

С. В. Божокин, Д. А. Паршин

# ФРАКТАЛЫ И МУЛЬТИФРАКТАЛЫ

Учебное пособие

 *R&C*  
*Dynamics* *РХД*  
Москва • Ижевск

2001

УДК 530.1

Интернет-магазин

MAHES

<http://shop.rcd.ru>

Интересующие Вас книги, выпускаемые нашим издательством, дешевле и быстрее всего приобрести через интернет-магазин. Регистрация в магазине позволит Вам

- приобретать книги по наиболее низким ценам;
- подписаться на регулярную рассылку сообщений о новых книгах;
- самое быстрое приобретение новых книг до поступления их в магазины.

---

**Божокин С. В., Паршин Д. А.**

**Фракталы и мультифракталы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 128 с.**

Учебное пособие посвящено изложению основных идей фрактальной и мультифрактальной геометрии. Примеры различных фрактальных структур можно встретить во многих явлениях природы. Фрактальные образы с успехом используются при описании хаотического поведения нелинейных динамических и диссипативных систем, турбулентного течения жидкости, неоднородного распределения материи во Вселенной, при исследовании трещин и дислокационных скоплений в твердых телах, при изучении электрического пробоя, диффузии и агрегации частиц, роста кристаллов и т. д. Много интересных идей фрактальной геометрии нашли свое применение в экономике при анализе колебаний курса валют, в биологии для объяснения морфологического строения различных биологических объектов, в физике твердого тела для описания перехода Андерсона металл-диэлектрик и других свойств неупорядоченных систем.

Пособие написано по материалам курсов лекций, прочитанных авторами в разное время на физико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного технического университета для студентов 4-5 курсов, обучающихся на специальностях "Биофизика", "Физика металлов" и "Спектроскопия твердого тела".

Пособие будет полезно аспирантам и студентам физических специальностей, интересующихся современными проблемами физики.

ISBN 5-93972-060-9

© Божокин С. В., Паршин Д. А., 2001

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

<http://rcd.ru>

скоплении. На рисунке видны только пять из них: недостающие две расположены симметрично над и под плоскостью рисунка, на прямой, проходящей через центр скопления<sup>6</sup>. В свою очередь, семь таких скоплений аналогичным образом объединены в одно суперскопление радиуса  $R_2$ . Затем по такому же принципу из семи суперскоплений строится одно суперсуперскопление радиуса  $R_3$ , причем  $R_3/R_2 = R_2/R_1$  и т. д. В результате многократного повторения такого процесса возникает самоподобная фрактальная структура.

Ее фрактальную размерность легко определить, заметив, что, как следует из рисунка, в сфере радиуса  $R_2$  содержится в семь раз больше галактик, чем в сфере радиуса  $R_1$ , т. е.  $N(R_2) = 7N(R_1)$ . Решением этого уравнения является степенная функция  $N \propto R^D$ , где

$$D = \frac{\ln 7}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (1.18)$$

У Фурнье  $R_2 = 7R_1$ , поэтому размерность такой вселенной равняется 1. Как видно, она для этого вовсе не обязательно должна быть прямой или какой-нибудь другой плавной кривой. Более того, она даже не должна быть связной. Меняя отношение  $R_2/R_1$ , легко построить фрактальные вселенные с другими размерностями  $D$ , близкими к единице.

## 1.2 Итерации линейных систем

### 1.2.1 Системы итерируемых функций

Как мы уже убедились, многие регулярные фракталы строятся путем бесконечного повторения нескольких простых операций, скажем, замены одного элемента некоторой комбинацией других, ему подобных. Так, например, салфетка Серпинского получается при замене исходного большого треугольника тремя треугольниками в два раза меньшего размера, расположенных друг относительно друга так, как показано на рис. 1.4 в центре. Затем эта же операция повторяется с каждым из этих трех маленьких треугольников, и так далее

<sup>6</sup> Скопления имеют форму правильного восьмигранника — октаэдра (гранями которого являются 8 равносторонних треугольников), в 6 вершинах и в центре которого расположены 7 галактик.

до бесконечности. Возникает естественный вопрос, а нельзя ли эту "процедуру замены" перевести на язык математических формул.

Так или примерно так в середине 80-х годов появился метод **Систем Итерируемых Функций** — **СИФ** (Iterated Function System — IFS) как простое средство получения фрактальных структур. Он был придуман американским математиком М. Барнсли (M. Barnsley), работавшим тогда в технологическом институте штата Джорджия. Сущность этого метода на примере уже упомянутой выше салфетки Серпинского заключается в следующем.

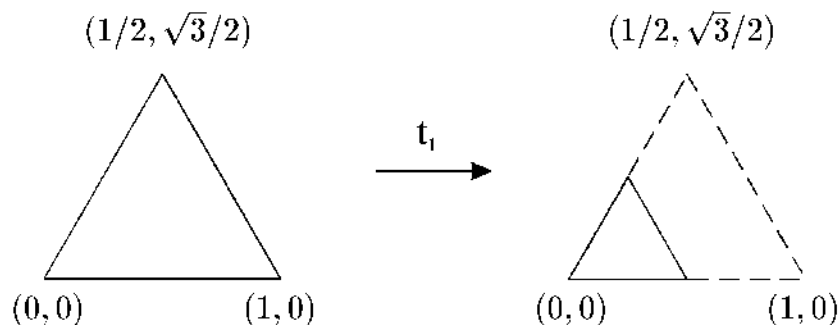


Рис. 1.20. Преобразование  $t_1$ . В скобках даны декартовы координаты вершин.

Поместим исходный равносторонний треугольник с длиной стороны, для определенности равной единице, на комплексную плоскость  $[z]$  так, как показано на рис. 1.20 слева. Теперь зададимся вопросом, каким линейным преобразованием  $t_1$  на комплексной плоскости он переводится в равносторонний треугольник в два раза меньшего размера, показанный на рис. 1.20 справа? Ответ достаточно прост. Поскольку левое основание обоих треугольников лежит в начале координат  $z = 0$ , то функция  $f_1(z)$ , осуществляющая это преобразование, определяется выражением

$$t_1: f_1(z) = \frac{1}{2}z. \quad (1.19)$$

Если теперь сместить этот маленький треугольник по горизонтали вправо на величину, равную  $1/2$ , то получим преобразование  $t_2$ , переводящее исходный треугольник в треугольник, изображенный на рис. 1.21 справа. Соответствующая этому преобразованию функ-

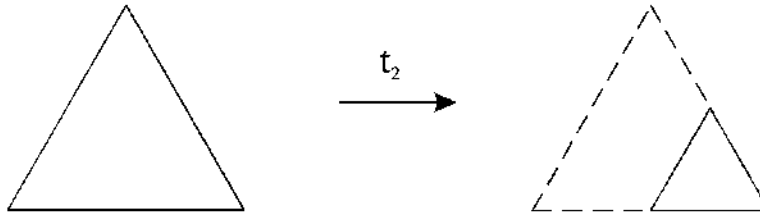


Рис. 1.21. Преобразование  $t_2$ .

ция  $f_2(z)$ , очевидно, равна

$$t_2 : f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}. \quad (1.20)$$

Наконец, последний, третий, маленький треугольник получается с помощью преобразования  $t_3$ , показанного на рис. 1.22. Отвечающая

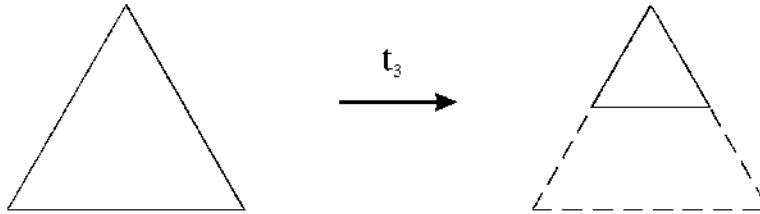


Рис. 1.22. Преобразование  $t_3$ .

ему функция  $f_3(z)$  получается из  $f_1(z)$  трансляцией на комплексный вектор  $1/4 + i\sqrt{3}/4$

$$t_3 : f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (1.21)$$

В итоге три вышеназванные линейные функции  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  и  $f_3(z)$  осуществляют искомое преобразование исходного треугольника в три треугольника в два раза меньшего размера. Возникает вопрос, а что будет, если теперь каждый из этих трех маленьких треугольников в

свою очередь подвергнуть этим трем преобразованиям. Тогда возникнет уже 9 треугольников с размером в 4 раза меньше исходного. Непосредственной проверкой можно убедиться, что это приводит к картинке, изображенной на рис. 1.4 справа.

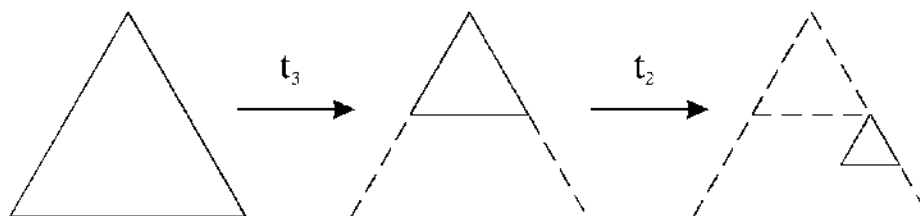


Рис. 1.23. Преобразование  $t_2t_3$ .

Например, выполняя сначала преобразование  $t_3$ , а затем преобразование  $t_2$ , мы в итоге получаем треугольник со стороной  $1/4$ , показанный на рис. 1.23 справа, и т. д.. Общий случай показан на рис. 1.24 справа, где изображены все эти треугольнички с обозначением результирующего преобразования — **генеалогического кода**, при помощи которого они были получены из исходного треугольника. Слева показан первый шаг итерационной процедуры. Большой треугольник, в который ”вписаны” подобным образом три маленьких треугольника в два раза меньшего размера, мы будем ниже называть ячейкой.

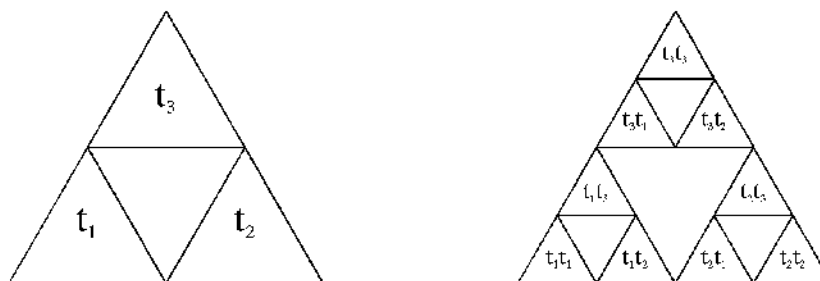


Рис. 1.24. Два первых поколения итераций системы из трех линейных отображений.

Комбинация  $t_jt_i$ , стоящая в каждом из девяти маленьких треугольников, означает, что этот треугольник был получен из исходного сна-

чала применением преобразования  $t_i$ , а затем к полученному треугольнику было применено преобразование  $t_j$ . Правило построения этой последовательности легко угадывается. На первом месте справа стоит первое преобразование. Оно соответствует позиции данного треугольника в его ячейке в соответствии с обозначениями на рис. 1.24 (слева). На втором месте стоит второе по счету преобразование, которое соответствует позиции уже этого большого треугольника в его ячейке и т. д. Отметим очевидную некоммутативность двух (разных) преобразований, т. е. генеалогические коды  $(t_1t_2)$  и  $(t_2t_1)$  соответствуют разным треугольникам.

Ниже на рис. 1.25 приведено 4-е поколение итераций, состоящее из  $3^4 = 81$  треугольника, и показан генеалогический код двух из них. Ясно, что, действуя подобным образом, мы в точности воспроизводим алгоритм построения салфетки Серпинского. Поэтому после бесконечного числа шагов мы придем в конце концов к множеству точек, образующих этот фрактал.

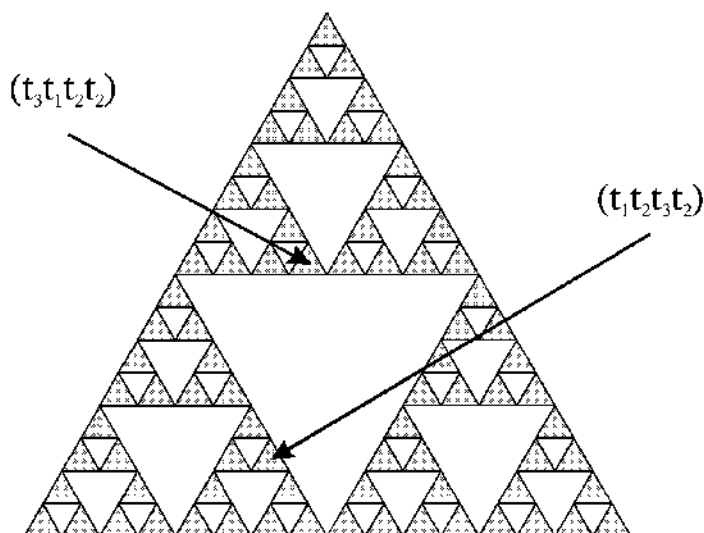


Рис. 1.25. 4-е поколение итераций.

Сам по себе этот факт безусловно интересен. Но, с другой стороны, что мы при этом узнали нового? Несколько другим способом получен уже известный фрактал, и все? Оказывается, что далеко не только

это. Принципиально новое заключается в том, что для получения точно такого же предельного результата мы могли бы стартовать с любой фигуры, необязательно имеющей форму равностороннего треугольника. Это, например, мог быть круг или квадрат или любая другая замысловатая (и даже несвязная) фигура, произвольным образом расположенная на плоскости. На каждом шаге уменьшаясь в размерах в два раза и утраиваясь в количестве, эти фигуры в конце концов превратились бы в неразличимые глазом бесформенные точки, образующие фрактал — салфетку Серпинского.

Причина такого поведения предельно проста. Она заключается в том, что салфетка является своеобразным **аттрактором** для этой системы из трех линейных преобразований  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  и  $f_3(z)$ , называемых в литературе Системой Итерируемых Функций или сокращенно СИФ. Поскольку салфетка — аттрактор, то, как мы увидим ниже, процесс его построения можно было начать даже с одной единственной точки!

### 1.2.2 Метод случайных итераций, или игра в хаос

Рассмотрим следующую незамысловатую игру, которую М. Барнсли назвал **игрой в хаос** (chaos game). Возьмем уже знакомый нам равносторонний треугольник с вершинами в точках А, В и С. Выберем внутри этого треугольника произвольным образом начальную точку. Бросим теперь игральную кость, представляющую собой кубик, на 6 гранях которого проставлены буквы А, В и С. Пусть каждая буква присутствует на двух из них, тогда вероятность выпадения любой буквы одинакова и равна  $1/3$ .

Допустим, что в результате первого броска выпала буква А. Соединим мысленно нашу начальную точку с вершиной треугольника А отрезком прямой и на его середине поставим точку (см. рис. 1.26). Пусть теперь она будет играть роль начальной. После чего повторим вышеописанную процедуру с бросанием кубика и проставлением точки в середине соответствующего отрезка. Допустим, на втором шаге выпала буква С, потом В, затем опять С и т. д. В результате на каждом шаге мы будем получать все новые и новые точки. Спрашивается, как распределятся внутри треугольника эти точки после достаточно большого числа шагов?