АЛГОРИТМЫ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕТРАДИЦИОННОГО ЧИСЛА ТОЧЕК

Просеков О. В.
ФГУП “ЦНИИ “Морфизприбор”, Санкт-Петербург, Россия

FAST FOURIER TRANSFORMATION ALGORITHMS FOR NONTRADITIONAL NUMBER OF POINTS

Prosekov O. V.
The Central Research Institute "Morphyspribor", St. Petersburg, Russia

Предлагаются алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) для числа точек, не равного степени двух. Выполнено сравнение с алгоритмом БПФ по основанию два по числу операций, необходимых для реализации процедуры формирования характеристик направленности методом быстрой свертки.

Algorithms of fast Fourier transformation (FFT) are proposed for a number of points not equal to degree two. Comparison with FFT algorithm to base two is provided for a number of operations, which are necessary for realization of procedure of beam forming by fast convolution method.

В ряде гидроакустических приложений возникает необходимость в вычислении дискретных преобразований Фурье (ДПФ), сверток и корреляций различных последовательностей данных. Например, процедура формирования характеристик направленности (ФХН) для круглых антенных решеток реализуется методом циклической свертки [1]. Традиционно для реализации этих преобразований используется алгоритм БПФ Кули и Тьюки [2] по основанию два (число точек равно степени двух). Связанные с этим ограничения на выбор вариантов длин ДПФ может приводить к неоправданному росту числа арифметических операций. С другой стороны, сложившийся к настоящему времени подход к аппаратной реализации параллельных вычислений делает предпочтительным использование векторных операций в противовес классической операции «бабочка» БПФ. С математической точки зрения одним из вариантов аппарата, основывающегося на применении параллельных векторных операций, является аппарат кронекерова (тензорного) произведения матриц [3].

В настоящей работе предлагаются алгоритмы БПФ последовательностей данных нетрадиционных длин (не равной степени двух). Алгоритмы представлены в матричной форме, что позволяет адаптировать алгоритм для различных вычислительных средств.

Дискретное преобразование Фурье определяется [4] формулой

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j\, \omega_N^{-kj}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{1}$$

где $\omega_N = \exp\left(2\pi i/N\right)$ – корень N-й степени из единицы, N – длина преобразования.

Формулу (1) можно представить в матричном виде

$$X = F_N\, x, \tag{2}$$

где $F_N[k, j] = \omega_N^{-kj}$ – матрица ДПФ, а N – порядок матрицы ДПФ.

Быстрое преобразование Фурье основано на факторизации матрицы ДПФ на сомножители специальной структуры. Такая факторизация определяется не единственным образом и зависит от способа разложения порядка ДПФ на множители.

Запишем основной вариант алгоритма БПФ в общем виде, когда порядок матрицы Фурье является произведением s натуральных чисел, отличных от единицы, т. е. $N = n_1 \cdot \ldots \cdot n_s$. Обозначим $\Delta_1 = 1$; $\Delta_\nu = n_1 \cdot \ldots \cdot n_{\nu-1}$ при $\nu = 2,\ldots,s+1$; $N_\nu = N/\Delta_{\nu+1}$. Очевидно, что $N_0 = N$, $N_s = 1$ и $N_\nu = n_{\nu+1} \cdot \ldots \cdot n_s$ при $\nu = 1,\ldots,s-1$. Тогда [3]

$$F_N = \left(\prod_{\nu=1}^{s} \left(I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu} \right) \left(I_{\Delta_\nu} \otimes T_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)} \right) \right) R_N^T, \qquad R_N = \prod_{\nu=1}^{s-1} I_{\Delta_\nu} \otimes L_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}, \tag{3}$$

где символ $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц, I_n – единичная матрица порядка n, $L_{mn}^{(n)}$ – матрица перестановок и $T_{mn}^{(m)}$ – диагональная матрица вращений. Они определяются следующим образом:

$$L_{mn}^{(n)}\left[i + j\,m, i'\,n + j'\right] = \begin{cases} 1, & \textit{если } i' = i \textit{ и } j' = j, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$T_{mn}^{(m)}\left[i + j\,m, i' + j'\,m\right] = \begin{cases} \omega_{mn}^{-ij}, & \textit{если } i' = i \textit{ и } j' = j, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Здесь $i, i' = 0,1,\ldots,m-1$, $j, j' = 0,1,\ldots,n-1$. В частности, нетрудно заметить, что

$$L_n^{(n)} = I_n, \quad L_m^{(1)} = I_m, \quad T_m^{(m)} = I_m, \quad T_n^{(1)} = I_n.$$

По определению, матрице $T_{mn}^{(m)}$ соответствует $(mn - m - n + 1)$ комплексных умножений. Тогда число действительных арифметических операций в алгоритме БПФ (3) равно

$$O(F_N) = N \cdot \sum_{\nu=1}^{s} \frac{O\left(F_{n_\nu}\right)}{n_\nu} + 6N \cdot \sum_{\nu=1}^{s} \frac{n_\nu - 1}{n_\nu} - 6 \cdot \sum_{\nu=1}^{s} \Delta_\nu \left(n_\nu - 1\right),$$

где $O\left(F_{n_\nu}\right)$ – число действительных арифметических операций в алгоритме БПФ малого порядка n_ν. В случае традиционного алгоритма БПФ по основанию два ($N = 2^s$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$, $N_\nu = N/2^\nu$) число действительных арифметических операций равно $5N\log_2 N - 6(N-1)$.

Рассмотрим случай, когда порядок матрицы Фурье является произведением s натуральных попарно взаимно простых чисел. Этот вариант алгоритма БПФ называется алгоритмом простых множителей (АПМ). Факторизация матрицы ДПФ в этом случае выглядит следующим образом:

$$F_N = Q_N \left(\prod_{\nu=1}^{s} I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu} \right) P_N^T, \qquad Q_N = \prod_{\nu=1}^{s-1} I_{\Delta_\nu} \otimes Q_{N_{\nu-1}}^{(n_\nu)}, \qquad P_N = \prod_{\nu=1}^{s-1} I_{\Delta_\nu} \otimes P_{N_{\nu-1}}^{(N_\nu)}, \tag{4}$$

где $Q_{mn}^{(n)}$ и $P_{mn}^{(m)}$ – матрицы перестановок, которые определяются по формулам

$$P_{mn}^{(n)}\left[k, i\,n + j\right] = \begin{cases} 1, & \textit{если } k = \left\langle i\,n + j\,m \right\rangle_{mn}, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$Q_{mn}^{(m)}\left[k, i\,n + j\right] = \begin{cases} 1, & \textit{если } i = \left\langle k \right\rangle_m \textit{ и } j = \left\langle k \right\rangle_n, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Здесь $k = 0,1,\ldots,mn-1$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, $j = 0,1,\ldots,n-1$; $\left\langle k \right\rangle_m$ – остаток от деления чисел k на m. В частности, нетрудно проверить, что

$$P_n^{(n)} = I_n, \quad P_m^{(1)} = I_m, \quad Q_m^{(m)} = I_m, \quad Q_n^{(1)} = I_n.$$

Число действительных арифметических операций в АПМ равно

$$O(F_N) = N \cdot \sum_{\nu=1}^{s} \frac{O\left(F_{n_\nu}\right)}{n_\nu}.$$

Как видно из последней формулы, АПМ по числу арифметических операций эффективней алгоритма БПФ (3). Однако прежде, чем пользоваться формулами (3) и (4), необходимо иметь достаточно большой набор эффективных алгоритмов БПФ малых порядков n_ν. Одними из таких алгоритмов являются малые алгоритмы Винограда [5].

Факторизация Винограда основана на приведении матрицы ДПФ к виду

$$F_{n_\nu} = C_{n_\nu \times m_\nu} B_{m_\nu} A_{m_\nu \times n_\nu} . \tag{5}$$

Здесь B_{m_ν} – диагональная матрица умножения, $A_{m_\nu \times n_\nu}$ и $C_{n_\nu \times m_\nu}$ – прямоугольные матрицы, соответствующие предсложениям и постсложениям в алгоритме БПФ, элементы которых равны 0, 1 или -1. Факторизация (5) имеет целью минимизировать число умножений. Чтобы минимизировать число сложений, нужно факторизовать матрицы $A_{m_\nu \times n_\nu}$ и $C_{n_\nu \times m_\nu}$ [6], т. е. перейти к разложению

$$F_{n_\nu} = C_{n_\nu}^{(q_\nu)} \ldots C_{n_\nu}^{(1)} C_{n_\nu \times m_\nu}^{(0)} B_{m_\nu} A_{m_\nu \times n_\nu}^{(0)} A_{n_\nu}^{(1)} \ldots A_{n_\nu}^{(p_\nu)} , \tag{6}$$

причём [7] $C_{n_\nu}^{(q_\nu)} = A_{n_\nu}^{(p_\nu)}$.

Сомножители в (6) $A^{(p)}$ и $C^{(q)}$ $\left(p = 0,1,\ldots, p_\nu, q = 0,1,\ldots,q_\nu \right)$ обладают следующими свойствами: их элементы по-прежнему равны 0, 1 или -1, но в каждой строке этих сомножителей содержится минимум отличных от нуля элементов.

Факторизация (6) определяется не единственным образом. В работе [6] и [7] указаны простые соображения, позволяющие получить в результате факторизацию более глубокую, чем обычно, за счет более полного учета симметрии в матрице ДПФ. Матрицы $A_{n_\nu}^{(p)}$ и $C_{n_\nu}^{(q)}$ в основном симметричные и обладают регулярной структурой. Матрицы $A_{m_\nu \times n_\nu}^{(0)}$ и $C_{n_\nu \times m_\nu}^{(0)}$ содержат строки, отвечающие соответственно за увеличение и уменьшение порядка диагональной матрицы B_{m_ν}.

В таблице 1 приведены арифметические характеристики алгоритмов БПФ малых порядков. Более подробную информацию можно найти в [8].

Таблица 1. Алгоритмы БПФ малых порядков

n_ν	m_ν	$O\left(B_{m_\nu}\right)$	$O\left(A_{m_\nu \times n_\nu}^{(0)}\right)$	$O\left(C_{n_\nu \times m_\nu}^{(0)}\right)$	$O\left(A_{n_\nu}^{(p)}, C_{n_\nu}^{(q)}\right)$	$O\left(F_{n_\nu}\right)$
2	2	–	–	–	4	4
3	3	4	–	–	$(4+2)+(2+4)=12$	16
4	4	–	–	–	$(4+4)+(4+4)=16$	16
5	6	10	2	4	$(8+4+2)+(2+4+8)=28$	44
6	6	8	–	–	$(8+12+4)+(4+8)=36$	44
7	9	16	4	8	$(12+16+2)+(2+16+12)=60$	88
8	8	4	–	–	$(12+12+4)+(12+12)=52$	56
9	12	20	4	14	$(16+16+2)+(16+16)=66$	104
9*	11	20	4	8	$(16+16+2)+(8+16+16)=64$	106
10	12	20	4	8	$(16+20+8+4)+(4+8+16)=76$	108
12	12	16	–	–	$(20+20+8)+(8+20+20)=96$	112
16	18	20	4	8	$(28+28+12)+(12+28+28)=136$	168

Алгоритм АПМ (4) можно улучшить, используя разложение (6). Пусть $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_s$. Обозначим $\Lambda_1 = 1$; $\Lambda_\nu = m_1 \cdot \ldots \cdot m_{\nu-1}$ при $\nu = 2, \ldots, s+1$; $M_\nu = M / \Lambda_{\nu+1}$. Очевидно, что $M_0 = M$, $M_s = 1$ и $M_\nu = m_{\nu+1} \cdot \ldots \cdot m_s$ при $\nu = 1, \ldots, s-1$. Тогда

$$F_N = C_{N\times M} B_M A_{M\times N} . \qquad (7)$$

Диагональная матрица умножений в (7) определяется по формуле

$$B_M = B_{m_1} \otimes \ldots \otimes B_{m_s}$$

и содержит $2M - \prod_{\nu=1}^{s} \left(2m_\nu - O\left(B_{m_\nu}\right)\right)$ умножений.

Матрица предсложений в (7) определяется по формуле

$$A_{M\times N} = \left(\prod_{\nu=1}^{s} I_{\Delta_\nu} \otimes A^{(0)}_{m_\nu \times n_\nu} \otimes I_{M_\nu} \right) \left(\prod_{\nu=1}^{s} \prod_{p=1}^{p_\nu} I_{\Delta_\nu} \otimes A^{(p)}_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu} \right) P_N .$$

Матрица постсложений в (7) определяется по формуле

$$C_{N\times M} = Q_N \left(\prod_{\nu=1}^{s} \prod_{q=q_\nu}^{1} I_{\Delta_\nu} \otimes C^{(q)}_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu} \right) \left(\prod_{\nu=1}^{s} I_{\Lambda_\nu} \otimes C^{(0)}_{n_\nu \times m_\nu} \otimes I_{N_\nu} \right).$$

Число действительных арифметических операций в новом АПМ равно

$$O\left(F_N\right) = 2M - \prod_{\nu=1}^{s} \left(2m_\nu - O\left(B_{m_\nu}\right)\right) + O\left(A^{(p)}_{n_\nu}, C^{(q)}_{n_\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{s} \left(\Delta_\nu M_\nu O\left(A^{(0)}_{m_\nu \times n_\nu}\right) + \Lambda_\nu N_\nu O\left(C^{(0)}_{n_\nu \times m_\nu}\right)\right),$$

где

$$O\left(A^{(p)}_{n_\nu}, C^{(q)}_{n_\nu}\right) = N \cdot \sum_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{p=1}^{p_\nu} \frac{O\left(A^{(p)}_{n_\nu}\right)}{n_\nu} + \sum_{q=1}^{q_\nu} \frac{O_C\left(C^{(q)}_{n_\nu}\right)}{n_\nu} \right).$$

Число операций в алгоритме БПФ (7) значительно меньше, чем в (4), поэтому при разработке эффективного алгоритма БПФ следует пользоваться сначала формулой (7), затем формулами (3) и (4).

Как, отмечалось выше, одним из приложений алгоритмов БПФ является реализация процедуры ФХН для круглых антенных решеток методом циклической свертки [1]. Запишем алгоритм быстрой свертки через алгоритм БПФ.

Дискретная циклическая свертка порядка N определяется [4] по формуле

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \, h_{\langle k-j \rangle_N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

Воспользуемся теоремой о свертке и представлением ДПФ в матричном виде (2):

$$y = F_N^{-1} \operatorname{diag}\left(H\right) F_N \, x, \qquad H = F_N \, h . \qquad (8)$$

Обратное ДПФ можно представить в виде $F_N^{-1} = N^{-1}\left(S_N F_N\right) = N^{-1}\left(F_N S_N\right)$, где S_N – матрица перестановок следующего вида:

$$S_N\left[i, i'\right] = \begin{cases} 1, & \textit{если } i' = \langle N - i \rangle_N , \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $i, i' = 0, 1, \ldots, N-1$. Тогда формула (8) принимает вид

$$y = F_N S_N \operatorname{diag}\left(H\right) F_N \, x, \qquad H = N^{-1} F_N \, h .$$

Способы факторизации матрицы ДПФ F_N были приведены выше. Так как вектор h обычно фиксирован, то вектор H можно вычислить заранее. Таким образом, число действительных арифметических операций в алгоритме свертки равно

$$O\left(N\right) = 2O\left(F_N\right) + 6N .$$

В частности, для алгоритма по основанию два число действительных арифметических операций равно $10N\log_2 N - 6(N-2)$.

На рис. 1 приведены графики зависимости числа действительных арифметических операций алгоритма быстрой свертки по основанию два и алгоритма быстрой свертки нетрадиционной длины от длины свертки. Как видно из графиков, алгоритм быстрой свертки нетрадиционной длины оказывается эффективней традиционного алгоритма в среднем в 1,4 раза.

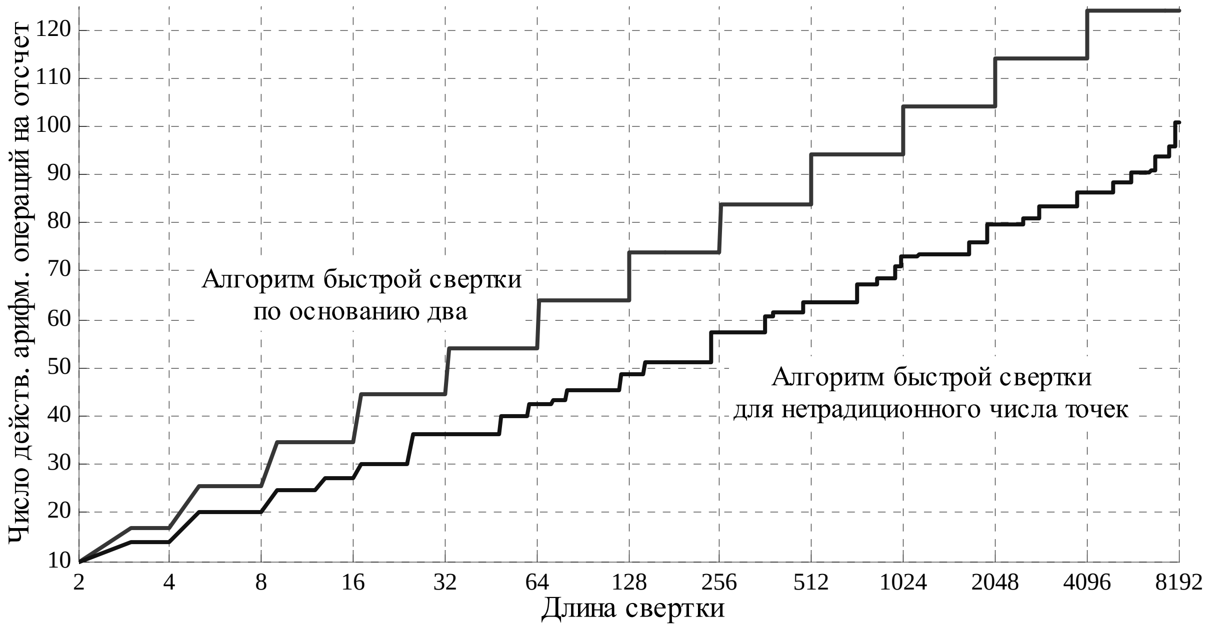

Рис.1. Вычислительная эффективность алгоритмов быстрой свёртки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. R. Farrier, T. S. Durrani and J. M. Nightingale, Fast beam forming techniques for circular arrays // J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 58, No. 4, oct. 1975, pp. 920–922.
2. J. W. Cooley and J. W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput., Vol. 19, No. 90, 1965, pp. 297–301.
3. J. Johnson, R. W. Johnson, D. Rodriguez, and R. Tolimieri, A methodology for designing, modifying, and implementing Fourier transform algorithms on various architectures // Circuits, Systems and Signal Processing, Vol. 9, No. 4, 1990, pp. 449–500.
4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. СПб.: НИИМ, 2003. 288 с.
5. S. Winograd, On computing the discrete Fourier transform // Math. Comput., Vol. 32, jan. 1978, pp. 175–199.
6. Малоземов В. Н., Просеков О. В. О быстром преобразовании Фурье малых порядков. // Вестник СПбГУ Сер. 1. 2003. Вып. 1. (№1). С. 36–45.
7. Просеков О. В. Разработка алгоритма БПФ для нетрадиционного числа точек. // Сборник докладов I научно-технической конференции молодых специалистов ЦНИИ «Морфизприбор» 22–25 апреля 2003. Санкт-Петербург. С. 116–121.
8. Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha