи рівнянь на підсистеми таким чином, щоб щільно пов'язані змінні знаходилися у одній групі. А що, якщо мі маємо справу зі складною динамічною системою, де таких груп немає, а всі змінні щільно пов'язані один з одним і немає можливості розбити їх на групи? На жаль, слід визнати, що в цьому випадку збіжність методу хвильовою ітерації буде дуже повільною і не має сенсу застосовувати метод хвильової релаксації для моделювання таких динамічних систем.

Ще одним недоліком методу хвильової релаксації, пов'язаних із практичною реалізацією паралельних вирішувачі, є вкрай складне завдання балансування завантаження процесорів при паралельному обчислюванні. При вирішування системи рівнянь за допомогою звичайних ітераційних методів кількість вирішуваних одним процесором рівнянь є достатнім аргументом для обчислювання завантаження процесора. При застосуванні метода хвильової релаксації перемінний крок інтегрування систем та можливість різної кількості цих кроків як при вирішування різних підсистем, так і при різних ітераціях методу хвильової релаксації для вирішування однієї підсистеми, роблять майже неможливою автоматичну апріорну оцінку завантаження.

Отже, будучи гарним методом для розпаралелювання вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь, метод динамічної ітерації, втім, має ряд недоліків, які не дають йому можливості мати широке визнання.

ВИСНОВКИ

Значна кількість динамічних систем, які потребують моделювання, описуються як системи диференціально-алгебраїчних рівнянь. Внаслідок складності багатьох із цих систем створення та удосконалення методів їх паралельного вирішування є надзвичайно актуальною та важливою задачею. В цій роботі були згадані чисельні методи Пікара та хвильової релаксації, які використовуються для розпаралелювання вирішування систем рівнянь, описані особливості їх застосування для моделювання складних динамічних систем, розглянуті переваги та недоліки вживання цих методів.

Пропонованій в цій роботі методи дозволяють паралельно вирішувати системи диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь. Метод Пікара є природно ітеративним методом вирішування диференціальних рівнянь. Його можна застосовувати і для вирішування систем диференціально-алгебраїчних рівнянь, але на практиці зручніше та ефективніше використовувати його модифікацію – метод хвильової релаксації. Цей метод поєднує в собі метод Пікара та звичайні ітераційні методі вирішування диференціальних рівнянь. Незважаючи на те, що цей метод має ряд недоліків, для визначних класів задач він є вельми ефективним, його застосування може дати значне прискорення роботи вирішувача.

Втім, розробка цих методів продовжується. Зокрема, цікавими та важливими питаннями залишаються завдання гарного розподілу вихідної системи диференціально-алгебраїчних рівнянь на підсистеми таким чином, щоб метод сходився швидше, створення сучасних вирішувачів, призначених для роботи паралельних обчислювальних системах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Святний В.А. Проблеми паралельного моделювання складних динамічних систем – Наукові праці ДонДТУ, Серія ІКОТ, вип. 6., 1999, с. 6-14.
2. Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л., Г.И.Феклисов. Численные методы. Учебник для техникумов – М.: Высшая школа, 1976г., 368с.
3. Демидович Б.П. и др. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения – М.: Наука, 1967г., 368с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы – М.: Наука, 1978г., 512с.
5. M.L.Crow, M.D.Ilić. The Waveform Relaxation Method for Systems of Differential/Algebraic Equations – Mathl. Comput. Modelling Vol.19, No.12, pp.67-84, 1994.
6. J.White, A.S.Vincentelli, F.Odeh, A.Ruehli. Waveform Relaxation: Theory and Practice – TRANSAACTIONS of The Society for Computer Simulation, Volume 2, Number 1, pp.95-133, 1985.
7. M.L.Crow. Waveform relaxation, methods for the simulation of systems of differential/algebraic equations with applications to electric power systems, Ph.D. Dissertation – University of Illinois, Urbana, IL, (January 1990).
8. K.E.Brenan, S.L.Campbell and L.R.Petzold. Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations – Elsevier Science Publishing Co., New York, 1989.
9. Бабенко К.И. Основы численного анализа – М.: Наука, 1986г., 744с.