8. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$H(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{8.1}$$

Решением дифференциального уравнения является функция $x(t)$, которая обращает уравнение в тождество.

Системой дифференциальных уравнений n-го порядка называется система вида:

$$\begin{array}{c} x_1' = f_1(t, x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) \\ \ldots \\ x_n' = f_n(t, x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) \end{array} \tag{8.2}$$

Решение системы - вектор который обращает уравнения системы (8.2) в тождества:

$$x(t) = \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{array} \tag{8.3}.$$

Дифференциальные уравнения и системы имеют бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга константами. Для однозначного определения решения требуется задать дополнительные начальные или граничные условия. Количество таких условий должно совпадать с порядком дифференциального уравнения или системы. В зависимости от вида дополнительных условий в дифференциальных уравнениях различают: *задачу Коши* – все дополнительные условия заданы в одной (чаще начальной) точке интервала; *краевую задачу* – дополнительные условия указаны на границах интервала.

Большое количество уравнений может быть решено точно. Однако есть уравнения, а особенно системы уравнений, для которых точное решение записать нельзя. Такие уравнения и системы решают при помощи численных методов. Так же численные методы применяют, если для уравнений с известным аналитическим решением требуется найти числовое значение при определенных исходных данных.

Для решения дифференциальных уравнений и систем в `Scia`b предусмотрена функция:

```
[y,w,iw]=ode([type],y0,t0,t [,rtol [,atol]],f [,jac] [,w,iw])
```

для которой, *обязательными входными параметрами* являются:

`y0` – вектор начальных условий;

`t0` – начальная точка интервала интегрирования;

`t` – координаты узлов сетки, в которых происходит поиск решения;

`f` – внешняя функция, определяющая правую часть уравнения или системы уравнений (8.2);

`y` – вектор решений (8.3).

Таким образом, для того чтобы решить обыкновенное дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dt}=f(t,y),\ y(t_0)=y_0$, необходимо вызвать функцию `y=ode(y0,t0,t,f)`.

Рассмотрим необязательные параметры функции `ode`:

`type` – параметр с помощью которого можно выбрать метод решения или тип решаемой задачи, указав одну из строк:

″`adams`″ - применяют при решении дифференциальных уравнений или систем методом прогноза-коррекции Адамса;

″`stiff`″ - указывают при решении жестких задач;

″`rk`″ - используют при решении дифференциальных уравнений или систем методом Рунге_Кутта четвертого порядка;

″`rkf`″ - указывают при выборе пятиэтапного метода Рунге_Кутта четвертого порядка;

″`fix`″ - тот же метод Рунге_Кутта, но с фиксированным шагом;

`rtol,atol` - относительная и абсолютная погрешности вычислений, вектор, размерность которого совпадает с размерностью вектора `y`, по умолчанию `rtol=0.00001`, `atol=0.0000001` , при использовании параметров ″`rkf`″ и ″`fix`″ – `rtol=0.001`, `atol=0.0001`;

`jac` – матрица, представляющая собой якобиан правой части жесткой системы дифференциальных уравнений, задают матрицу в виде внешней функции вида `J=jak(t,y)`;

`w,iw` – векторы, предназначенные для сохранения информации о параметрах интегрирования, которые применяют для того, чтобы последующие вычисления выполнялись с теми же параметрами.

Рассмотрим использование функции на примере следующих задач.

ЗАДАЧА 8.1. Решить задачу Коши

$$\frac{dx}{dt}+x=\sin(xt),\ x(0)=1.5.$$

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=-x+\sin(xt),\ x(0)=1.5.$$

Далее представим его в виде внешней функции , так как показано в листинге 8.1 и применим функцию `y=ode(x0,t0,t,f)`, в качестве параметров которой будем использовать

- `f` – ссылка на предварительно созданную функцию `f(t,x)`;
- `t` – координаты сетки;

- `x0,t0` – начальное условие x(0)=1.5;
- `y` – результат работы функции.

График, моделирующий процесс, описанный заданным уравнением, представлен на рис.8.1.

```
-->function yd=f(t,x),yd=-x+sin(t*x),endfunction;
-->x0=1.5;t0=0;t=0:1:35;
-->y=ode(x0,t0,t,f);
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.1

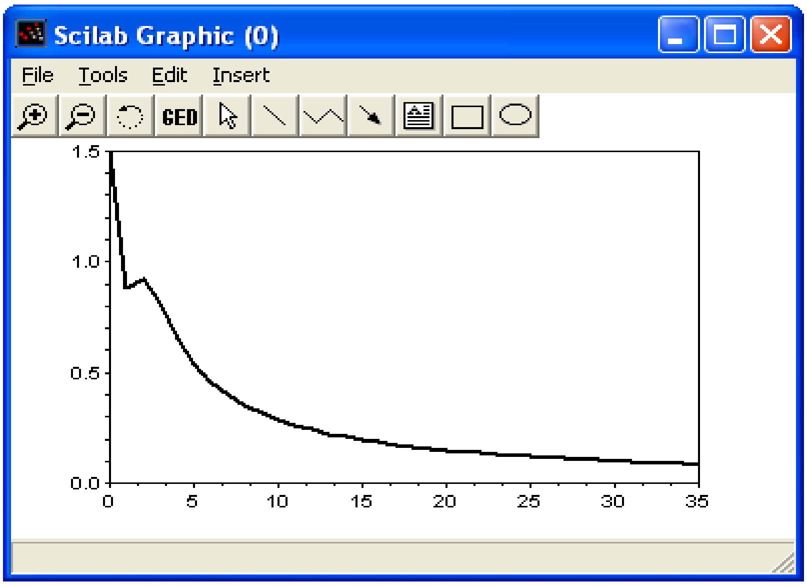

Рис. 8.1. Решение дифференциального уравнения из задачи 8.1

ЗАДАЧА 8.2. Решить задачу Коши

$$x'=\cos(x\,y),$$
$$y'=\sin(x+t\,y),$$
$$x(0)=0, y(0)=0.$$

на интервале [0; 10].

Листинг 8.2 содержит функцию, описывающую заданную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и команды `Sciab` необходимые для ее численного и графического решения (рис.8.2).

```
>>%Функция, описывающая систему дифференциальных уравнений
-->function dy=syst(t,y)
-->dy=zeros(2,1);
-->dy(1)=cos(y(1)*y(2));
-->dy(2)=sin(y(1)+y(2)*t);
-->endfunction
>>%Решение системы дифференциальных уравнений
-->x0=[0;0];t0=0;t=0:1:10;
-->y=ode(x0,t0,t,syst);
>>%Формирование графического решения
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.2

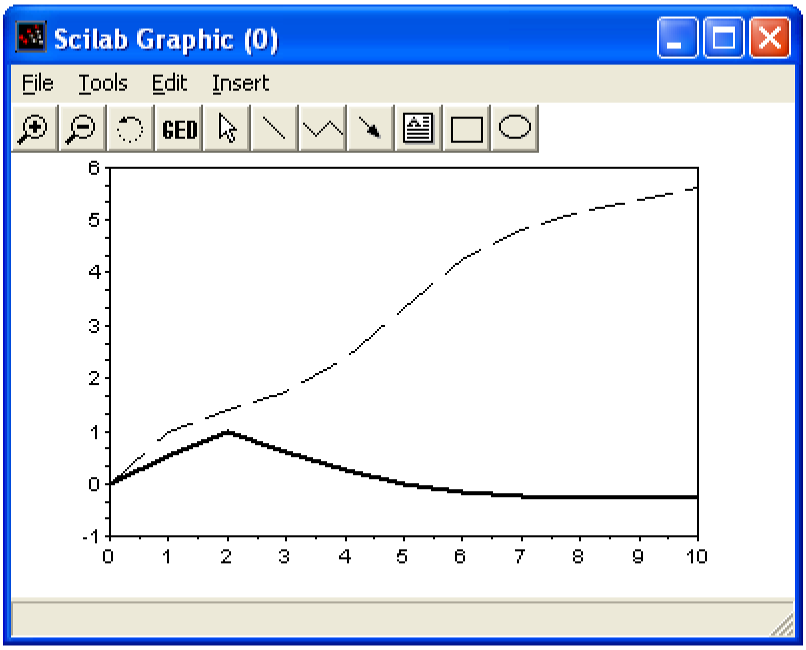

Рис. 8.2. Решение задачи 8.2

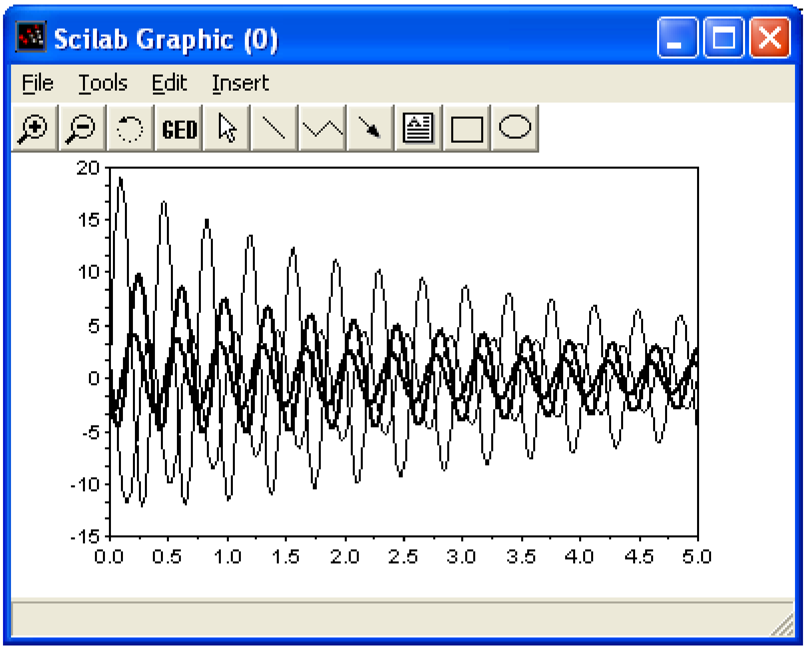

Рис. 8.3. Графическое решение жесткой системы

ЗАДАЧА 8.3. Найти решение задачи Коши для следующей жесткой системы:

$$\frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} 119.46 & 185.38 & 126.88 & 121.03 \\ -10.395 & -10.136 & -3.636 & 8.577 \\ -53.302 & -85.932 & -63.182 & 54.211 \\ -115.58 & -181.75 & -112.8 & -199 \end{pmatrix} X\,;\, X(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Решение системы показано в листинге 8.3. Графическое решение показано на рис. 8.3.

```
-->B=[119.46 185.38 126.88 121.03;-10.395 -10.136 -3.636 8.577;
-->-53.302 -85.932 -63.182 -54.211;-115.58 -181.75 -112.8 -199];
-->function dx=syst1(t,x), dx=B*x,endfunction
-->function J=Jac(t,y),J=B,endfunction
-->x0=[1;1;1;1]; t0=0; t=0:0.01:5;
```

```
-->y=ode("stiff",x0,t0,t,syst1,Jacobian);
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.3

ЗАДАЧА 8.4. Решить нелинейную жесткую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -7x_1 + 7x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 157x_1 - 1.15x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0.96 x_1 x_2 - 8.36 x_3 \end{cases}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

На рис. 8.4 показано решение системы на интервале [0; 2]. Команды Sciab необходимые для достижения этого решения приведены в листинге 8.4.

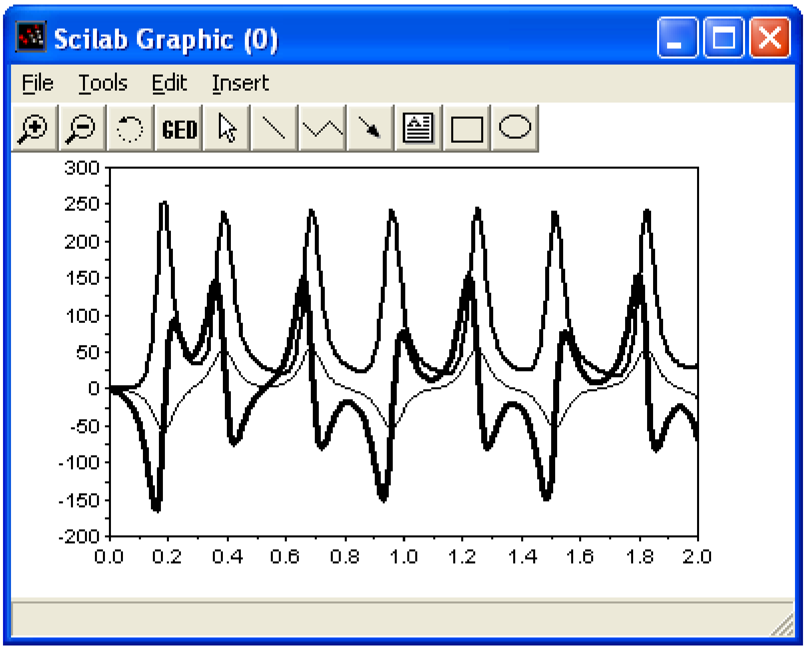

Рис. 8.4. Решение жесткой нелинейной системы

```
//Функция задающая систему ОДУ
function dx=syst2(t,x)
dx=zeros(3,1);
dx(1)=-7*x(1)+7*x(2);
dx(2)=157*x(1)+x(2)-1.15*x(1)*x(3);
dx(3)=0.96*x(1)*x(2)-8.36*x(3);
endfunction
-->>//Решение ОДУ
-->x0=[-1;0;1]; t0=0; t=0:0.01:2;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.4

ЗАДАЧА 8.5. Решить следующую краевую задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13 = e^{\sin(t)}, \; x(0.25) = -1, \; x'(0.25) = 1.$$

на интервале [0.25; 2].

Преобразуем уравнение в систему, сделав замену $y=\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}=-4y-13x+e^{\sin(t)},\ \frac{dx}{dt}=y,\ y(0.25)=1,\ x(0.25)=-1.$$

Составим функцию вычисления системы и решим ее так, как показано в листинге 8.5. График решения приведен на рис. 8. 5.

```
function F=FF(t,x)
F=[-4*x(1)-13*x(2)+exp(t);x(1)];
endfunction
-->//Решение системы дифференциальных уравнений
-->X0=[1;-1];t0=0.25;t=0.25:0.05:2;
-->y=ode("stiff",X0,t0,t,FF);
-->//Вывод графика решения
-->plot(t,y)
```

Листинг 8.5

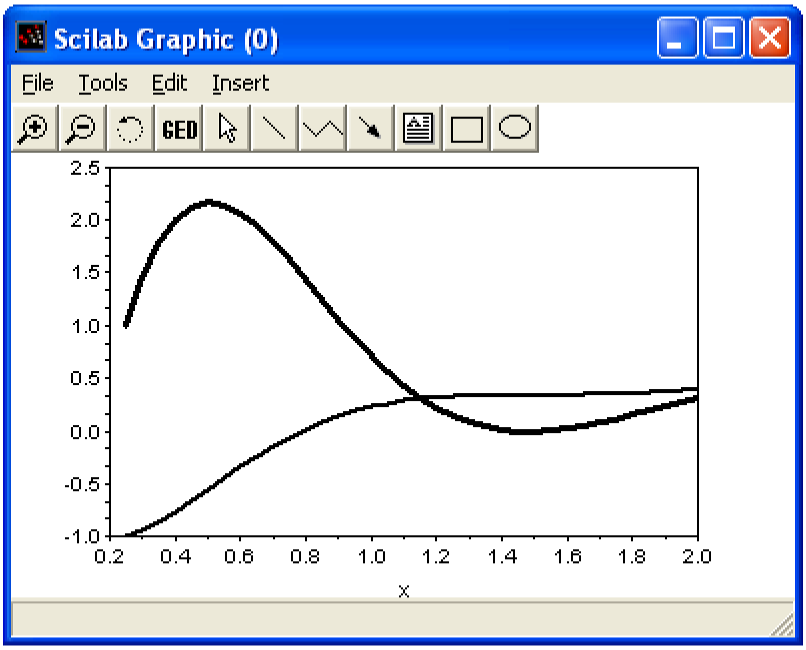

Рис.8.5. Решение задачи 8.5