УДК 519.2

О ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ (ВЕКТОРНОГО) ПАРАМЕТРА ОДНОМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А.А. Губарев, Р.В. Кирик, А.С. Чернов
Донецкий национальный технический университет

В роботі запропоновано модифіковану (спільну) довіркову область з еліптичною межею для параметрів нормального розподілу (математичного очікування та дисперсії) і здійснено її порівняння з прямокутною областю, що побудована з використанням статистики Стьюдента та статистики χ^2 *Пирсона.*

Введение.

В работе анализируются (точные) доверительные области для параметра $\theta = (\mu, \sigma^2)$ одномерного нормального распределения, т.е. случайные множества ($\Theta^*(\varepsilon, X)$) параметрического пространства, «накрывающие» неизвестный параметр θ с заданной доверительной вероятностью

$$P(\Theta^*(\varepsilon, X) \ni) = 1 - \varepsilon .$$

В [1, 3, 4] для построения асимптотических доверительных множеств предлагается использовать оценки максимального правдоподобия (о.м.п.). В случае одномерного нормального распределения асимптотическая доверительная область, основанная на о.м.п., будет иметь вид [3]

$$\left\{(\mu_1, \sigma_1^2): \quad n\left(\frac{(M-\mu_1)^2}{S^2} + \frac{(S^2-\sigma_1^2)^2}{2(S^2)^2}\right) \le \chi^2_{2,1-\varepsilon}\right\}, \tag{1}$$

где n — объем выборки; $M = \sum_1^n X_i \big/ n$; $S^2 = \sum_1^n (X_i - M)^2 \big/ (n-1)$; $\chi^2_{2,1-\varepsilon}$ — квантиль уровня $1-\varepsilon$ распределения χ^2 с двумя степенями свободы; X_i — независимые и одинаково нормально (μ, σ^2) распределенные случайные величины.

Между доверительными множествами и критериями проверки гипотез существует следующая взаимосвязь: доверительному множеству (для параметра θ) соответствует область принятия гипотезы $H_1 = \{\theta = \theta_1\}$ при альтернативе $H_2 = \{\theta \ne \theta_1\}$, и наоборот, области принятия гипотезы H_1 соответствует доверительная область для параметра θ (см., например, [3]). Одним из способов сравнения оптимальности областей (одного доверительного уровня) является сравнение мощностей соответствующих критериев. В случае нормального распределения для проверки гипотезы $H_1 = \{\mu = \mu_1 \wedge \sigma^2 = \sigma_1^2\}$ при альтернативе $H_2 = \{\mu \neq \mu_1 \vee \sigma^2 \neq \sigma_1^2\}$ не существует равномерно наиболее мощного критерия [1, 2]. В [2], при малых объемах выборки, наряду с другими критериями предлагается использовать критерий, соответствующий доверительной области (1), а при больших объемах выборки — критерий, основанный на статистике Стьюдента и статистике χ^2.

Модифицированный доверительный эллипсоид

Функцию распределения случайной величины

$$G_k = n\left(\frac{(M-\mu_1)^2}{S^2} + \frac{\left(S^2-\sigma_1^2\right)^2}{k\left(S^2\right)^2}\right)$$

при $n \geq 3$ можно представить в следующем виде:

$$F_{k,\delta_1,\delta_2}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_{\frac{\delta_2}{\sqrt{1+\sqrt{ku/n}}}}^{\hat{\rho}} e^{-\rho^2/2}\rho^{n-2}d\rho \int\limits_{-\rho\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sqrt{\frac{u}{n}-\frac{(\rho^2-\delta_2^2)^2}{k\rho^4}}}^{\rho\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sqrt{\frac{u}{n}-\frac{(\rho^2-\delta_2^2)^2}{k\rho^4}}} e^{-(z-\delta_1)^2/2}dz,$$

где $\delta_1 = \sqrt{n}\,(\mu-\mu_1)/\sigma$, $\delta_2 = \sqrt{n-1}\,\sigma_1/\sigma$, $\hat{\rho} = \begin{cases} +\infty, & ku/n \geq 1; \\ \delta_2\Big/\sqrt{1-\sqrt{ku/n}}\,, & ku/n < 1. \end{cases}$

Доверительную область уровня $1-\varepsilon$ с границей эллиптической формы, которую будем называть *доверительным эллипсоидом* (следуя принятому в [3] соглашению: *n*-мерный эллипс — это поверхность, а *n*-мерный эллипсоид — тело, ею ограниченное), имеет вид

$$\left\{(\mu_1, \sigma_1^2): \quad n\left(\frac{(M-\mu_1)^2}{S^2} + \frac{\left(S^2-\sigma_1^2\right)^2}{k\left(S^2\right)^2}\right) \leq g_{k,n,1-\varepsilon}\right\}, \qquad (2)$$

где $g_{k,n,1-\varepsilon}$, квантиль распределения величины G_k, при $\mu = \mu_1, \sigma^2 = \sigma_1^2$, т.е. $g_{k,n,1-\varepsilon} = F^{-1}_{k,0,\sqrt{n-1}}(1-\varepsilon)$. При $k = 2$, эллипсоид (2) имеет форму подобную форме асимптотического эллипсоида (1).

Доверительному эллипсоиду (2) соответствует критерий с функцией мощности $W_n = 1 - F_{k,\delta_1,\delta_2}(g_{k,n,1-\varepsilon})$.

Представление о вероятности накрытия параметра асимптотическим доверительным эллипсоидом (1) при некоторых объемах выборки можно получить из рис. 1.

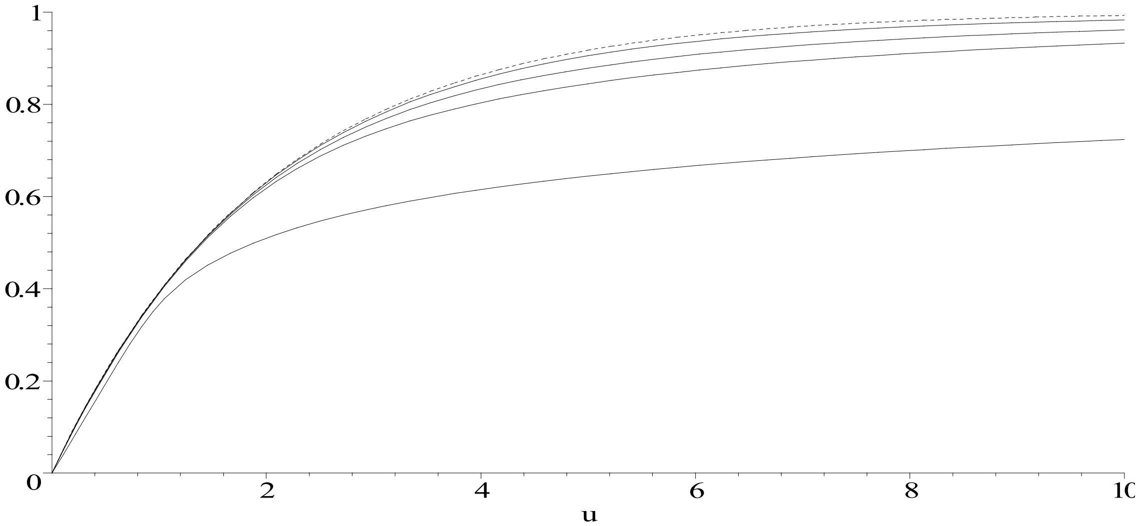

Рисунок 1. Графики функции распределения $F_{2,\,0,\,\sqrt{n-1}}$ при объемах выборки 3, 15, 30, 100 (сплошные линии) и график распределения случайной величины χ_2^2 (пунктирная линия)

Математическое ожидание площади доверительного эллипсоида

$$S_{ellipsoid} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{k}\pi}{n(n-1)^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} g_{k,\,n,\,1-\varepsilon}\sigma^2,$$

как функция *k,* имеет единственный минимум. Обозначим значение *k*, при котором $S_{ellipsoid}$ принимает минимальное значение, через $k_{\min}$, а квантиль, соответствующий значению $k_{\min}$, через $g_{\min,\,n,\,1-\varepsilon}$, и назовем *модифицированным доверительным эллипсоидом* область вида

$$\left\{(\mu_1, \sigma_1^2): \quad n\left(\frac{(M-\mu_1)^2}{S^2} + \frac{\left(S^2 - \sigma_1^2\right)^2}{k_{\min}\left(S^2\right)^2}\right) \le g_{\min,\,n,\,1-\varepsilon}\right\} \qquad (2^*)$$

При фиксированном объеме выборки, мощность рассматриваемых критериев является функцией δ_1 и δ_2. На рис. 2–5 изображены мощности, как функции одного из аргументов при фиксированной величине другого: на рис. 2 — как функции δ_1, при $\delta_2 = \sqrt{n-1}$, а на рис. 3–5 — как функции δ_2, при $\delta_1 = 0$. Мощность критерия, соответствующего доверительному эллипсоиду с $k = 2$, изображена пунктирной линией, а мощность критерия, соответствующего доверительному эллипсоиду (2*) — сплошной. Поведение мощностей, изображенных на рис. 2, качественно одинаково для всех объемов выборки и доверительных уровней, и поэтому приведено только для одного объема выборки и доверительного уровня.

Как критерий, соответствующий доверительному эллипсоиду с $k = 2$, так и критерий, соответствующий модифицированному доверительному эллипсоиду, являются несмещенными относительно альтернатив с $\sigma^2 = \sigma_1^2$ (рис. 2), но они оба будут смещенными относительно альтернатив с $\sigma^2 \neq \sigma_1^2$ (рис. 3–5). Т.е. критерии и, соответственно, доверительные области являются смещенными.

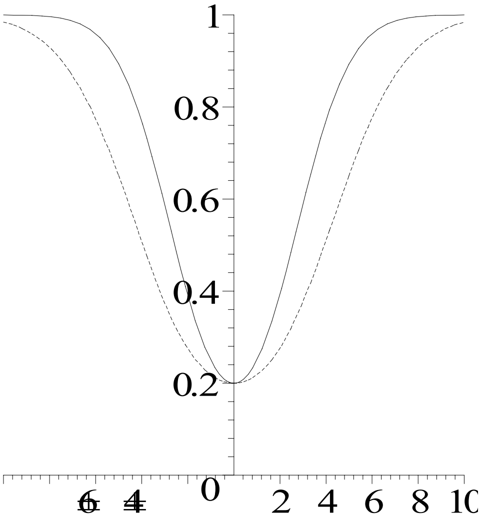

Рисунок 2. $W_3(\delta_1; \delta_2 = \sqrt{n-1})$; $1 - \varepsilon = 0.8$

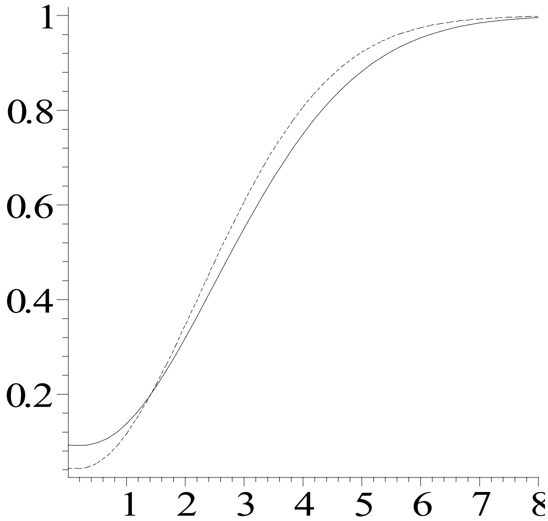

Рисунок 3. $W_3(\delta_2; \delta_1 = 0)$; $1 - \varepsilon = 0.8$

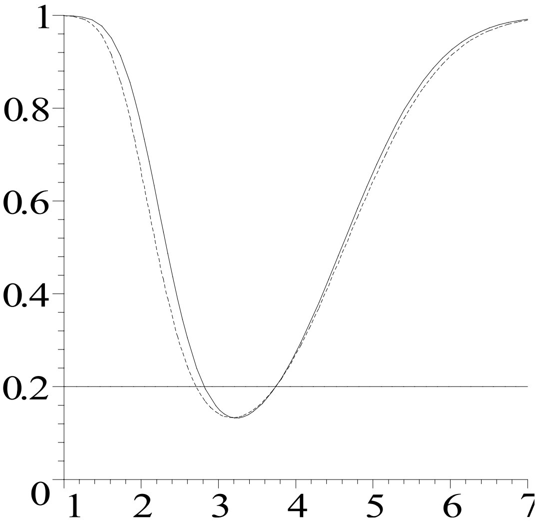

Рисунок 4. $W_{15}(\delta_2; \delta_1 = 0)$; $1 - \varepsilon = 0.8$

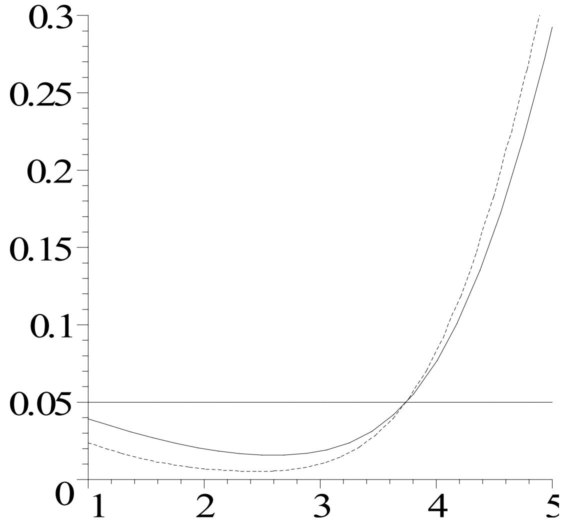

Рисунок 5. $W_{15}(\delta_2; \delta_1 = 0)$; $1 - \varepsilon = 0.95$

Ни при каких объемах выборки и доверительных вероятностей, для которых были выполнены численные расчеты, модифицированная область не являлась равномерно точнее области подобной асимптотическому эллипсоиду, хотя при некоторых объемах выборки, мощность первого критерия больше второго на большей части области определения (некоторой иллюстрацией этого служит рис. 4).

Сравнение с прямоугольной доверительной областью.

Назовем доверительным прямоугольником доверительную область

$$\left\{(\mu_1, \sigma_1^2): \begin{cases} -t_{n-1,\,1-\varepsilon_1/2} < \sqrt{n}\,(M-\mu_1)/S < t_{n-1,\,1-\varepsilon_1/2}, \\ \chi^2_{n-1,\,\varepsilon_2/2} < (n-1)\,S^2/\sigma_1^2 < \chi^2_{n-1,\,1-\varepsilon_2/2} \end{cases}\right\}, \qquad (3)$$

где $t_{n-1,\,1-\varepsilon_1/2}$ — квантиль уровня $1-\varepsilon_1/2$ распределения Стьюдента с $n-1$-ой степенью свободы, а величины ε_1 и ε_2 выбираются такими, чтобы вероятность накрытия областью параметра равнялась выбранному уровню доверия

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2)} \int\limits_{\chi^2_{n-1,\,\varepsilon_2/2}}^{\chi^2_{n-1,\,1-\varepsilon_2/2}} x^{(n-1)/2-1} e^{-x/2} dx \int\limits_0^{\frac{t^2_{n-1,\,1-\varepsilon_1/2}}{n-1}x} y^{-1/2} e^{-y/2} dy = 1-\varepsilon$$

Этим условием значения ε_1 и ε_2 определяются неоднозначно. В качестве дополнительного условия было принято условие минимума (при каждом n) математического ожидания площади доверительной области

$$S_{rectangle} = \frac{4\sqrt{2}\Gamma\big((n+2)/2\big)t_{n-1,\,1-\varepsilon_1/2}}{\Gamma\big((n-1)/2\big)\sqrt{n}\sqrt{n-1}}\left(\frac{1}{\chi^2_{n-1,\,\varepsilon_2/2}} - \frac{1}{\chi^2_{n-1,\,1-\varepsilon_2/2}}\right)\sigma^3$$

На рис. 6 и 7 построены зависимости отношения ожидания площади доверительного прямоугольника (пунктирная линия) и ожидания площади модифицированного доверительного эллипсоида (сплошная линия) к ожиданию площади асимптотического доверительного эллипсоида ($R_1 = S_{rectangle}/S_a$ и $R_2 = S_{allipsoid}/S_a$; S_a — ожидание площади (1)). На рис. 7 также построено отношение ожидания площади доверительного эллипсоида подобного асимптотическому (верхняя сплошная линия).

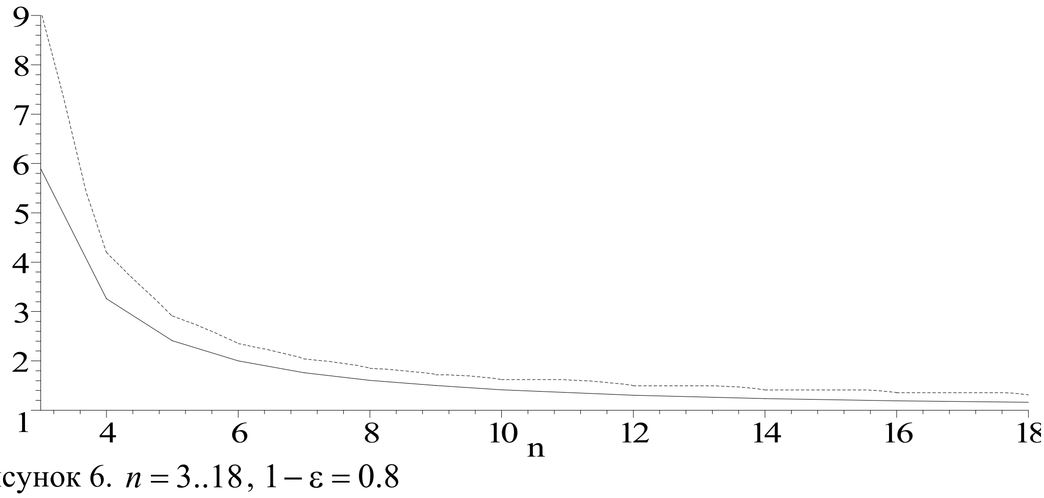

Рисунок 6. $n = 3..18$, $1-\varepsilon = 0.8$

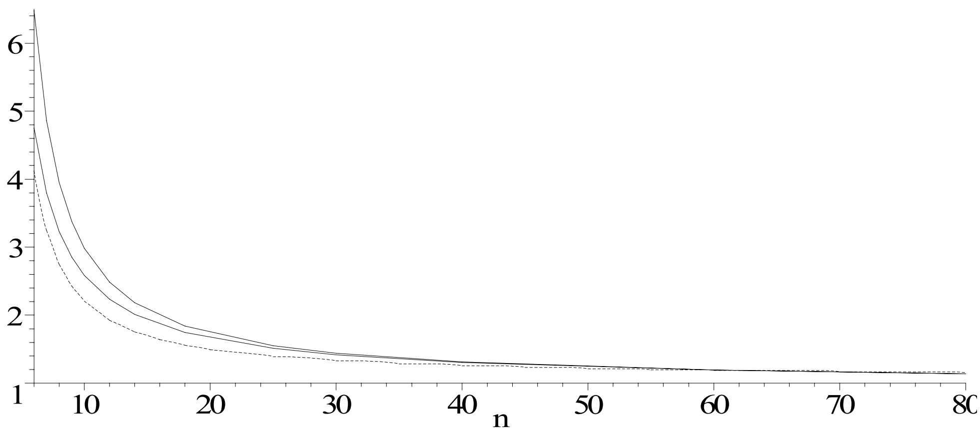

Рисунок 7. $n = 6..80$, $1-\varepsilon = 0.95$

При больших n график R_1 на рис. 7 становится выше графика R_2, (как это и следует из предела R_1, при $n \to \infty$), но на рис. 7 это видно плохо.

4. Выводы

Указанная в [2] возможность применения при малых объемах выборки критерия, соответствующего асимптотической доверительной области (1), вызывает сомнение, т.к. реальный доверительный уровень будет много меньше асимптотического. При малых объемах выборки и малой доверительной вероятности использование доверительного эллипсоида (и ему соответствующего критерия) предпочтительней использования доверительного прямоугольника, основанного на статистике Стьюдента и статистике χ^2. При большой доверительной вероятности даже при малых объемах выборки, предпочтительней последний. Заметное уменьшение средней площади при выборе значения *k,* отличного от 2 (от его значения в асимптотическом доверительном эллипсоиде), получается при больших доверительных уровнях и малом объеме выборки, но при таких значениях параметров предпочтительней (и не только в смысле средней площади) является доверительный прямоугольник.

Литература

1. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: «Наука», 1973. — 900 с.
2. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. — М.: «Мир», 1978. — 560 с.
3. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров, проверка гипотез. — М.: Наука., 1984. — 472 с.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1992. — 304 с.

Поступила в редакцию 12.01.2004.