Первоисточник: [http://fuzzy.kstu.ru/fulltext.htm]

ВЫБОР ВАРИАНТОВ В НЕЧЕТКОЙ СРЕДЕ: БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И НЕЧЕТКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ.

Лев Ч. Абаев

Российский институт стратегических исследований
125413, Москва, ул. Флотская 15, РИСИ
riss01@online.ru , *abaev_lev@mail.ru*

Проблема принятия решений или проблема выбора вариантов является одной из самых распространенных задач, возникающих практически во всех сферах деятельности: технической, экономической, социальной и т.д.

Одной из наиболее важных особенностей прикладных задач выбора является нечеткий характер критериев выбора альтернатив, их параметров, ограничений, накладываемых на возможность выбора тех или иных вариантов и т.д. Вследствие этого, во многих случаях оказывается невозможным построение адекватной математической модели исследуемой проблемы, что влечет за собой необходимость использования экспертных оценок, которые часто оказываются единственной информацией для принятия решений. Естественно, возникает необходимость разработки методов, позволяющих эффективно получать и обрабатывать нечеткую экспертную информацию.

Весьма перспективным аппаратом обработки такой информации являются методы, основанные на формализме нечетких бинарных отношений предпочтения. Эффективность этих методов определяется следующими основными моментами:

экспертам (или лицам, принимающим решения - ЛПР) предоставляется возможность оперировать не всем множеством допустимых вариантов, а лишь парами альтернатив, что существенно упрощает задачу экспертов и, соответственно, повышает надежность и объективность экспертной информации;

нечеткие отношения предпочтения (н.о.п.) позволяют, в отличие от обычных отношений, учитывать интенсивность предпочтения одних вариантов над другими, что дает возможность более адекватно описывать предпочтения экспертов.

Следует отметить, что в большинстве случаев функция принадлежности нечеткого отношения предпочтения содержательно интерпретируется как степень предпочтительности одной альтернативы над другой. Один из широко распространенных методов выбора вариантов при такой содержательной интерпретации нечеткого отношения предпочтения был предложен и обоснован в [1].

Но не менее важной и часто встречающейся в практических задачах оказывается другая интерпретация этого отношения, а именно: “степень уверенности ЛПР или эксперта в том, что одна альтернатива предпочтительнее другой” (или степень истинности высказывания “альтернатива x не хуже альтернативы y”). Такая интерпретация позволяет формализовать, например, те задачи, в которых ЛПР не может не только установить степень предпочтительности одного варианта над другим, но даже четко сравнить альтернативы, и может это сделать лишь с некоторой степенью уверенности. Однако, как будет показано ниже, предложенные в [1] методы обработки н.о.п. не в полной мере соответствуют такой содержательной интерпретации нечетких отношений. Поэтому представляется целесообразным развитие данных методов, направленное на обработку нечетких отношений предпочтения и соответствующее указанной выше содержательной интерпретации н.о.п. Этот вопрос рассматривается в разд.1 настоящей работы.

Важной особенностью реальных задач выбора является большая мощность исходного множества альтернатив, которая существенно увеличивает трудоемкость решения данных задач. Для разрешения подобной проблемы используются различные декомпозиционные процедуры, позволяющие осуществить замену исходной задачи выбора на ряд взаимосвязанных подзадач (образующих иерархическую структуру) с существенно меньшей мощностью множества анализируемых вариантов. В настоящее время разработан ряд методов декомпозиции (в частности, использующих информацию о бинарных отношениях предпочтения, заданных на множестве альтернатив), позволяющих решать задачи выбора при четкой исходной информации. В то же время, практически не разрабатывались декомпозиционные схемы решения задач выбора в нечеткой информационной среде. В разд.2 настоящей работы предлагаются “нечеткие” декомпозиционные методы решения задачи выбора и проводится их анализ.

1. Выбор вариантов на основе информации о нечетких отношениях предпочтения.

Пусть задано X-конечное множество альтернативных вариантов. Сравнение альтернатив по эффективности определяет на X нечеткое отношение предпочтения $\tilde{R}$, задаваемое функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$, показывающей степень выполнения отношения "альтернатива x не хуже альтернативы y", где $x,y \in X$. Пару $(X, \tilde{R})$ будем называть моделью выбора.

Нечеткое отношение $\tilde{R}$ позволяет сформировать нечеткое отношение доминирования $\tilde{R}^s$, показывающее степень выполнения отношения "альтернатива x лучше альтернативы y".

Для формального определения четкого отношения R^s используется понятие отношения R^{-1}, обратного к R:

$$(x,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R \tag{1.1}$$

Тогда отношение доминирования R^s можно записать в виде разности отношений R и R^{-1} :

$$R^s = R \setminus R^{-1} \tag{1.2}$$

В [1] отношения (1.1,1.2) были обобщены на нечеткий случай путем введения соответствующих функций принадлежности. Для нечеткого отношения $\tilde{R}^{-1}$ функция принадлежности имеет следующий вид:

$$\mu_{\tilde{R}^{-1}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x), \forall\, x,y \in X \tag{1.3}$$

Кроме того, использовалась операция разности нечетких множеств (а следовательно, и нечетких отношений), предложенная Л.Заде, функция принадлежности которой определяется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x), 0\} \tag{1.4}$$

Тогда нечеткое отношение доминирования $\tilde{R}^s$ описывается следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{R}^s}(x,y) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(x,y) - \mu_{\tilde{R}}(y,x), 0\} \tag{1.5}$$

Нечеткое отношение доминирования (н.о.д.) позволяет выделить нечеткое множество недоминируемых альтернатив. Напомним,что для четкого случая альтернатива x называется недоминируемой, если для любого $y \in X$ $(y,x) \notin R^s$, т.е. не существует альтернативы, которая доминировала (была строго лучше) x. В случае нечеткого отношения доминирования для любой альтернативы x величина $1-\mu_{\tilde{R}^s}(y,x)$ (являющаяся значением функции принадлежности дополнения отношения $\tilde{R}^s$) показывает степень, с которой альтернатива x не доминируется альтернативой y. Тогда величина $\min\limits_{y \in X}(1-\mu_{\tilde{R}^s}(y,x))$ показывает степень, с которой альтернатива x не доминируется всеми альтернативами, т.е. показывает степень недоминируемости альтернативы x. Это позволяет [1] сформулировать понятие нечеткого множества $X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}$, определяемого функцией принадлежности вида:

$$\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x) = \min_{y \in X}(1-\mu_{\tilde{R}^s}(y,x)), x \in X, \tag{1.6}$$

которое называется нечетким множеством недоминируемых альтернатив в модели выбора $(X,\tilde{R})$.

Подставляя (1.5) в (1.6), получим:

$$\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x) = \min_{y \in X}(1-\max\{\mu_{\tilde{R}}(y,x)-\mu_{\tilde{R}}(x,y),0\}, x \in X \tag{1.7}$$

Таким образом, нечеткое множество $X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}$ ставит в соответствие каждой альтернативе $x \in X$ степень ее недоминируемости, принимающую значения от 0 до 1. Чем больше степень принадлежности альтернативы х нечеткому множеству $X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}$, тем более эффективной является данная альтернатива. Решение задачи выбора основано на пороговой процедуре, заключающейся в том, что в выбор из множества альтернатив X попадут варианты, удовлетворяющие условию $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x) \geq \alpha$.

Таким образом, решением задачи выбора в данном случае будет множество $C(X)$, определяемое следующим образом:

$$C(X) = \{x : x \in X, \mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1] \tag{1.8}$$

Очевидно, что пороговая процедура выбора тождественна выделению α-уровня нечеткого множества недоминируемых альтернатив, т.е. $C(X) = (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_{\alpha}$.

Определение нечеткого отношения доминирования по (1.5), на наш взгляд, является вполне обоснованным в том случае, если исходное н.о.п. $\tilde{R}$ содержательно интерпретируется, как степень предпочтительности одной альтернативы над другой ("на сколько" альтернатива x предпочтительнее альтернативы y). В случае, когда $\tilde{R}$ содержательно интерпретируется, как степень истинности высказывания "альтернатива x не хуже альтернативы y" или как степень уверенности ЛПР в том, что одна альтернатива не хуже другой, определение (1.5) имеет существенный недостаток. А именно, такое определение $\tilde{R}^s$ не позволяет формализовать тот случай (естественный для вышеуказанной содержательной интерпретации $\tilde{R}$, как, впрочем, и вообще, для нечетких отношений предпочтения), когда допускается одновременное доминирование альтернативы x альтернативой y и альтернативы y альтернативой x. Действительно, из (1.5) следует, что если $\mu_{\tilde{R}^s}(x,y) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(x,y) - \mu_{\tilde{R}}(y,x), 0\} > 0$, то $\mu_{\tilde{R}}(x,y) > \mu_{\tilde{R}}(x,y)$. Но тогда $\mu_{\tilde{R}^s}(y,x) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(y,x) - \mu_{\tilde{R}}(x,yx), 0\} = 0$, т.е. альтернатива y не может быть лучше альтернативы x ни с какой положительной степенью. Таким образом, определенное по (1.5) отношение доминирования $\tilde{R}^s$ оказывается не полностью отвечающим тем требованиям, которые предъявляются к нему при соответствующей смысловой интерпретации.

Рассмотрим подход к определению нечеткого отношения доминирования в случае содержательной интерпретации $\tilde{R}$ как степени истинности высказывания "альтернатива x не хуже альтернативы y".

По аналогии с обычным четким отношением доминирования (1.2), н.о.д. $\tilde{R}^s$ определим следующим образом:

$$\tilde{R}^s = \tilde{R} \setminus \tilde{R}^{-1} \quad , \qquad (1.9)$$

где функция принадлежности нечеткого отношения $\tilde{R}^{-1}$ (обратного к $\tilde{R}$) определяется по (1.3). Однако операция разности нечетких множеств (а следовательно, и нечетких отношений), может быть определена способом, отличным от (1.4). Напомним, что операция разности обычных множеств А и В определяется следующим образом: $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, где $\overline{B}$-множество, дополняющее B до универсума. Аналогично определим и разность нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \bigcap \overline{\tilde{B}}, \tag{1.10}$$

откуда, используя операции пересечения (min{*,*}) и дополнения (1-*) нечетких множеств, получим следующую функцию принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A} \setminus \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\} \tag{1.11}$$

Используя (1.9) с учетом (1.3) и (1.11), окончательно получим:

$$\mu_{\tilde{R}^s}(x,y) = \min\{\mu_{\tilde{R}}(x,y), 1 - \mu_{\tilde{R}}(y,x),\} \quad \forall x,y \in X \tag{1.12}$$

Легко заметить, что $\tilde{R}^s$, определенное по (1.12), в отличие от $\tilde{R}^s$, определенного по (1.5), допускает возможность одновременного взаимного доминирования альтернативами друг друга. Более того, из (1.12) легко определить, что условие $\mu_{\tilde{R}^s}(x,y) = 0$ возможно лишь в том случае, если $\mu_{\tilde{R}}(x,y) = 0$ или $\mu_{\tilde{R}}(y,x) = 1$. Это полностью соответствует смыслу введенного отношения доминирования. Действительно, условие $\mu_{\tilde{R}}(x,y) = 0$ означает, что ЛПР абсолютно уверен в том, что альтернатива x не может быть предпочтительнее y. Но в этом случае x не может и доминировать y, что и формализуется равенством $\mu_{\tilde{R}^s}(x,y) = 0$. Аналогично, если ЛПР абсолютно уверен, что вариант y не хуже x ($\mu_{\tilde{R}}(y,x) = 1$), то x также не может доминировать y. Во всех же остальных случаях одновременно $\mu_{\tilde{R}^s}(x,y) > 0$ и $\mu_{\tilde{R}^s}(y,x) > 0$, что соответствует нечеткому характеру задачи выбора.

Заметим также, что если $\tilde{R}$-обычное, четкое отношение предпочтения, то определенное по (1.12) $\tilde{R}^s$ будет обычным, четким отношением доминирования.

Кроме того, если исходное нечеткое отношение $\tilde{R}$ является рефлексивным (т.е. $\mu_{\tilde{R}}(x,x) = 1 \quad \forall x \in X$), а это свойство является естественным для нечеткого отношения предпочтения, то по формуле (1.12) получим $\mu_{\tilde{R}^s}(x,x) = 0$, т.е. н.о.д. $\tilde{R}^s$ - антирефлексивное. Это соответствует смыслу отношения доминирования, поскольку никакая альтернатива не может быть лучше самой себя. Таким образом, определенное выше н.о.д. $\tilde{R}^s$ не противоречит тем требованиям, которые предъявляются к нему, исходя из содержательной трактовки этого отношения и соответствуют обычному определению отношения доминирования в случае, если $\tilde{R}$-четкое отношение.

Выделение нечеткого множества (н.м.) недоминируемых альтернатив $X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}$ в модели *(X,* $\tilde{R}$*)* основано на подходе, предложенном в [1]. Функция принадлежности н.м. недоминируемых альтернатив $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x)$ определяется по (1.6):

$$\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x) = \min_{y \in X}(1 - \mu_{\tilde{R}^s}(y,x)), x \in X$$

В отличие от [1], где $\mu_{\tilde{R}^s}(y,x)$ определялось по (1.5), будем использовать проанализированное выше определение (1.12). Тогда, подставляя (1.12) в (1.6), получим следующую функцию принадлежности $X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}$:

$$\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x) = \min_{y \in X}(1 - \min\{\mu_{\tilde{R}}(y,x), 1 - \mu_{\tilde{R}}(x,y)\}, x \in X \qquad (1.13)$$

Если в работе [1] $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x)$ содержательно интерпретируется как степень недоминируемости альтернативы *x*, то формула (1.13) имеет другую интерпретацию, а именно, определяет степень уверенности эксперта (ЛПР) в том, что альтернатива *x* является недоминируемой (степень истинности высказывания “альтернатива *x* является недоминируемой”). Таким образом, два способа определения $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x)$ отличаются друг от друга главным образом тем, что направлены на обработку, вообще говоря, принципиально разной информации, формализуемой нечетким отношением предпочтения $\tilde{R}$.

Вывод формулы (1.13) может быть основан и на принципе обобщения соответствующего определения для обычного, четкого случая. Напомним, что альтернатива $x \in X$ называется недоминируемой в модели *(X,R)*, если для $\forall x \in X \quad yRx \Rightarrow xRy$. Так как высказывание "$\forall x \in X$" эквивалентно высказыванию "для $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$", а связка "$\wedge$," в нечеткой логике формализуется оператором $\min\{\cdot\}$ [2], то нечеткий аналог высказывания "для $\forall y \in X$" будет иметь вид $\min\limits_{y \in X}\{\}$. Нечеткая логика с максиминными операциями формализует импликацию $\alpha \Rightarrow \beta$ следующим образом [2]: $\max\{1\text{-}\alpha,\beta\}$. Поэтому импликация $y\tilde{R}x \Rightarrow x\tilde{R}y$ в нечетком случае имеет вид $\max\{1\text{-}\mu_{\tilde{R}}(y,x), \mu_{\tilde{R}}(x,y)\}$. Тогда степень истинности высказывания u="альтернатива x недоминируемая в модели $(X,\tilde{R})$" будет равна $\min\limits_{y \in X}\max\{1-\mu_{\tilde{R}}(y,x),\mu_{\tilde{R}}(x,y)\}$.

Поскольку $\mu_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}}(x)$ имеет именно истинностную содержательную интерпретацию, окончательно получим следующее выражение для функции принадлежности нечеткого множества $X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}}$:

$$\mu_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}}(x) = \min_{y \in X}\max\{1-\mu_{\tilde{R}}(y,x),\mu_{\tilde{R}}(x,y)\}, \quad x \in X \tag{1.14}$$

Поскольку $1-\min\{\alpha,\beta\} = \max\{1-\alpha,1-\beta\}$, то легко видеть, что формулы (1.13) и (1.14) тождественны.

Интересным моментом является то, что при выводе (1.14) вообще не использовалось понятие нечеткого отношения доминирования, тем не менее полученные формулы оказались тождественны. Это является, на наш взгляд, аргументом в пользу корректности как нечеткого отношения доминирования, определенного по (1.12), так и нечеткого множества недоминируемых альтернатив, определенного по (1.13).

Таким образом, в рассматриваемой задаче выбора вариантов нечеткое множество недоминируемых альтернатив может быть определено как по формуле (1.7), так и по формуле (1.13), в зависимости от содержательной интерпретации нечеткого отношения предпочтения $\tilde{R}$. В дальнейшем будут рассматриваться оба варианта определения.

Процедуру выбора будем обозначать следующим образом:

$$X \to X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}} = ND(X, \tilde{R}) \to C(X) = (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_{\alpha} \qquad (1.15)$$

2. “Нечеткие” декомпозиционные методы решения задачи выбора вариантов.

Рассмотренные выше модели, использующие информацию о бинарных отношениях предпочтения, обеспечивают эффективное решение задачи выбора в случае, если множество допустимых альтернатив является конечным и имеет относительно небольшую мощность. С увеличением числа сравниваемых вариантов трудоемкость процедуры выбора (а она включает в себя и построение нечеткого отношения предпочтения, т.е. проведение экспертного опроса) значительно возрастает. Получение экспертной информации требует проведения $N^2 - N$ нечетких парных сравнений вариантов (N-число сравниваемых альтернатив). Уже при относительно небольших N число необходимых сравнений становится достаточно большим, что значительно увеличивает трудоемкость работы экспертов, а в некоторых случаях делает невозможным решение задачи выбора в заданные сроки. В связи с этим большое значение приобретают методы декомпозиции задачи выбора, заключающиеся в редукции исходной задачи на ряд взаимосвязанных подзадач, трудоемкость решения которых существенно ниже. Актуальность методов декомпозиции определяется еще и тем, что многие реальные задачи выбора имеют иерархическую структуру и, по сути, представляют собой декомпозиционную схему решения общей задачи выбора. Например, в задачах проектирования сложных технических систем (СТС) элементами такой иерархической структуры будут задачи предэскизного, эскизного и рабочего проектирования, последовательное решение которых приводит к решению общей задачи проектирования. Следовательно, декомпозиционные схемы являются способом формального представления реальных задач и могут рассматриваться в качестве их моделей.

Рассмотрим две основные схемы декомпозиции задачи (1.15) - “параллельную” и “последовательную”, на основе которых могут строиться более сложные “параллельно-последовательные” схемы декомпозиции.

“Параллельная” схема.

“Параллельная” схема декомпозиции задачи выбора (рис.1) используется в том случае, когда множество X является множеством альтернативных вариантов решения проблемы S, допускающей разбиение на подпроблемы $S_1, S_2, \ldots, S_s$, причем каждой альтернативе $x \in X$ можно сопоставить альтернативу x_j, принадлежащую X_j - множеству альтернативных вариантов решения j-й подпроблемы.

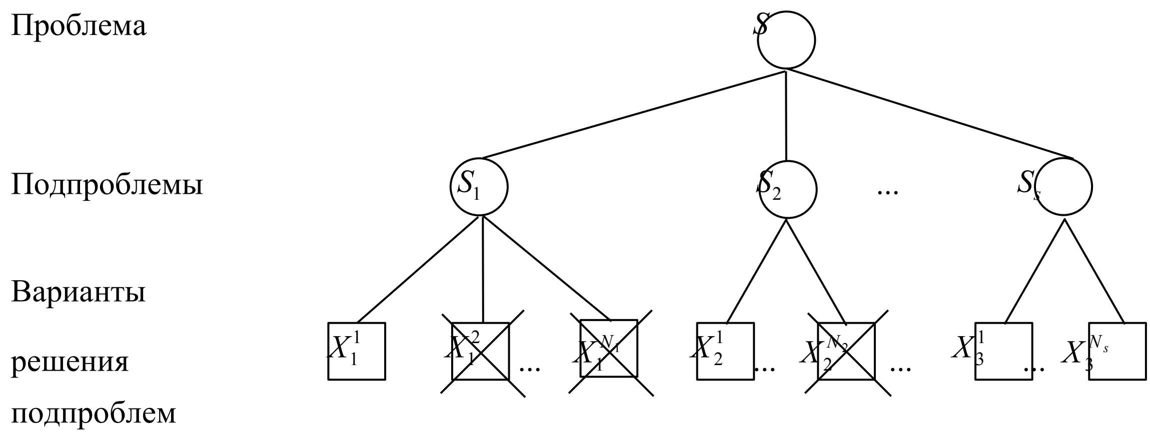

рис.1

Процедура выбора с использованием “параллельной” схемы заключается в “независимом” решении подпроблем 1,2,...,S. В результате для каждой подпроблемы выделяются “лучшие” варианты ее решения, из которых и синтезируются альтернативные варианты решения проблемы в целом. Вследствие такого подхода мощность множества альтернатив на уровне проблемы существенно уменьшается, что приводит к значительному сокращению трудоемкости решения задачи выбора (по сравнению с полным попарным сравнением всех альтернативных вариантов, получающихся как результат всевозможных комбинаций вариантов решения подпроблем S_j).

Процедура выбора с использованием “параллельной” схемы заключается в “независимом” решении подпроблем 1,2,...,*S*. В результате для каждой подпроблемы выделяются “лучшие” варианты ее решения, из которых и синтезируются альтернативные варианты решения проблемы в целом. Вследствие такого подхода мощность множества альтернатив на уровне проблемы существенно уменьшается, что приводит к значительному сокращению трудоемкости решения задачи выбора (по сравнению с полным попарным сравнением всех альтернативных вариантов, получающихся как результат всевозможных комбинаций вариантов решения подпроблем S_j).

Можно показать, что отношение трудоемкости $\mathrm{Тр}_{(\text{пар.})}$ “параллельной” схемы выбора к трудоемкости $\mathrm{Тр}$ решения задачи (1.15), основанного на полном попарном сравнении удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{\mathrm{Тр}_{(\text{пар.})}}{\mathrm{Тр}} \le \frac{S^2}{((\min\limits_j N_j)^2 - (\min\limits_j N_j))^{S-1}},$$

где N_j - число альтернативных вариантов решения j-й подпроблемы.

Легко видеть, что уже при небольших *S* и N_j, отношение $\mathrm{Тр}_{(\text{пар.})}/\mathrm{Тр}$ будет мало. Например, при S=3, $N_j \ge 3$ трудоемкость “параллельной” схемы составляет не более 25% трудоемкости “прямого” решения задачи выбора. При увеличении *S* отношение $\mathrm{Тр}_{(\text{пар.})}/\mathrm{Тр}$ очень быстро уменьшается. Поэтому эффективность “параллельной” схемы тем выше, чем более детально произведена декомпозиция проблемы на подпроблемы.

“Последовательная” схема.

“Последовательная” схема декомпозиции задачи выбора (рис.2) используется в том случае, когда возможно ввести несколько иерархических уровней описания альтернативных вариантов. Таким образом, на любом уровне j ($j = \overline{1,S}$, *S*-число уровней иерархии описаний) каждой альтернативе $x \in X$ будет поставлена в соответствие альтернатива $x_j \in X_j$, представляющая собой более агрегированное описание варианта x. При этом необходимо, чтобы на *j*-м уровне иерархии описаний каждая альтернатива x_j была “образом” нескольких альтернатив $x \in X$. Тогда мощность множеств X_j будет существенно меньше мощности исходного множества *X*.

Процедура выбора с использованием данной схемы заключается в последовательном решении задач выбора вариантов, начиная с S-го (наиболее агрегированного) уровня описания альтернатив. При этом на каждом уровне выделяется подмножество “эффективных” вариантов, которые и анализируются на последующем (более детальном) уровне описания альтернатив. Снижение трудоемкости решения задачи (1.15) в этой схеме происходит за счет малой мощности множеств X_j $(j = \overline{1,S})$ и последовательной отбраковки неэффективных вариантов на разных уровнях иерархии описаний, вследствие чего на уровне X_0 остается относительно небольшое число альтернатив.

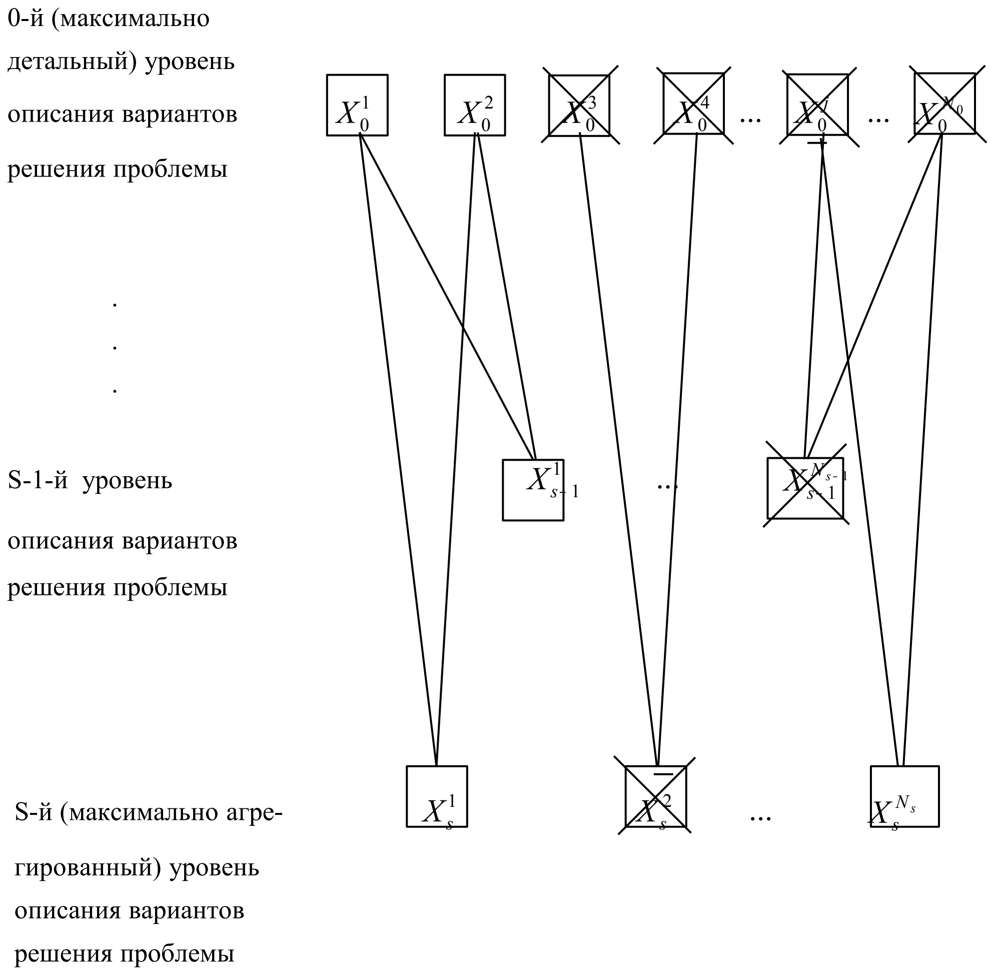

рис.2

Можно показать, что отношение трудоемкости Тр$_{(пос)}$ “последовательной” схемы выбора к трудоемкости Тр решения задачи (1.15), основанного на полном попарном сравнении, удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{\text{Тр}_{(\text{пос})}}{\text{Тр}} \le (S+1)\cdot(\min_j \max\{\omega_j, \varphi_j\})^{2s},$$

где ω_j - параметр, показывающий соотношение между числом вариантов на j-м уровне описания альтернатив и $j+1$-м уровне;

φ_j - “доля” выбираемых вариантов на j-м уровне $(\omega_j, \varphi_j \in (0,1])$.

Легко видеть, что даже для простых иерархических структур, при относительно небольших соотношениях между числом вариантов на j-м уровне описания альтернатив и $j+1$-м уровне и достаточно “нежесткой” отбраковке вариантов на различных уровнях иерархии отношение $\text{Тр}_{(\text{пос})}/\text{Тр}$ будет мало. Например, для двухуровневой иерархической структуры при $\min_j \max\{\omega_j, \varphi_j\} = 0{,}5$ (отбраковываются не более 50% альтернатив при уменьшении в 2 раза числа вариантов при переходе на предыдущий уровень иерархии) трудоемкость “параллельной” схемы составит не более 18% трудоемкости “прямого” решения задачи выбора. Как и в случае “параллельной” схемы, эффективность “последовательной” схемы декомпозиции будет очень быстро расти с увеличением S-числа уровней детализации описания альтернативных вариантов.

Таким образом, использование “параллельной” и “последовательной” схем декомпозиции позволяет существенно снизить трудоемкость решения задач выбора большой размерности. Однако применение данных схем будет корректным лишь в том случае, если решение X^*, получаемое по декомпозиционной схеме и “прямое” решение $(X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$ задачи (1.15) будут согласованными. Наиболее прозрачными, на наш взгляд, критериями согласованности решений являются следующие требования: $X^* \supseteq (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$, $X^* = (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$.

Первое означает, что при использовании декомпозиционной схемы не будет “потеряно” ни одного решения задачи (1.15) (но могут быть выделены лишние альтернативы). Такое условие является вполне обоснованным. Действительно, “прямое” решение задачи (1.15) является наиболее надежным и объективным (за счет проведения процедуры попарных сравнений альтернативных вариантов в полном объеме), что и позволяет считать его “эталонным” решением. Естественно, что декомпозиционая схема решения задачи выбора, направленная на снижение ее трудоемкости, будет корректной лишь в том случае, если позволит выделить в качестве решения все варианты, принадлежащие $(X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$.

Второе требование обеспечивает полное совпадение “прямого” решения задачи (1.15) и решения по декомпозиционной схеме. Оно является существенно более жестким (не могут быть выделены лишние альтернативы), но, естественно, декомпозиционные схемы, удовлетворяющие этому требованию, оказываются гораздо более эффективными.

Проблема определения условий, обеспечивающих корректное применение декомпозиционных схем решения задачи выбора, рассматривалась в ряде работ. В частности в [3,4] было показано, что важнейшим условием, обеспечивающим корректность декомпозиционных схем, является требование гомоморфизма моделей выбора, рассматриваемых на различных уровнях иерархии описания альтернативных вариантов. В этих работах рассматривались обычные, четкие отношения предпочтения и, соответственно, использовалось определение гомоморфизма моделей, основанных на обычных бинарных отношениях.

Определение 1. Пусть заданы модели (X,F) и (Y,G), где X,Y - множества элементов, F,G - заданные соответственно на X и Y четкие бинарные отношения и пусть задано отображение $f: X \to Y$. Отображение f называется гомоморфизмом модели (X,F) в модель (Y,G), если для $\forall\, x,y \in X$ $(xFy \Rightarrow \ f(x)Gf(y))$.

В [5] были предложены декомпозиционные методы решения задачи выбора вариантов, сравнительная эффективность которых формализовалась нечеткими отношениями предпочтения.Однако свойства этих отношений и связанные с ними понятия (в частности, гомоморфизм) были четкими, неразмытыми (эти свойства либо выполнялись для нечетких отношений, либо не выполнялись). В то же время в реальных задачах выбора вариантов достаточно часто наличие тех или иных свойств у нечетких отношений (а следовательно, и у той предметной области, которая ими формализуется) может предполагаться лишь с некоторой долей уверенности. Например, требование гомоморфизма содержательно интерпретируется (для “параллельной” схемы) как выполнение условия “лучшее решение проблемы включает в себя лучшие решения подпроблем”. Однако на практике истинность данного условия далеко не абсолютна. Действительно, “лучшие” варианты решений подпроблем могут оказаться плохо совместимыми, что существенно снизит эффективность синтезируемого из них варианта решения проблемы, в то же время альтернативный вариант решения проблемы, включающий в себя не “самые лучшие”, но хорошо “увязанные” друг с другом варианты решений подпроблем, может оказаться в конечном счете более эффективным. Естественно, что в этом случае “жесткая” отбраковка “плохих” вариантов решения подпроблем приведет к тому, что на этапе выбора “лучшего” варианта решения проблемы может выпасть из рассмотрения достаточное количество эффективных альтернатив. Аналогичная опасность существует и для “последовательной” схемы выбора (когда абсолютизируется условие “проработка лучшего агрегированного варианта приводит к получению лучшего детального варианта”).

В указанных ситуациях представляется целесообразной разработка декомпозиционных процедур, учитывающих частичную, неполную уверенность ЛПР или экспертов в истинности условий “лучшее решение проблемы включает в себя лучшие решения подпроблем”, “проработка лучшего агрегированного варианта решения проблемы приводит к получению лучшего детального варианта”. Поэтому ниже предлагаются и анализируются нечеткие декомпозиционные схемы выбора, направленные на решение подобных задач.

Формализация нечетких декомпозиционных процедур требует, как и в четком случае, введения понятия нечеткого гомоморфизма моделей выбора. Аналогично подходу, использованному при определении нечеткого множества недоминируемых альтернатив (1.14), обобщим определение 1 на нечеткий случай, определив степень истинности утверждения u=“отображение f является гомоморфизмом модели $(X, \tilde{F})$ в модель $(Y, \tilde{G})$”. Используя максиминную логику, получим: $T(u) = \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in X}} \max\{1 - \mu_{\tilde{F}}(x,y), \mu_{\tilde{G}}(f(x), f(y))\}$. В итоге придем к следующему определению.

Определение 2. Пара $(f,\ \mu^{\text{г-м}}(f))$ называется нечетким гомоморфизмом модели $(X,\tilde{F})$ в модель $(Y,\tilde{G})$, где $f: X \to Y$, а $\mu^{\text{г-м}}(f)$ определяется по формуле:

$$\mu^{\text{г-м}}(f) = \min_{\substack{x\in X\\ y\in X}} \max\{1 - \mu_{\tilde{F}}(x,y), \mu_{\tilde{G}}(f(x), f(y))\} \tag{2.1}$$

Согласно введенному определению любое отображение множества X в множество Y (где X и Y являются носителями отношений $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$) с некоторой степенью уверенности является гомоморфизмом модели $(X,\tilde{F})$ в модель $(Y,\tilde{G})$, причем значение этой степени для конкретного отображения f определяется (2.1).

Легко видеть, что в случае обычных бинарных отношений определение 2 совпадает с определением 1. Если же бинарные отношения нечеткие, а свойство гомоморфизма является четким (т.е. $\mu^{\text{г-м}}(f) = 1$), то придем к следующему определению:

Определение 3. Отображение f называется четким гомоморфизмом модели $(X,\tilde{F})$ в модель $(Y,\tilde{G})$, если для $\forall\, x,y \in X$ $(\mu_{\tilde{F}}(x,y) > 0 \Rightarrow \mu_{\tilde{G}}(f(x), f(y)) = 1)$.

Такое определение может быть названо (по аналогии с совершенными антисимметричными отношениями [6]) определением совершенного гомоморфизма.

Отметим здесь еще одно важное свойство нечетких гомоморфизмов: для $\forall\, \alpha \ge 0{,}5$ отображение $f: \mu^{\text{г-м}}(f) \ge \alpha$ является гомоморфизмом модели $(X, (\tilde{F})_\alpha)$ в модель $(Y, (\tilde{G})_\alpha)$.

Это свойство позволяет нечеткое множество гомоморфных отображений, заданных на $X \to Y$ (и у которых свойство гомоморфизма более истинно, нежели ложно) представить по теореме декомпозиции [6] в виде семейства вложенных α-уровневых четких множеств гомоморфных отображений.

Используем введенное понятие нечеткого гомоморфизма в нечетких декомпозиционных схемах выбора вариантов. Пусть на j-м уровне описания альтернатив (в “последовательной” схеме выбора) или для j-й подпроблемы (в “параллельной” схеме) задана модель выбора $(X_j, \tilde{R}_j)$, а на нулевом уровне описания (в “последовательной” схеме) или для проблемы в целом (в “параллельной” схеме) задана модель выбора ($X, \tilde{R}$) и пусть задано отображение $d_j : X \to X_j$. Для “параллельной” схемы d_j отображает альтернативный вариант решения проблемы в соответствующий ему альтернативный вариант решения j-й подпроблемы. Для “последовательной” схемы d_j ставит в соответствие альтернативному варианту решения проблемы его образ на j-м уровне иерархии описаний.

Каждой модели выбора соответствует нечеткое множество недоминируемых альтернатив с функцией принадлежности, определенной по формуле (1.6) (причем $\mu_{\tilde{R}^s}$ может определяться как по формуле (1.5), так и по формуле (2.4)).

На множестве всех подмножеств 2^X множества X зададим нечеткое бинарное отношение $\tilde{\Phi}$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\tilde{\Phi}}(Y,Z) = \min_{z \in Z} \max_{y \in Y} \mu_{\tilde{R}}(y,z) \tag{2.2}$$

Если $\mu_{\tilde{\Phi}}(Y,Z) = \beta$, то это означает, что для $\forall z \in Z$ найдется $y \in Y$ такой, что $\mu_{\tilde{R}}(y,z) = \beta$. Поэтому содержательно отношение $\tilde{\Phi}$ интерпретируется, как степень предпочтения множеством *Y* множества *Z* (или как степень истинности утверждения “множество *Y* предпочтительнее множества *Z”). Если $\tilde{R}$ - четкое отношение предпочтения, то $\mu_{\tilde{\Phi}}(Y,Z)$ может принимать значения 0 или 1, причем $\mu_{\tilde{\Phi}}(Y,Z) = 1$ тогда и только тогда, когда мнжество *Y* является внешне устойчивым в модели ($(Y \bigcup Z, \tilde{R})$. Таким образом, отношение $\tilde{\Phi}$ можно считать нечетким аналогом понятия внешней устойчивости, причем $\mu_{\tilde{\Phi}}(Y,Z)$ интерпретируется как степень внешней устойчивости множества *Y*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть отображение d_j^{-1} является нечетким гомоморфизмом модели выбора $(X_j,\tilde{R}_j)$ в модель $(2^X,\tilde{\Phi})$, где $\tilde{\Phi}$ - отношение нечеткой внешней устойчивости, заданное на подмножествах множества X, причем $\mu^{\text{г-м}}(d_j^{-1}) \geq \gamma$, где $0 \leq \gamma \leq 1$. Пусть также $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}_j}(y_j^0) = \alpha_j$ $(y_j^0 \in X_j)$ и $\alpha_j < \gamma$.

Тогда $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(y^0) \leq 1-\gamma$ для $\forall y^0 \in d_j^{-1}(y_j^0)$, если $\tilde{R}^s = \tilde{R}$.

Доказательство. Так как $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}_j}(y_j^0) = 1 - \max_{x_j \in X_j} \mu_{\tilde{R}_j^s}(x_j, y_j^0) = \alpha_j$, то $\max_{x_j \in X_j} \mu_{\tilde{R}_j^s}(x_j, y_j^0) = 1-\alpha_j$. Поэтому $\exists x_j^0 \in X_j$, такое, что $\mu_{\tilde{R}_j^s}(x_j^0, y_j^0) = 1-\alpha_j$.

Независимо от того, как определяется $\mu_{\tilde{R}_j^s}$ - по (1.5) или (1.12), выполняется неравенство $\mu_{\tilde{R}_j}(x_j^0, y_j^0) \geq \mu_{\tilde{R}_j^s}(x_j^0, y_j^0)$. Следовательно, $\mu_{\tilde{R}_j}(x_j^0, y_j^0) \geq 1-\alpha_j$. Так как $\alpha_j < \gamma$, то $\mu_{\tilde{R}_j}(x_j^0, y_j^0) > 1-\gamma$ или $1-\mu_{\tilde{R}_j}(x_j^0, y_j^0) < \gamma$. Поскольку $\mu^{\text{г-м}}(d_j^{-1}) \geq \gamma$, то по (2.1) получим

$$\min_{x_j, y_j \in X_j} \max\{1-\mu_{\tilde{R}_j}(x_j, y_j), \min_{y \in d_j^{-1}(y_j)} \max_{x \in d_j^{-1}(x_j)} \mu_{\tilde{R}}(x,y)\} \geq \gamma .$$

Так как

$$\min_{x_j, y_j \in X_j} \max\{1-\mu_{\tilde{R}_j}(x_j, y_j), \min_{y \in d_j^{-1}(y_j)} \max_{x \in d_j^{-1}(x_j)} \mu_{\tilde{R}}(x,y)\} \leq \max\{1-\mu_{\tilde{R}_j}(x_j^0, y_j^0), \min_{y^0 \in d_j^{-1}(y_j^0)} \max_{x^0 \in d_j^{-1}(x_j^0)} \mu_{\tilde{R}}(x^0,y^0)\}$$

то $\max\{1-\mu_{\tilde{R}_j}(x_j^0, y_j^0), \min_{y^0 \in d_j^{-1}(y_j^0)} \max_{x^0 \in d_j^{-1}(x_j^0)} \mu_{\tilde{R}}(x^0,y^0)\} \geq \gamma$. Поскольку $1-\mu_{\tilde{R}_j}(x_j^0, y_j^0) \leq \gamma$, то $\min_{y^0 \in d_j^{-1}(y_j^0)} \max_{x^0 \in d_j^{-1}(x_j^0)} \mu_{\tilde{R}}(x^0,y^0) \geq \gamma$. Поэтому для $\forall y^0 \in d_j^{-1}(y_j^0)$

$$\max_{x^0 \in d_j^{-1}(x_j^0)} \mu_{\tilde{R}}(x^0,y^0) \geq \gamma .$$

Так как $\tilde{R}^s=\tilde{R}$, то $\mu_{\tilde{R}^s}(x^0,y^0)=\mu_{\tilde{R}}(x^0,y^0)$. Следовательно, $\max\limits_{x^0\in d_j^{-1}(x_j^0)}\mu_{\tilde{R}^s}(x^0,y^0)\geq\gamma$.

Но $\max\limits_{x\in X}\mu_{\tilde{R}^s}(x,y^0)\geq\max\limits_{x^0\in d_j^{-1}(x_j^0)}\mu_{\tilde{R}^s}(x^0,y^0)\geq\gamma$.

Поэтому $\mu_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}}(y^0)=1-\max\limits_{x\in X}\mu_{\tilde{R}^s}(x,y^0)\leq 1-\gamma$ для $\forall\, y^0\in d_j^{-1}(y_j^0)$, ч.т.д.

Содержательно $\mu^{\text{г-м}}(d_j^{-1})$ характеризует степень уверенности в выполнении свойств “лучший вариант решения проблемы включает в себя лучшие варианты решения подпроблем”, “проработка лучшего агрегированного варианта приводит к получению лучшего детального варианта”. Соответственно, параметр γ определяет ту нижнюю границу данных свойств, с которой они выполняются гарантированно. Обычно конкретное значение γ назначается ЛПР или экспертами.

Практическое использование теоремы 1 основано на возможности отбраковки неэффективных вариантов на *j*-ом уровне описания альтернатив (или при выборе вариантов решения *j*-ой подпроблемы). Действительно, если степень недоминируемости (или степень уверенности в недоминируемости в случае другой интерпретации $\mu_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}}$) альтернативы y_j меньше параметра γ, то можно утверждать, что все прообразы этой альтернативы имеют степень недоминируемости, не большую 1-γ. Пусть, например, γ=0,7 (т.е. степень истинности высказываний “лучший вариант решения проблемы включает в себя лучшие варианты решения подпроблем”, “проработка лучшего агрегированного варианта приводит к получению лучшего детального варианта” не ниже 0,7), а $\mu_{\tilde{R}_j}^{\text{н.д.}}(y_j)=0{,}6$. Тогда по теореме 1 $\mu_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}}(y)\leq 1-0{,}7=0{,}3$ для $\forall\, y\in d_j^{-1}(y_j)$.

Если альтернативы с $\mu_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}}\leq 0{,}3$ считаются неэффективными, то в случае $\mu_{\tilde{R}_j}^{\text{н.д.}}(y_j)=0{,}6$ и $\mu^{\text{г-м}}(d_j^{-1})\geq 0{,}7$ все прообразы y_j могут быть отбракованы на *j*-м уровне иерархии, что существенно снизит трудоемкость решения задачи выбора.

Заметим, что теорема 1 верна для любых способов содержательной интерпретации $\tilde{R}$.

Доказанная теорема позволяет формализовать нечеткие декомпозиционные схемы выбора.

1. "Параллельная" нечеткая декомпозиционная схема выбора вариантов.

$$X_j \to X_j^{\text{н.д.}} = ND(X_j, \tilde{R}_j), \quad X_j^{\text{н.д.}} \to (X_j^{\text{н.д.}})_{\gamma_j}, \quad j = \overline{1,S}$$

$$X_0 = \bigcup_{j=1}^{s} d_j^{-1}((X_j^{\text{н.д.}})_{\gamma_j}) \to X_0^{\text{н.д.}} = ND(X_0, \tilde{R}) \to (X_0^{\text{н.д.}})_{\alpha} \tag{2.3}$$

2. "Последовательная" нечеткая декомпозиционная схема выбора вариантов.

$$(X_j^{\text{н.д.}})_{\gamma_j} \to (X_{j-1}^{\text{н.д.}})_{\gamma_{j-1}} = (ND(d_{j-1} \circ d_j^{-1}((X_j^{\text{н.д.}})_{\gamma_j}), \tilde{R}_{j-1}))_{\gamma_{j-1}},$$

где j=s,s-1,...,1, $(X_s^{\text{н.д.}})_{\gamma_s} = (ND(X_s, \tilde{R}_s))_{\gamma_s}$, $\tilde{R}_0 = \tilde{R}$, $\gamma_0 = \alpha$, (2.4)

$d_0 : 2^X \to 2^X$ - тождественное преобразование

Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2</u>. Пусть отображения d_j^{-1} являются нечеткими гомоморфизмами моделей выбора $(X_j, \tilde{R}_j)$ $(j = \overline{1,S})$ в модель $(2^X, \tilde{\Phi})$, где $\tilde{\Phi}$ - отношение нечеткой внешней устойчивости, заданное на подмножествах множества *X*, причем $\mu^{\text{г-м}}(d_j^{-1}) \geq \gamma_j$, где $0 < \gamma_j \leq 1$. Тогда, если $\min_j \gamma_j \geq 1 - \alpha$ ($\alpha \in [0,1]$) и $\tilde{R}^s = \tilde{R}$, то для схем (2.3) и (2.4) выполняется условие

$$(X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_{\alpha} \subseteq (X_0^{\text{н.д.}})_{\alpha}$$

Если, кроме того, множество $(X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$ является β-внешнеустойчивым, т.е. $\mu_{\tilde{\Phi}}((X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha, Z) \geq \beta$ для $\forall Z \in 2^X, Z \neq (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$, причем $\alpha+\beta>1$, то справедливо равенство

$$(X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha = (X^{\text{н.д.}}_0)_\alpha$$

<u>Доказательство</u>. Докажем теорему для параллельной схемы.

1. Доказательство включения $(X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha \subseteq (X^{\text{н.д.}}_0)_\alpha$.

Предположим противное, т.е. $\exists x^0 : x^0 \in (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$ и $x^0 \notin (X^{\text{н.д.}}_0)_\alpha$. Пусть $x^0 \in X_0$.

Так как $x^0 \in (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$, то по формуле (1.6) получим $\max\limits_{y \in X} \mu_{\tilde{R}^s}(y, x^0) \leq 1-\alpha$.

Поскольку $X_0 \subseteq X$, то $\max\limits_{y \in X_0} \mu_{\tilde{R}^s}(y, x^0) \leq \max\limits_{y \in X} \mu_{\tilde{R}^s}(y, x^0) \leq 1-\alpha$, т.е. $1-\max\limits_{y \in X_0} \mu_{\tilde{R}^s}(y, x^0) \geq \alpha$. Отсюда следует, что $x^0 \in (X^{\text{н.д.}}_0)_\alpha$, что противоречит исходному предположению. Пусть теперь $x^0 \notin X_0$. Так как $X_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{s} d_j^{-1}((X^{\text{н.д.}}_j)_{\gamma_j})$, то из условия $x^0 \notin X_0$ следует, что для любого $j = \overline{1,S}$ $x^0 \notin d_j^{-1}((X^{\text{н.д.}}_j)_{\gamma_j})$. Поэтому для $j = \overline{1,S}$ $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}_j}(x^0_j) < \gamma_j$, где $x^0_j = d_j(x^0)$. Но в этом случае по теореме 1 получим, что $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x^0) < 1-\gamma_j$. Так как $\min\limits_j \gamma_j \geq 1-\alpha$, то $1-\gamma_j < \alpha$ для любого $j = \overline{1,S}$. Поэтому $\mu^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}}(x^0) < \alpha$, т.е. $x^0 \notin (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$.

Получили противоречие, так как $x^0 \in (X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha$.

Следовательно $(X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha \subseteq (X^{\text{н.д.}}_0)_\alpha$.

2. Доказательство равенства $(X^{\text{н.д.}}_{\tilde{R}})_\alpha = (X^{\text{н.д.}}_0)_\alpha$.

Предположим, что $\exists \bar{x}: \bar{x} \in (X_0^{\text{н.д.}})_\alpha$ и $\bar{x} \notin (X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_\alpha$.

Так как $\mu_{\tilde{\Phi}}((X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_\alpha, Z) \geq \beta$ для $\forall Z \in 2^X, Z \neq (X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_\alpha$, то $\mu_{\tilde{\Phi}}((X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_\alpha, (X_0^{\text{н.д.}})_\alpha) \geq \beta$. Тогда, используя (2.2), получим $\min\limits_{x_0 \in (X_0^{\text{н.д.}})_\alpha} \max\limits_{x \in (X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_\alpha} \mu_{\tilde{R}}(x, x_0) \geq \beta$. Но это означает, что для любого $x_0 \in (X_0^{\text{н.д.}})_\alpha$ существует $x \in (X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_\alpha$, такой, что $\mu_{\tilde{R}}(x, x_0) \geq \beta$. Поскольку $\tilde{R}^s = \tilde{R}$ и $\alpha+\beta>1$, получим $\mu_{\tilde{R}^s}(x, x_0) \geq 1-\alpha$ или $1-\mu_{\tilde{R}^s}(x, x_0) \leq \alpha$. Но тогда $\mu_{\tilde{R}_0}^{\text{н.д.}}(\bar{x}) = \min\limits_{y \in (X_0^{\text{н.д.}})_\alpha} (1-\mu_{\tilde{R}^s}(y, \bar{x})) \leq 1-\mu_{\tilde{R}^s}(x, \bar{x}) \leq \alpha$. Следовательно, $\bar{x} \notin (X_0^{\text{н.д.}})_\alpha$. Получили противоречие. Следовательно, $(X_{\tilde{R}}^{\text{н.д.}})_\alpha = (X_0^{\text{н.д.}})_\alpha$.

Для “последовательной” схемы теорема доказывается аналогично.

Доказанная теорема определяет условия, обеспечивающие согласованность “прямого” решения задачи (1.15) и решений, получаемых по нечетким декомпозиционным схемам.

Заметим, что в схемах (2.3), (2.4) увеличение g приводит к более эффективной отбраковке альтернатив на j-м уровне описания (на уровне j-й подпроблемы). Это соответствует и содержательной интерпретации параметра γ_j, поскольку его увеличение означает большую уверенность в выполнении свойств “лучшее решение проблемы включает в себя лучшие решения подпроблем”, “проработка лучшего агрегированного варианта приводит к получению лучшего детального варианта”. А в этом случае, естественно, возможна более “жесткая” отбраковка неэффективных альтернатив, поскольку риск потери “хороших” вариантов существенно снизится (при увеличении γ_j). Наоборот, уменьшение параметра γ_j замедляет скорость отсева неэффективных альтернатив, так как небольшое значение γ_j не позволяет с достаточной уверенностью отсеивать агрегированные варианты или варианты подсистем и не рассматривать их на уровне детального описания (или на уровне анализа проблемы в целом). Таким образом, параметры γ_j играют роль управляющих параметров процесса выбора, что позволяет разрабатывать декомпозиционные схемы выбора с управлением.

Условие $\min_j \gamma_j \geq 1 - \alpha$ накладывает ограничение на возможность применения нечетких декомпозиционных схем. Из него следует, что чем ниже значение γ_j , тем больше должно быть значение α . А в этом случае при использовании декомпозиционных схем увеличивается вероятность того, что решение окажется пустым множеством (не найдется альтернатив, степень недоминируемости которых превышает α). И наоборот, увеличение степени истинности условий “лучшее решение проблемы включает в себя лучшие решения подпроблем”, “проработка лучшего агрегированного варианта приводит к получению лучшего детального варианта” позволяет существенно расширить диапазон значений α , для которых декомпозиционные схемы выбора оказываются корректными, что позволит в случае необходимости снизить пороговое значение α и, тем самым, гарантировать непустое решение задачи выбора. Следует заметить, что в большинстве реальных задач выбора параметры α и γ_j задаются (ЛПР или экспертами) на уровне, обычно превышающим 0,5, а в этом случае неравенство $\min_j \gamma_j \geq 1 - \alpha$ выполняется.

В заключение отметим, что такие свойства рассмотренных декомпозиционных схем, как возможность существенного снижения трудоемкости решения задач выбора, учет нечеткости как бинарных отношений предпочтения, так и “взаимосвязей” между различными уровнями иерархии описаний альтернативных вариантов, а также инвариантность к содержательной интерпретации нечетких отношений предпочтения, позволяют, на наш взгляд, использовать данные схемы при решении достаточно широкого класса задач выбора вариантов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981. - 208 с.

2. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А.Поспелова. - М.: Наука, 1986. - 396 с.

3. Вязгин В.А., Федоров В.В. Математические методы автоматизированного проектирования. - М.: Высш.шк., 1989. - 184 с.
4. Вязгин В.А. О некоторых схемах последовательного анализа вариантов в проектировании технических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1984. № 6, с.63-68.
5. Горелик А.Л., Абаев Л.Ч. О методе последовательного анализа вариантов в задачах выбора в нечеткой среде // Кибернетика и системный анализ. 1992. № 4. с.95-105.
6. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.