1 ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1 Элемент конструкции

На рис. 1.1 изображена двумерная конструкция, состоящая из отдельных частей, соединенных между собой в точках, пронумерованных от *1* до *n*. Соединения в узлах предполагаются шарнирными.

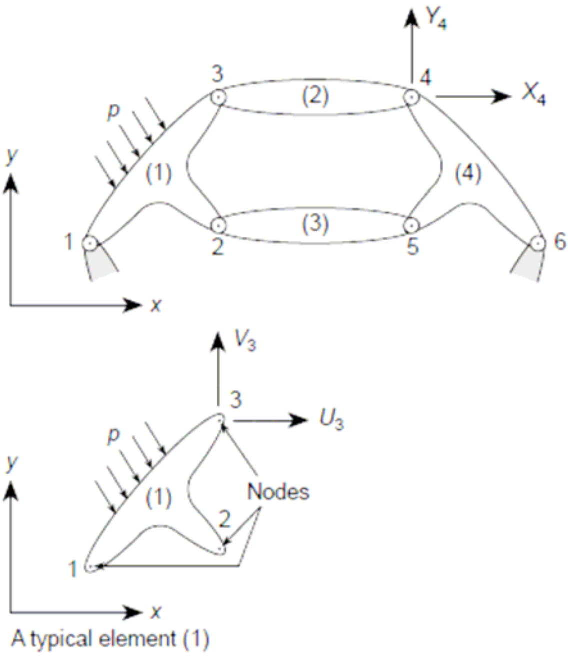

Рисунок 1.1 – Типичная конструкция, составленная из отдельных элементов

Сначала допустим, что в результате расчета или на основе экспериментальных данных достоверно известны характеристики каждого элемента. Силы, возникающие в узлах 1-3 элемента *a*, однозначно определяются перемещениями этих узлов, действующей на элемент распределенной нагрузкой *p* и его начальной деформацией. Начальная деформация может быть обусловлена температурным воздействием, усадкой или несовершенной сборкой. Силы и соответствующие им перемещения определяются компонентами *U*, *V* и *u*, *v* в какой либо системе координат. Записывая силы, действующие во всех (в тех для рассматриваемого случая) узлах элемента а, в виде матрицы), получим:

$$\mathbf{q}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^1 \\ \mathbf{q}_2^1 \\ \mathbf{q}_3^1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q}_1^1 = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}, \tag{1.1}$$

А для соответствующих перемещений узлов

$$\mathbf{a}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}, \tag{1.2}$$

Если предположить, что элемент упругий, то основные соотношения всегда могут быть записаны в виде

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{K}^1\mathbf{a}^1 + \mathbf{f}_p^1 + \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^1 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{f}_p^1$ – силы, уравновешивающие действующие на элемент распределенные нагрузки, $\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^1$ – силы в узлах, обусловленные начальными деформациями, которые могут возникать, например, при изменении температуры без перемещения узлов. Первый член в этой формуле представляет собой силы, вызванные перемещениями узлов.

Предварительный расчет или эксперимент позволяет однозначно определить напряжения в любой точке через узловые перемещения. Записывая эти напряжения в виде матрицы $\boldsymbol{\sigma}^1$, получаем соотношение в форме:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{Q}^1\mathbf{a}^1 + \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon_0}^1 \tag{1.4}$$

где последние два члена – напряжения, обусловленные распределенными нагрузками, и начальные напряжения при отсутствии узловых перемещений.

Матрица $\mathbf{K}^e$ называется матрицей жесткости элемента, а $\mathbf{Q}^e$ называется матрицей напряжения элемента.

Соотношения (1.3) и (1.4) проиллюстрированы на примере элемента с тремя узлами, в каждом из которых действуют только две компоненты силы. Ясно, что все рассуждения и определения справедливы и в более общем случае. Элемент *(2)* в рассматриваемом случае связан с соседними только в двух точках, хотя другие элементы могут иметь таких точек больше. С другой стороны, если соединения элементов считать жесткими, то требуется рассматривать по три компоненты обобщенной силы и обобщенного перемещения, причем за третьи компоненты следует принять соответственно момент вращения и угол поворота. Для жесткого соединения в трехмерной конструкции число компонент в узле равняется шести. Таким образом, в общем случае:

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^e \\ \mathbf{q}_2^e \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m^e \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{q}_i^e$ и $\mathbf{a}_i$ имеют одинаковое число компонент или степеней свободы.

Ясно, что матрицы жесткости элемента всегда будут квадратными вида:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e & \cdots & \mathbf{K}_{im}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{mi}^e & \cdots & \cdots & \mathbf{K}_{mm}^e \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{K}_{ii}^e$, – также квадратные подматрицы размерности $l \times l$, а l – число компонент силы в рассматриваемых узлах.

В качестве примера рассмотрим двумерную задачу о шарнирно опертой балке, постоянного сечения *A* с модулем упругости *E* (рис. 1.2). Балка нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой *p* и подвержена однородной температурной деформации $\varepsilon_0 = \alpha T$.

Если концы балки имеют координаты x_i, y_i то ее длина может быть вычислена как

$$L = \sqrt{[(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2]}$$

а ее угол наклона к горизонтальной оси:

$$\beta = \tan^{-1}\frac{y_n - y_i}{x_n - x_i}$$

В каждой узловой точке необходимо рассмотреть только по две компоненты силы и перемещения.

Очевидно, что узловые силы, обусловленные поперечной нагрузкой, записываются в виде матрицы

$$\mathbf{f}_p^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_p = -\begin{Bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \\ -\sin\beta \\ \cos\beta \end{Bmatrix} \frac{pL}{2}$$

Элементы этой матрицы равны соответствующим компонентам опор балки т.е. $pL/2$.

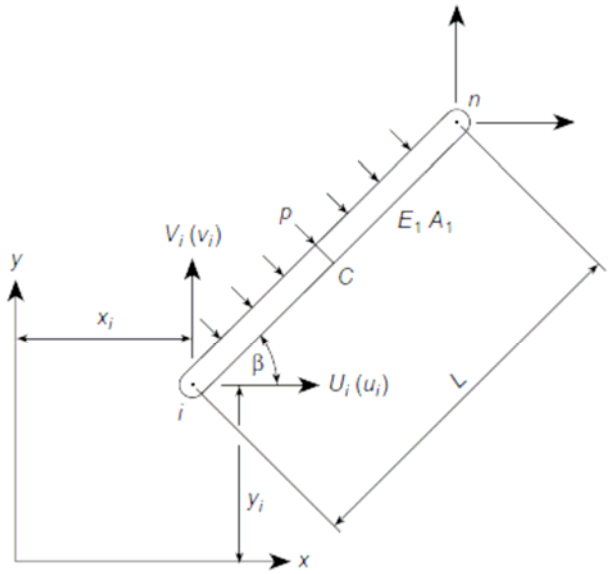

Рисунок 1.2 – Шарнирно опертая балка

Для компенсации температурного расширения ε_0 нужно приложить осевую силу $(E\alpha TA)$ компоненты которой:

$$\mathbf{f}^e_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0} = -\begin{Bmatrix} -\cos\beta \\ -\sin\beta \\ \cos\beta \\ \sin\beta \end{Bmatrix} (E\alpha TA).$$

Наконец, перемещения узловых точек элемента

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

вызовут его удлинение $(u_n - u_i)\cos\beta + (v_n - v_i)\sin\beta$. Величина удлинения, умноженная на EA/L, даст осевую силу, компоненты которой можно найти, подставив величину этой силы вместо -$E\alpha TA$ в предыдущее выражение. Стандартная форма записи имеет вид:

$$\mathbf{K}^e\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_\delta = \frac{EA}{L}\left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta & -\cos^2\beta & -\sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta & -\sin\beta\cos\beta & -\sin^2\beta \\ \hline -\cos^2\beta & -\sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ -\sin\beta\cos\beta & -\sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

Итак, для рассматриваемого простейшего случая определены все слагаемые основного уравнения (1.3). Нетрудно записать в форме (1.4) и напряжения в любом поперечном сечении элемента. Если, например, ограничиться рассмотрением среднего сечения балки С, то напряжения, возникающие в результате осевого растяжения и изгиба элемента, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\sigma}^e \approx \sigma = \frac{E}{L}[-\cos\beta, -\sin\beta, \cos\beta, \sin\beta]\mathbf{a}^e - E\alpha T,$$

где d – половина высоты сечения, а I – момент инерции. Легко заметить, что в это выражение входят все слагаемые формулы (1.4).

Для более сложных элементов требуются более тонкие приемы расчета, но все равно результаты имеют такую же форму. Инженер легко заметит, что зависимость между наклоном и прогибом, используемая при расчетах жестких рам, является частным случаем рассмотренных общих соотношений.

Следует заметить, что полная матрица жесткости для деформируемого элемента получилась симметричной (то же можно сказать и о подматрицах). Это никоим образом не случайно, а вытекает из закона сохранения энергии и его следствия – теоремы взаимности Максвелла-Бетти.

Во всех рассуждениях предполагалось, что свойства элемента описываются простыми линейными соотношениями. В принципе можно было бы получить аналогичные соотношения и для нелинейных материалов, однако обсуждение задач такого рода выходит за рамки этой монографии.

1.2 Составление ансамбля и расчет конструкции

Рассмотрим снова гипотетическую конструкцию, изображенную на рис. 1.1. Чтобы получить решение, нужно удовлетворить

а) условиям совместности и
б) условиям равновесия.

Любая система узловых перемещений,

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

записанная для конструкции, в которую входят все элементы, автоматически удовлетворяет первому условию.

Поскольку условия равновесия *внутри* каждого элемента считаются выполненными, необходимо удовлетворить условиям равновесия в узловых точках. Полученные уравнения будут содержать в качестве неизвестных перемещения. Как только они будут найдены, задачу расчета конструкции можно считать решенной. Внутренние усилия (напряжения) в элементе могут быть легко определены с помощью зависимостей, *априори* установленных для каждого элемента в виде (1.4).

Предположим, что помимо распределенной нагрузки, приложенной к каждому отдельному элементу, конструкция нагружена внешними силами

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

приложенными в узловых точках. Каждая из сил $\mathbf{r}_i$ должна иметь столько же компонент, сколько и рассматриваемые реакции элемента. В обсуждаемом примере

$$\mathbf{r}_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

так как соединения предполагались шарнирными. Однако в общем случае будет рассматриваться произвольное число компонент.

Если теперь нужно удовлетворить условиям равновесия в произвольной узловой точке *i*, то каждая из компонент R_i должна быть приравнена сумме компонент сил от всех элементов, соединяющихся в этом узле. Таким образом, рассматривая *все* компоненты силы, получаем

$$\mathbf{r}_i = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{q}_i^e = \mathbf{q}_i^1 + \mathbf{q}_i^2 + \cdots \tag{1.10}$$

где $\mathbf{q}_i^1$ – сила, приложенная к узлу со стороны элемента 1, $\mathbf{q}_i^2$ – сила, приложенная к узлу со стороны элемента 2, и т.д. Где $\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e$.

Очевидно, что отличные от нуля силы будут давать только элементы, содержащие точку *i*, однако суммирование проводится по всем элементам.

Подставляя (1.3), получаем выражения для сил в узловой точке *i*.

$$\mathbf{r}_i = \left(\sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{i1}^e\right)\mathbf{a}_1 + \left(\sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{i2}^e\right)\mathbf{a}_2 + \cdots + \sum_{e=1}^{m} \mathbf{f}_i^e \tag{1.11}$$

И здесь вклад в сумму дают только элемента, соединяющиеся в узле *i*. Объединяя все такие уравнения, имеем

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{f} \tag{1.12}$$

где подматрицы

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{ij}^e$$

$$\mathbf{f}_i = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{f}_i^e \tag{1.13}$$

получены суммированием по всем элементам. Это простое правило составления ансамбля очень удобно, поскольку сразу после определения коэффициента для отдельного элемента он может быть немедленно заслан в соответствующую ячейку памяти вычислительной машины. *Составление ансамбля является основной операцией метода конечных элементов, и поэтому она должна хорошо пониматься читателем.*

Если используются разные типы элементов, то при составлении ансамбля следует помнить, что можно складывать матрицы только одинаковой размерности. Следовательно, отдельные подматрицы, которые включаются в систему, должны содержать одинаковое число компонент сил и перемещений. Так, например, если к какому-либо элементу конструкции в узловой точке, передающей моменты, присоединен шарнирно другой элемент, то матрицу жесткости последнего необходимо дополнить, вводя соответствующие (ненулевые) значения на места углов поворота или моментов.

Систему уравнений (1.12) можно решить, как только будут подставлены перемещения опор. В примере (рис 1.1), где обе компоненты перемещений узлов 1 и 6 равны нулю, это будет означать подстановку

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

что эквивалентно уменьшению числа уравнений равновесия (в рассматриваемом случае из двенадцать) и вычеркиванию первой и последней строки и столбца. Таким образом, общее число неизвестных компонент перемещения уменьшается до восьми. Тем не менее всегда удобно составлять уравнения в соответствии с соотношением (1.12), учитывая все узловые точки.

Очевидно, что эту систему невозможно решить без задания некоторого числа перемещений, исключающих смещение конструкции как жесткого целого, так как по заданным силам нельзя однозначно определить перемещения. Этот физически очевидный факт математически выражается тем, что матрица *K* является сингулярной, т.е. не имеет обратной. Задание соответствующих перемещений по окончании формирования ансамбля обеспечивает возможность получения единственного решения путем вычеркивания соответствующих строк и столбцов различных матриц.

Несмотря на то, что подстановка известных перемещений, позволяющая уменьшить общее число решаемых уравнений, является относительно простой операцией при ручных вычислениях и может быть запрограммирована для вычислительных машин, часто оказывается удобным непосредственно решать первоначальную систему уравнений с тем, чтобы избежать реорганизации машинной памяти. Это осуществляется очень просто с помощью искусственного приема, предложенного Пейном и Айронсом [7].

При использовании такого приема вместо исключения уравнения равновесия, в котором перемещение считается заданным (а соответствующая компонента внешней силы остается неизвестной), и последующей подстановки этого перемещения в остальные уравнения, диагональный элемент *[K]* в рассматриваемой точке умножается на очень большое число. Одновременно член, стоящий в правой части уравнения, заменяется тем же самым числом, умноженным на заданное значение перемещения. В результате уравнение заменяется другим, но величина перемещения в рассматриваемом случае равна определенному значению. При этом общее число уравнений в системе остается неизменным.

1.6 Общая схема исследования

Для того, чтобы читатель мог лучше разобраться в изложенном материале, рассмотрим следующий пример. На рисунке 1.4, а изображено пять взаимосвязанных элементов. Это могут быть элементы конструкции, электрической цепи или элементы любого другого линейного типа. Решение задачи состоит из нескольких этапов.

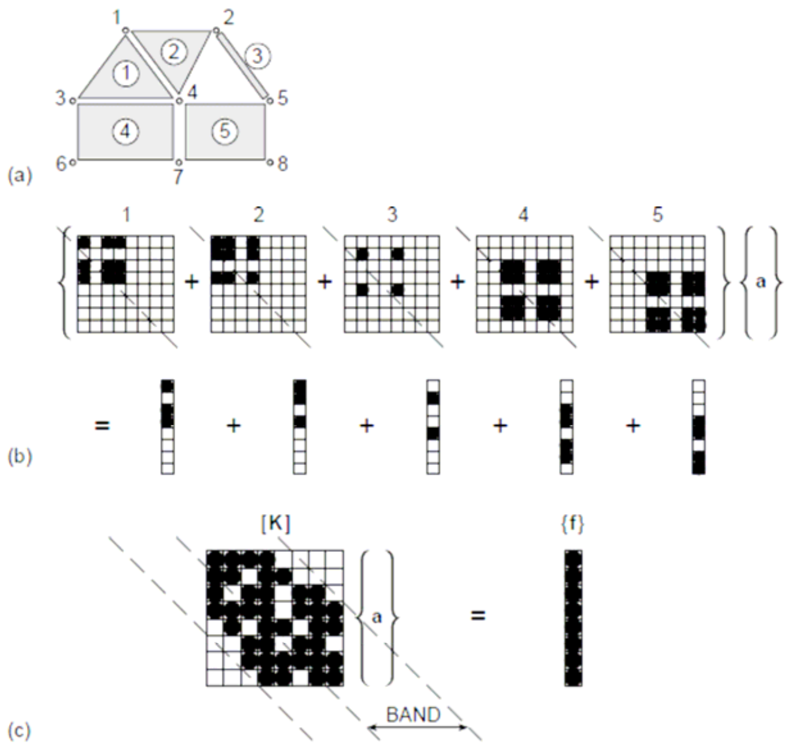

Рисунок 1.4 – Общая схема

Первый этап заключается в определении свойств элемента на основании исходных данных о его геометрии, материале и нагрузке. Для каждого элемента матрица жесткости и соответствующие узловые силы находятся в виде (1.3). Каждый элемент имеет свой собственный номер и узловые точки.

Например, элемент 1 связан с другими в узлах 1, 3, 4, элемент 2 – в узлах 1, 4, 2, элемент 3 – в узлах 2, 5, элемент 4 – в узлах 3, 4, 6, 7, элемент 5 – в узлах 4, 7, 8, 5. Определяя характеристики элемента в глобальных координатах, мы можем ввести каждую компоненту жесткости или силы на соответствующее место в глобальной матрице, как это показано на рисунке 1.4, б. Каждый зачерненный квадрат соответствует одному коэффициенту или подматрице типа (м формула) (если рассматривается более одной компоненты силы). Здесь же показан вклад каждого элемента, и читатель может проверить правильность расположения коэффициентов. Заметим, что использование различных элементов не создает дополнительных трудностей.

Второй этап – это составление полной системы уравнений типа (1.12). Она получается непосредственно путем использования соотношений (1.13) и простого суммирования всех составляющих по элементам в глобальной матрице. Результат показан на рисунке 1.4, в, где места расположения ненулевых коэффициентов зачернены.

В силу симметрии матрицы достаточно определить только элемента, расположенные не главной диагонали и над ней.

Все ненулевые коэффициенты расположены внутри ленты, ширина которой может быть определена априори для каждого вида узловых соединений. Таким образом, в оперативной памяти требуется хранить только те элементы, которые находятся в верхней части ленты. Они показаны на рисунке 1.4, в.

Третий этап состоит во включении в полную матрицу системы заданных граничных условий. Способ включения рассмотрен в следующем разделе этой книги.

Заключительный этап – решение полученной системы уравнений. Для решения могут быть использованы различные методы.