Линейная фильтрация случайных электроэнергетических процессов: унификация расчетов

Куренный Э. Г., Черникова Л. В.

Донецкий государственный технический университет
(Украина, 340000 г. Донецк, ул. Артема, 58)

Постановка задачи. Линейные фильтры являются составной частью математических моделей в электроэнергетике. Фильтр моделирует реакцию $Y(t)$ рассматриваемого объекта к входному процессу $X(t)$. Он описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка (во фликерметре $n = 4$ [1]).

Для краткости будем рассматривать случайный процесс $X(t)$, как стационарный. Он имеет следующие характеристики: среднее значение $\overline{X}$, дисперсия D_X, корреляционная функция $K_X(\tau)$ или спектральная плотность $G_X(\omega)$ – не зависят от времени t. Формулы для расчета соответствующих характеристик процесса после фильтрации хорошо известны (например, [2]):

$$\overline{Y}(t) = \overline{X} \cdot H(t)\,, \tag{1}$$

$$K_Y(\tau,t) = \int_0^t\int_0^t H'(v)H'(w)K_X(v-w+\tau)dvdw\,, \tag{2}$$

где $H(t)$ – отклик фильтра на единичную функцию, v и w – переменные интегрирования, τ – аргумент. Дисперсия

$$D_Y(t) = K_Y(0,t)\,. \tag{3}$$

Определение функции корреляции сопряжено с громоздкими выкладками, поскольку в каждой задаче по функции передачи $W_n(s)$ фильтра необходимо находить отклик $H(t)$ и выполнять двойное интегрирование. В статье предлагаются методы унификации расчетов, которые позволяют свести решение к определению корней s_1, s_2, …, s_n характеристического уравнения без последующего интегрирования.

Два вида объединения. Идея объединения заключается в том, что исходная модель (рис. 1, *а*) заменяется параллельно включенными апериодическими звеньями первого порядка (далее – просто «звенья»). Каждое звено характеризуется коэффициентом передачи k и постоянной времени J или параметром $\gamma = 1/J$. Звено имеет функцию передачи

$$W_J(s) = \frac{k}{Js+1}$$

и отклик

$$h(t) = k(1-e^{-\gamma t})\,. \tag{4}$$

Такая замена позволяет представить процесс на выходе фильтра в виде суммы “парциальных” реакций $y(t)$ каждого звена на входной процесс $X(t)$.

После подачи на вход фильтра стационарного процесса на его выходе начинает протекать переходный случайный процесс, а при $t \to \infty$ наступает стационарное состояние. Если согласно условиям задачи требуется изучение процесса $Y(t)$ на всем интервале t от 0 до ∞, то форма входного процесса оставляется без изменений, а фильтр заменяется звеньями в количестве n (рис. 1, *в*). Такое объединение по виду процесса будет называться частичным объединением.

Если же рассматривается только стационарное состояние, то возможно полное объединение (знак ~). В этом случае процесс $X(t)$ представлен как результат прохождения белого шума $\xi(t)$ через гипотетический фильтр с функцией передачи $W_X(s)$ и порядком m соответствующего характеристического уравнения (рис. 1, *c*). В результате система с функцией передачи

$$\tilde{W}_N(s) = W_X(s) \cdot W_n(s) \tag{5}$$

имеет порядок $N = n + m$ и представляется таким же количеством звеньев (рис. 1, *d*). Процесс $Y(t)$ равен сумме N парциальных реакций $\tilde{y}(t)$.

Частичное объединение. Пусть функция передачи фильтра представляет собой отношение двух многочленов: $Q(s)$ со степенью меньше n и $P_n(s)$ степени n. Знаменатель может быть представлен как произведение

$$P_n(s) = a_0 \prod_{r=1}^{n} (s - s_r),$$

где a_0 – коэффициент при s^n.

При отсутствии нулевых и кратных корней характеристического уравнения $P_n(s) = 0$ разложение

$$W_n(s) = \sum_{r=1}^{n} \frac{c_r}{s - s_r} \tag{6}$$

справедливо. В выражении (6)

$$c_r = \frac{Q(s_r)}{P_n^r(s_r)} = \left. \frac{Q(s_r)}{a_0 \prod_{r=1}^{n} (s - s_r)} (s - s_r) \right|_{s = s_r}. \tag{7}$$

Вынося величину ($-s_r$) из знаменателя в (6), мы получим следующее выражение

$$W_n(s) = \sum_{r=1}^{n} \frac{c_r / (-s_r)}{s / (-s_r) + 1},$$

из которого формулы (8), (9) для определения параметров r-го звена:

$$J_r = -1/s_r\,, \qquad \gamma_r = -s_r \tag{8}$$

$$k_r = -c_r / s_r = c_r \cdot J_r = c_r / \gamma_r \tag{9}$$

Обычно фильтр состоит из элементарных звеньев, поэтому нахождение корней даже при больших n не встречает затруднений. Например, знаменатель функции передачи фильтра фликерметра есть произведение квадратного многочлена и двух многочленов первой степени [1], что исключает необходимость в решении биквадратного характеристического уравнения.

Согласно (1) и (4) среднее значение r-й парциальной реакции

$$\bar{y}_r = \bar{X} k_r (1 - e^{-\gamma_r t}).$$

Среднее значение суммы реакций

$$\bar{Y}(t) = \bar{X} \sum_{r=1}^{n} k_r (1 - e^{-\gamma_r t}). \tag{10}$$

Парциальную дисперсию r-й реакции вычислим с учетом (4) по формуле (2) при $\tau = 0$:

$$D_r = \frac{k_r^2}{\gamma_r^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\gamma_r u} e^{-\gamma_r v} K_X(u - v) du dv. \tag{11}$$

Так как на входы звеньев поступает один и тот же процесс, то парциальные реакции являются коррелированными. Взаимный корреляционный момент между r-й и l-й реакциями вычисляется по формуле

$$b_{rl}(t) = \frac{k_r k_l}{\gamma_r \gamma_l} \int_0^t \int_0^t e^{-\gamma_r u} e^{-\gamma_r v} K_X(u - v) du dv, \tag{12}$$

которая аналогична формуле (11).

Искомая дисперсия

$$D_Y(t) = \sum_{r=1}^{n} D_r(t) + 2 \sum_{r \neq l} b_{rl}(t). \tag{13}$$

Общее количество слагаемых в формуле (13) равно

$$n + c_n^2 = n(n-1)/2.$$

Для корреляционных функций, которые встречаются на практике, интегрирование дает решение в ограниченной форме. Например, в случае экспоненциальной функции

$$K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|} \tag{14}$$

с параметром α мы можем получить:

$$D_r(t) = D_X \frac{k_r^2}{\gamma_r(\alpha^2 - \gamma_r^2)} \left[\alpha - \gamma_r + (\alpha + \gamma_r) e^{-2\gamma_r t} + 2\gamma_r e^{-(\alpha + \gamma_r) t}\right], \tag{15}$$

$$b_{rl}(t) = D_X k_r k_l \gamma_r \gamma_l \left[\frac{1 - e^{-(\gamma_r + \gamma_l)t}}{\gamma_r + \gamma_l} \left(\frac{1}{\alpha - \gamma_r} + \frac{2}{\alpha - \gamma_l}\right) - \frac{1 - e^{-(\alpha + \gamma_r)t}}{(\alpha + \gamma_r)(\alpha - \gamma_l)} - \frac{1 - e^{-(\alpha + \gamma_l)t}}{(\alpha - \gamma_r)(\alpha + \gamma_l)}\right]. \tag{16}$$

В стационарном режиме

$$D_r = D_X \frac{k_r^2}{\gamma_r(\alpha + \gamma_r)}, \tag{17}$$

$$b_{rl} = D_X k_r k_l \gamma_r \gamma_l \frac{\gamma_r + \gamma_l + 2\alpha}{(\gamma_r + \gamma_l)(\alpha + \gamma_r)(\alpha + \gamma_l)}. \tag{18}$$

Параметры звеньев могут быть комплексными величинами, но при суммировании в (10) и (13) члены с множителем $j = \sqrt{-1}$ взаимно сокращаются. Таким же образом находится решение и для $\tau > 0$. Однако для краткости это не представлено здесь.

Таким образом, частичное объединение сводится к суммированию алгебраических выражений без интегрирования.

Полное объединение. Для стационарного режима характеристики процесса $Y(t)$ могут быть вычислены не только по формулам (1) и (3) при $t \to \infty$, но и через спектральную плотность $G_X(\omega)$ входного процесса и амплитудно-частотную функцию (АЧФ) $A(\omega)$ фильтра:

$$\overline{Y} = \overline{X} \cdot A(0), \qquad D_Y = \int_0^\infty G_X(\omega) \cdot A^2(\omega) d\omega, \tag{19}$$

где ω - угловая частота.

Исходя из условия воспроизводства дисперсии или спектральной плотности $G_X(\omega)$, мы найдем тип и параметры линейного фильтра, который преобразует белый шум. Белый шум имеет постоянную спектральную плотность, которая равна величине c_ξ, поэтому для выполнения этого условия АЧФ гипотетического фильтра должна иметь вид

$$A_X(\omega) = \sqrt{G_X(\omega)/c_\xi}. \tag{20}$$

По виду этой АЧФ фильтра выбирается фильтр с соответствующей функцией передачи $W_X(s)$ и порядком m. В последующих выкладках величина c_ξ сокращается, поэтому в расчетах целесообразно принять $c_\xi = 1$. Однако для общности сохраним эту величину.

В качестве примера рассмотрим процесс с экспоненциальной функцией корреляции (14), у которого спектральная плотность

$$G_X(\omega) = D_X \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Если мы заменим это выражение $G_X(\omega)$ в формуле (20), то мы получим

$$A_X(\omega) = \sqrt{\frac{2\alpha}{c_\xi \pi(\alpha^2 + \omega^2)}}.$$

Линейное апериодическое звено имеет АЧФ такой формы:

$$A_X(\omega) = \frac{k_X}{\sqrt{1 + \omega^2 J_X^2}},$$

где J_X и k_X – параметры звена. Из сравнения этих двух выражений мы найдем

$$J_X = 1/\alpha, \qquad k_X = \sqrt{2\alpha D_X / c_\xi}. \tag{21}$$

Таким образом, процесс с экспоненциальной функцией корреляции есть результат прохождения белого шума через апериодическое звено с функцией передачи

$$W_X(s) = \frac{k_X}{J_X s + 1}. \qquad (22)$$

Полное объединение выполняется так же, как и частичное объединение, но количество звеньев возрастает до N, а формулы (8) и (9) применяются для передаточной функции (5). В результате находятся параметры $\tilde{k}$ и $\tilde{J}$ или $\tilde{\gamma}$ звеньев.

Для упрощения вычислений целесообразно принять среднее значение $\bar{\xi}$ белого шума равным нулю, а искомое значение $\bar{Y}$ определять по формуле (10) при $t \to \infty$:

$$\bar{Y} = \bar{X}\sum_{r=1}^{n} k_r .$$

Иначе нам придется вычислить среднее значение по формуле

$$\bar{\xi} = \bar{X}\sum_{r=1}^{n} k_r \Big/ \sum_{r=1}^{N} \tilde{k}_r .$$

Корреляционная функция белого шума пропорциональна дельта-функции:

$$K_\xi(\tau) = \pi c_\xi \delta(t)$$

Подстановка этого выражения в (11) и (12), с учетом (4) при $\tau = 0$ и $t \to \infty$ дает парциальную дисперсию

$$\tilde{D}_r = \frac{1}{2}\pi c_\xi \tilde{k}_r^2 \tilde{\gamma}_r \qquad (23)$$

и взаимный корреляционный момент

$$\tilde{k}_{rl} = \pi c_\xi \tilde{k}_r \tilde{k}_l \frac{\tilde{\gamma}_r \tilde{\gamma}_l}{\tilde{\gamma}_r + \tilde{\gamma}_l}. \qquad (24)$$

Согласно (13) искомая дисперсия

$$D_Y = \pi c_\xi \left(\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{2} k_r^2 \tilde{\gamma}_r + 2\sum_{r \neq l} \tilde{k}_r \tilde{k}_l \frac{\tilde{\gamma}_r \tilde{\gamma}_l}{\tilde{\gamma}_r + \tilde{\gamma}_l} \right). \qquad (25)$$

Следует обратить внимание, что полное объединение не может применяться для нестационарных участков, так как переход к белому шуму корректен только для стационарных случайных процессов.

Частные случаи. Если многочлены $Q(s)$ и $P_n(s)$ имеют одинаковые корни, то после разложения $Q(s)$ на множители выражения s-s_r с одинаковыми корнями сокращаются. По этой причине при объединении количество звеньев уменьшается.

Если характеристическое уравнение $P_n(s)$ имеет кратные корни, то формула (7) для этих корней дает бесконечность. В связи с этим нам придется решать задачу последовательно: вначале в функции передачи учитывается лишь одно из звеньев, а после определения функции корреляции на выходе такого «усеченного» фильтра находится решение для следующего звена и т.д.

В случае, когда есть нулевой корень и в знаменателе функции передачи имеется идеальное интегрирующее звено, вначале получается решение для фильтра без этого звена, а затем добавляется звено с функцией передачи $1/s$.

Вывод. Объединенные методы расчета позволяют существенно упростить решения задач линейной фильтрации, сводя их к алгебраическим вычислениям вместо громоздкого интегрирования.

Литература.

[1]. Flickermeter: Functional and design specifications, Report of International Electrotechnical Commission, vol. 868, 1986, p. 31.

[2]. G. R. Cooper, C. P. McGillem, Probabilistic Methods of Signal and System Analysis, GBS College Publishing, 1986.

[3]. A. K. Шидловский, E. G. Куренный и др. Электромагнитная совместимость конденсаторных установок, Киев: Институт электродинамики, Препринт 687, 1990.

[4]. Правила устройства электроустановок, Москва: Энергоатомиздат, 1985.