УДК 669. 046: 536.12

К РАСЧЁТУ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ НАГРЕВЕ ТЕЛ В ДВИЖУЩЕМСЯ СЛОЕ

А.Д. Горбунов, Е.Л. Глущенко

Днепродзержинский государственный технический университет

Получены достаточно простые и эффективные приближённые и точные формулы для расчёта температурной разности при нагреве плоских тел.

Ключевые слова

Температурное поле, нагрев, движущийся слой, прямоток, противоток.

Условные обозначения

θ - относительная температура; Fo - число Фурье; Bi - число Био; W - отношение теплоёмкостей потоков; μ_n - корни уравнения: $\mathrm{ctg}\,\mu_n = \mu_n / \mathrm{Bi} + \mathrm{W}/\mu_n$.

Введение

Точные аналитические решения конвективного нагрева плоских тел в среде с переменной температурой газа в прямотоке и противотоке известны, например, [1]. Однако, наибольшую и основную трудность при практических расчетах температур представляет определение бесчисленного множества корней μ_n. В статьях [2, 3] разработан общий подход к аналитическому решению уравнений трансцендентного типа.

1. Постановка задачи

При определении термических напряжений важнейшей характеристикой является перепад температур между поверхностью и центром тела. В настоящее время отсутствуют, в основном по причинам, изложенным выше, простые формулы для аналитического расчёта температурной разности.

Цель данной работы – получение этой зависимости.

Согласно [1] динамика изменения во времени температурной разности:

$$\Delta\theta(Fo) = \theta_n(Fo) - \theta_ц(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu_n)\cdot e^{-\mu_n^2 Fo} = \sum P_n(\mu_n)\cdot(1 - 1/\cos\mu_n)\, e^{-\mu_n^2 Fo}, \qquad (1)$$

где $P_n(\mu_n) = 2Bi\left(\mu_n^2 + BiW\right) \Big/ \left[(Bi+1)\,Bi\mu_n^2 - Bi^2W + \left(\mu_n^2 + BiW\right)^2\right].$

2.1 Решение задачи

Анализ уравнения (1) показал, что разность температур сначала резко возрастает, достигая максимального значения при числе Фурье Fo_{max}, а затем постепенно падает. Выведем приближенную аналитическую формулу для расчетов Fo_{max}. Дифференцируя уравнение (1) по времени, приравнивая производную нулю и используя два члена разложения в сумме ряда, получим:

$$Fo_{max} = 1 \Big/ \left(\mu_2^2 - \mu_1^2 \right) * ln\left(-\mu_2^2 E_2 \left(\mu_2\right) \Big/ \mu_1^2 E_1 \left(\mu_1\right) \right). \qquad (2)$$

При известном Fo_{max} максимальную разность температур $D\ \theta_{max}$ можно определить по уравнению (1), полагая в нём число Фурье $Fo = Fo_{max}$.

3.1 Анализ решения

Для простоты анализа рассмотрим частный нагрев пластины при W=0, т.е. при граничных условиях III рода и постоянной температуре газов. В двух предельных случаях (малые и большие числа Био) уравнение (2) существенно упрощается.

Малые числа Био. Используя данные [3] для первого $\mu_1 = \sqrt{Bi}$ и второго корней $\mu_2 = \pi + Bi/\pi$ и разложение тригонометрических функций в ряд при малых аргументах, получим:

$$\mathrm{Fo_{max}} = \frac{1}{\pi^2} \ln(8/\mathrm{Bi}). \qquad (3)$$

Уравнением (3), с погрешностью менее 5%, можно пользоваться при числах $Bi < 0{,}8$, получая чуть заниженные результаты по сравнению с расчетом по (2).

При больших числах Фурье для расчета максимальной температурной разности по уравнению (2) можно ограничиться одним членом ряда

$$\Delta\theta_{\max} = \mathrm{P_1}(1 - 1/\cos\mu_1) e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo_{max}}} \cong -\frac{\mathrm{Bi}}{2} e^{-\mathrm{Bi}\mathrm{Fo_{max}}}. \qquad (4)$$

Большие числа Био. Согласно [3] при больших Bi корни $\mu_n \approx a_n (1 - 1/Bi)$, где $a_n = (2\pi - 1) \cdot \pi/2$. Поступая аналогичным образом, будем иметь:

$$Fo_{max} = ln3 \Big/ \left(2\pi^2 (1 - 1/Bi)^2 \right) = 0{,}05566 / (1 - 1/Bi)^2. \qquad (5)$$

Относительная погрешность уравнения (5) при числах $\mathrm{Bi} > 60$ не превышает 8,6%, хотя абсолютные значения времени $\mathrm{Fo_{max}}$ отличаются в третьем знаке после запятой.

При средних числах Био следует использовать общее решение (2), по которому легко может быть построена зависимость Fo_{max} и $D\ \theta_{max}$ от числа Био.

На рисунке 1 представлены результаты расчётов по уравнениям (2) и (1) важнейших характеристик температурного поля: температуры поверхности, максимальной температурной разности и времени наступления этого максимума.

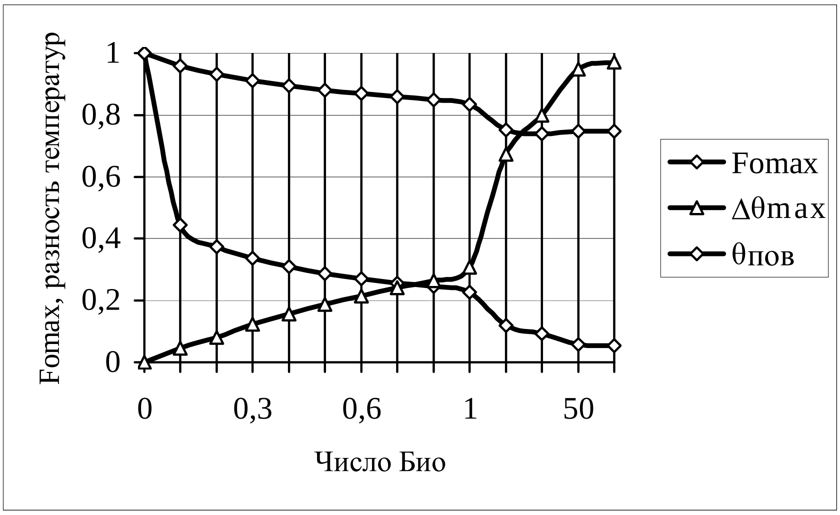

Рисунок 1 – Зависимость от числа Био времени Fomax наступления максимальной разности температур $\Delta\theta max$ и поверхностной температуры θпов.

Аналогичный анализ можно провести и для случая $W \neq 0$.

Выводы

Умение аналитически рассчитывать корни характеристического уравнения позволило получить простую формулу для определения максимальной температурной разности, возникающей при нагреве массивных плоских тел в прямотоке и противотоке.

Литература

1. Гольдфарб Э. М. Теплотехника металлургических процессов. М: Металлургия, 1967. 493 с.
2. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э.М. Определение корней трансцендентных уравнений при нагреве тел в прямотоке и противотоке //ИФЖ. 1984. Т. 46, №5. С. 870-871.
3. Горбунов А. Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности пластины при неоднородных граничных условиях// Изв. Вузов.Чёрная металлургия.1983. №8. С.104-108.