А.Д. Морозов

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ ФРАКТАЛОВ

Издание второе, дополненное

Москва ♦ Ижевск

2002

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

УДК 510:514
ББК В16
М 79

Морозов А.Д.
Введение в теорию фракталов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160 стр.

Книга посвящена основам теории фракталов и состоит из двух частей и приложения. В первой части рассматриваются конструктивные фракталы, во второй динамические, а в приложении приводится вспомогательный материал.

Конструктивные фракталы строятся с помощью достаточно простой рекурсивной процедуры, имеют «тонкую» структуру, т.е. содержат произвольно малые масштабы, и обладают самоподобием. Подобные фрактальные множества слишком нерегулярны, чтобы быть описанными на традиционном геометрическом языке. Рассматриваются многочисленные примеры конструктивных фракталов (Кантора, Коха, Минковского, Серпинского, Леви и др.). Проводится их анализ на основе линейных преобразований и вычисления фрактальной размерности. Изложение сопровождается историческими справками.

Вторая часть посвящена фракталам, которые возникают в дискретных нелинейных динамических системах. Это множества, хаусдорфова (или фрактальная) размерность которых больше топологической размерности. К ним относятся одномерные комплексные эндоморфизмы, рассмотренные Жюлиа и Фату в начале 20 века. В книге приводятся основы современной теории подобных эндоморфизмов. Изложение иллюстрируется на примере фракталов Жюлиа, Мандельброта, Ньютона. В книгу включены новые результаты по гиперкомплексной динамике.

В приложении приводится вспомогательный математический материал из теории множеств, обсуждается определение линии, даются основы теории размерности и, прежде всего, хаусдорфовой размерности.

Книга может быть использована как учебное пособие по фракталам и ориентирована прежде всего на студентов физико-математических факультетов университетов. Первая часть доступна школьникам старших классов.

ISBN 5-93972-172-9 **ББК В16**

© А. Д. Морозов, 2002
© Институт компьютерных исследований, 2002

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

Глава 4. Анализ конструктивных фракталов

4.1. Инвариантные преобразования

Фракталы можно определить как множества точек, инвариантных относительно полугруппы сжатий.

В самом простом случае сжатие — это масштабное уменьшение с вращением или без него и задается линейным преобразованием плоскости (x,y) → (x',y'):

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

Преобразование (4.1) с матрицей A будем для краткости обозначать буквой T. При

$$\det\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (4.2)$$

преобразование (отображение плоскости в себя) имеет единственную неподвижную точку $x' = x = 0, \quad y' = y = 0$.

Тип неподвижной точки $O(0,0)$ определяют корни характеристического уравнения

$$\mu^2 - (a+d)\mu + \Delta = 0, \quad \Delta = \det A \qquad (4.3)$$

или

$$\det(A - \mu E) = 0\,. \qquad (4.4)$$

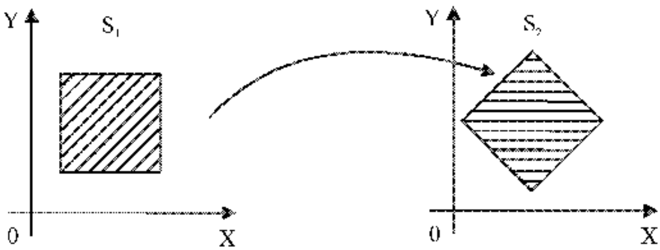
1) В случае $|\mu_1|<1, |\mu_2|<1$ точка O — устойчивая;
2) при $|\mu_1|<1, |\mu_2|>1$ — седловая (гиперболическая);
3) при $|\mu_{1,2}|=1$ — эллиптическая;
4) при $|\mu_1|>1, |\mu_2|>1$ — неустойчивая.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

Говорят, что отображение T сохраняет площадь, если $\left|\det A\right| = 1$. Поэтому, когда $\left|\mu_1\right| \cdot \left|\mu_2\right| = 1$, то отображение T сохраняет площадь. Сохраняющее площадь отображение может иметь лишь точки эллиптического или гиперболического типа.

Можно рассматривать произведение двух или большего числа отображений T. Например, если точка $M_1(x, y)$ под действием отображения T переходит в точку $M_2(x, y)$, а точка $M_2(x, y)$, в свою очередь, переходит в точку $M_3(x, y)$, то мы можем записать $M_2 = TM_1$, $M_3 = TM_2$ или $M_3 = T(TM_1) = T^2M_1$.

Рассмотрим подробнее отображение, сохраняющее площадь.



$S_1 = S_2$

Рис. 4.1. Отображение, сохраняющее площадь

Теорема 4.1: *Существует линейное невырожденное преобразование* $(x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ *приводящее* (4.1) *при* $A \quad I$, $\left|\mu_1\right| = \left|\mu_2\right| = 1$ *к виду:*

$$\begin{cases} \hat{x}' = \hat{x}\cos\alpha - \hat{y}\sin\alpha \\ \hat{y}' = \hat{x}\sin\alpha + \hat{y}\cos\alpha \end{cases},$$

где α – параметр (угол поворота).

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

4.2. Поворот

Итак, рассмотрим преобразование поворота на угол α (против часовой стрелки) без растяжения (сжатия). Оно имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (4.5)$$

Якобиан Δ этого преобразования, очевидно, равен 1.

Формула (4.5) определяет поворот относительно начала координат. Отображение, описывающее поворот относительно произвольной точки (x_0, y_0), записывается в виде:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0 \end{cases} \qquad (4.6)$$

Точка (x_0, y_0) – неподвижная точка – центр вращения.

Для примера рассмотрим два поворота: L – поворот влево относительно точки $A(0, 0)$ с углом вращения $\pi/6$ и R поворот вправо относительно точки $B(1, 0)$ с углом вращения $\pi/3$. В результате для отрезка AB на рис. 4.2 получим:

$RL(AB)=A_2B_2$, так как $L(AB)=AB_1$, $R(AB_1)=A_2B_2$;

$LR(AB)=A_1B_1$, так как $R(AB)=A_2B$, $L(A_2B)=A_1B_1$.

Заметим, что A_1B_1 и A_2B_2 параллельны и повернуты относительно AB на $\pi/6 + \pi/3 = \pi/2 \quad (90°)$.

Формально имеем

$$L:\ \begin{cases} x' = \left(\sqrt{3}x - y\right)/2 \\ y' = \left(x - \sqrt{3}y\right)/2 \end{cases} \qquad R:\ \begin{cases} x' = \left(x - \sqrt{3}y + 1\right)/2 \\ y' = \left(\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}\right)/2 \end{cases} \qquad (4.7)$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF. To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

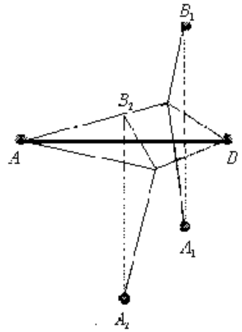


Рис. 4.2. Сочетание двух вращений

Поэтому получаем

$$RL: \begin{cases} x' = -y + 1/2 \\ y' = x - \sqrt{3}/2 \end{cases} \qquad LR: \begin{cases} x' = -y + \sqrt{3}/2 \\ y' = x - 1/2 \end{cases} \qquad (4.8)$$

Следовательно, RL и LR являются поворотом на $90°$. Положения центров вращения для RL и LR соответственно равны $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)$.

4.3. Сжатие (растяжение)

Сжатие (растяжение) связано с изменением масштаба. Перемасштабирование или центральное расширение характеризуется центром и показателем сжатия «c». Так, центральное расширение (сжатие), то есть расширение (сжатие) относительно начала координат, выражается соотношениями

$$C: \begin{cases} x' = cx \\ y' = cy \end{cases}, \qquad (4.9)$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

а центральное расширение (сжатие) относительно точки (x_0, y_0) – формулами

$$C: \quad \begin{cases} x' = c(x - x_0) + x_0 \\ y' = c(y - y_0) + y_0 \end{cases}. \qquad (4.10)$$

При $c > 1$ преобразование C определяет растяжение, а при $|c| < 1$ сжатие. Для фракталов обычно имеем $|c| < 1$. При $c = -1$ говорят об отражении, оно соответствует повороту относительно точки O на 180°.

4.4. Поворот с растяжением (сжатием)

Самым важным преобразованием подобия является поворот, скомбинированный с центральным расширением (сжатием). Определяющими характеристиками являются центр и показатель масштабирования. Поворот с расширением – это произведение преобразований: *RC* или *CR*. Здесь порядок преобразований не имеет значения.

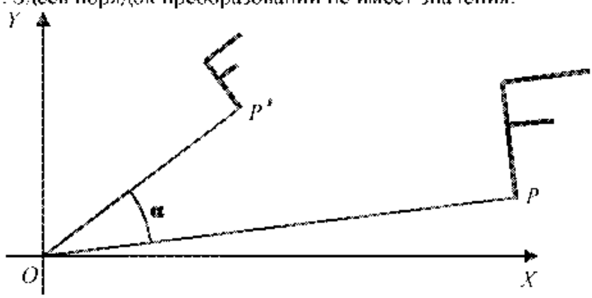


Рис. 4.3. Преобразование «*поворот растяжение*»

Преобразование «*поворот–растяжение*» относительно начала координат O имеет вид:

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}, \quad \Delta - \det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com