кроме масштаба, и все три инвариантны к медианному фильтру с квадратной апертурой 3×3, обозначенной через A. Если о гладкости судить по локальной монотонности в квадратной апертуре 3×3 (см. определение после леммы 6.2), то a и $б$ нигде не являются локально-монотонными по отношению к A. Изображение b локально-монотонно по отношению к A везде, кроме тех седловых точек типа a, b, c и d, где это неверно. При еще меньшем масштабе изображение, которое остается стабильной точкой медианного фильтра с апертурой A, становится более гладким; однако указанные седловые точки также сохраняются. Следовательно, изображение на рис. 6.2,*в* можно рассматривать как стабильную точку смешанного типа.

6.4. Алгоритм быстрой медианной фильтрации

Интересный и эффективный алгоритм двумерной медианной фильтрации с произвольной апертурой был предложен Хуангом и другими [6.4]. Используется тот факт, что при смещении на один отсчет убирается только часть отсчетов, содержащихся в апертуре, и столько же отсчетов добавляется. Этот раздел основывается на [6.4].

Хотя алгоритм работает для произвольных апертур, мы используем в качестве примера прямоугольную апертуру $m \times n$, где m — число столбцов. Предполагается, что апертура перемещается слева направо по горизонтали и возвращается назад при переходе к следующей строке. Пограничные точки не рассматриваются; их можно обрабатывать, уменьшая размеры апертуры, как и в одномерном случае. Изображение квантовано, скажем, на 256 уровней. Тогда для элементов изображения первого (начального) положения апертуры вычисляются и с каждым следующим шагом вправо корректируются: 1) ГИСТ — гистограмма распределения значений; 2) МДН — медиана, 3) МЧМ — число элементов изображения, значения которых меньше МДН.

При движении апертуры направо на один шаг каждый элемент изображения левого крайнего столбца g предыдущей апертуры убирается; гистограмма и счетчик, МЧМ, корректируются следующим образом:

$$\text{ГИСТ}[g] \leftarrow \text{ГИСТ}[g]-1,$$
$$\text{МЧМ} \leftarrow \text{МЧМ}-1, \text{ если } g<\text{МДН}. \qquad (6.6)$$

Аналогично при сдвиге на один шаг добавляется каждый элемент изображения g крайнего правого столбца в апертуре. ГИСТ и МЧМ должны быть заменены соответственно на

$$\text{ГИСТ}[g] \leftarrow \text{ГИСТ}[g]+1,$$
$$\text{МЧМ} \leftarrow \text{МЧМ}+1, \text{ если } g<\text{МДН}. \qquad (6.7)$$

После этого ГИСТ дает гистограмму для текущего положения апертуры, а счетчик МЧМ будет содержать число элементов в данной апертуре, имеющих значения, меньшие, чем медиана при предыдущем положении апертуры.

Затем медиана в данном положении апертуры находится путем уменьшения (или увеличения) МДН в зависимости от того, превышает МЧМ отношение $(mn-1)/2$, которое мы обозначим через П, или нет. Сначала

$$\text{МЧМ сравнивается с П.} \tag{6.8}$$

Возможны такие случаи.

Случай 1. МЧМ>П, что указывает на то, что МДН больше медианы в данном положении апертуры. Тогда вводим коррекцию

$$\text{МДН} \leftarrow \text{МДН} - 1$$

$$\text{МЧМ} \leftarrow \text{МЧМ} - \text{ГИСТ}[\text{МДН}],$$

пока не получим

$$\text{МЧМ} \leqslant \text{П}. \tag{6.9}$$

Случай 2. МЧМ⩽*П*, что указывает на то, что МДН меньше или равна медиане в данном положении апертуры. Проверим неравенство

$$\text{МЧМ} + \text{ГИСТ}[\text{МДН}] \leqslant \text{П}. \tag{6.10}$$

Если оно не справедливо, то МДН точно является требуемой медианой. Если оно справедливо, что свидетельствует о том, что МДН+1 все еще меньше или равна требуемой медиане, то вводим коррекцию

$$\text{МЧМ} \leftarrow \text{МЧМ} + \text{ГИСТ}[\text{МДН}]$$

$$\text{МДН} \leftarrow \text{МДН} + 1$$

и возвращаемся к (6.10).

Очевидно, каждая из операций (6.6) и (6.7) требует n сравнений. Пусть d равна медиане на предыдущей апертуре. Для случая *1* $d<0$ (6.8) и (6.9) требуют $(1+|d|)$ сравнений; для случая *2* $d\geqslant 0$ (6.8) и (6.10) требуют $(2+d)$ сравнений. Пусть $P_i = \mathrm{Prob}(d=i)$. Тогда математическое ожидание будет равно

$$\bar{c} = 2n + \sum_{i<0} (1+|i|)\, P_i + \sum_{i\geqslant 0} (2+i)\, P_i = 2n + $$

$$+ |\bar{d}| + 1 + \mathrm{Prob}(d \geqslant 0),$$

где $|d|$ — среднее значение $|d|$. Считая, что $\mathrm{Prob}(d>0) = \mathrm{Prob}(d<0)$, имеем $\bar{c} = 2n + |\bar{d}| + 1{,}5 + 0{,}5P_0$. В [6.4] отмечено, что $|\bar{d}|$ обычно мало, и экспериментальные результаты показывают, что оно меньше 10. Поскольку $|\bar{d}|$ мало, возможна значительная экономия времени вычислений даже при малых $n\times m$. При увеличении размеров апертуры преимущества этого алгоритма по сравнению с теми, которые не используют общности $n(m-2)$ элементов в рассматриваемой апертуре с предшествующим элементом, становится все более заметными.