

# МЕТОД УДАЛЕНИЯ ШУМА НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ ОБРАБОТКИ, АДАПТИРОВАННЫЙ К РАЗРЫВНЫМ СИГНАЛАМ

Ласточкин А.В.\* , Кобелев В.Ю.\*\*

\*Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко.  
252000, Украина, Киев, ул. Владимирская, 28. E-mail: andrey\_v@mail.univ.kiev.ua

\*\*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14. Тел.: (0852) 32-11-94. E-mail: cat@uniyar.ac.ru

**Реферат.** Предложен метод удаления шума, адаптированный к разрывным сигналам и сохраняющий преимущества уже известных методов вейвлет обработки. Показано, что предложенный метод может работать в рамках теории банков фильтров. Проведено сравнение с другими методами вейвлет обработки.

## Введение

Теория вейвлет обработки сигналов с целью удаления шума уже достаточно развита, в частности в [1] показано, что именно вейвлет метод удаления шума является оптимальным для сигналов с заранее неизвестной формой, но принадлежащих к определенному классу гладкости. Для разрывных сигналов, испытывающих скачки своего среднего значения (к примеру, прямоугольные импульсы) был предложен метод с адаптивным порогом, что позволяет частично сохранить резкий фронт импульса. В данной работе предложен альтернативный метод для сохранения резкого фронта, присущего разрывным сигналам, основанный на использовании некоторых свойств КИХ-фильтров. Предложенный метод сохраняет положительные свойства вейвлет методов удаления шума и может работать как в рамках дискретного вейвлет преобразования, так и в рамках теории банков фильтров.

## Удаление шума с помощью вейвлет методов

Предполагается, что исходный сигнал искажен аддитивным белым или гауссовым шумом:

$$y_i = x_i + \sigma n_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $x$  – исходный сигнал,  $n$  – шум со стандартным среднеквадратичным отклонением  $\sigma$ ,  $y$  – зашумленный сигнал.

Проведем дискретное вейвлет преобразование данного сигнала:

$$Y = My,$$

где  $M$  – оператор дискретного вейвлет преобразования,  $Y$  – вейвлет трансформанта. При этом  $Y$  состоит из 2-х частей – высокочастотной (ВЧ) трансформанты ( $Y_h$ ), полученной с использованием вейвлет функции и низкочастотной (НЧ) трансформанты ( $Y_l$ ), полученной с использованием масштабирующей функции.

Далее к ВЧ трансформанте применяется операция порогового удаления шума:

в соответствии с жесткой пороговой обработкой

$$\hat{Y}_h = Th(Y_h, t) = \begin{cases} Y_h, & |Y_h| \geq t, \\ 0, & |Y_h| < t, \end{cases}$$

или в соответствии с мягкой пороговой обработкой

$$\hat{Y}_h = Ts(Y_h, t) = \begin{cases} \text{sgn}(Y_h)(|Y_h| - t), & |Y_h| \geq t, \\ 0, & |Y_h| < t, \end{cases}$$

где  $t$  – порог (выбор порога хорошо рассмотрен в [1,2]). После этого производится обратное вейвлет преобразование:

$$\hat{x} = M_{inverse}(\hat{Y}_h, Y_l).$$

В случае если сигнал не гладкий, испытывает разрывы и скачки, стандартная пороговая обработка может не дать искомого результата, поскольку резкие границы скачков сглаживаются в процессе удаления шума.

Если убрать элементы децимации, т.е. сохранять все отсчеты на выходах фильтров разложения, проводить стандартную обработку и полученные трансформанты направлять в восстанавливающие фильтры, то это приведет к небольшому выигрышу при обработке гладких сигналов. Однако назвать это дискретным вейвлет преобразованием в строгом смысле уже нельзя, поэтому далее это будет называться преобразованием с помощью вейвлет фильтров.

**Алгоритм адаптации к разрывам**

Рассмотрим небольшой отрезок сигнала, внутри которого находится «разрыв» – существенное изменение среднего уровня сигнала, характеризующееся резким фронтом.

Чтобы корректно работать с разрывными сигналами, предлагается следующий алгоритм:

1. Ищется отсчет (координата скачка), начиная с которого среднее значение сигнала сильно изменяется.

2. Строится некоторый «модельный» сигнал, первая часть которого – среднее значение зашумленного сигнала (после скачка), а вторая часть – непосредственно отсчеты зашумленного сигнала после скачка (их количество определяется заранее и является одним из параметров метода).

3. Производится преобразование с помощью вейвлет фильтров зашумленного и «модельного» сигналов (в случае последнего достаточно ВЧ трансформанты)

4. Из ВЧ трансформанты зашумленного сигнала (начиная с координаты скачка) вычитается ВЧ трансформанта «модельного» сигнала.

5. В той части сигнала, где не было произведено вычитание, выполняется стандартная пороговая обработка.

6. Производится обратное преобразование с помощью вейвлет фильтров.

Записать это можно следующим образом:

Пусть  $S^V = V(S)$  – компонента разложения сигнала  $S$  с помощью фильтра, соответствующего масштабирующей функции (децимация не проводится),  $V_{inverse}(S)$  – обратное преобразование с помощью фильтра, обратного к исходному (его коэффициенты стоят в обратном порядке).

Пусть  $S^W = W(S)$  – компонента разложения сигнала  $S$  с помощью фильтра, соответствующего вейвлет функции (без децимации) и  $W_{inverse}(S)$  – соответствующее обратное преобразование.

Тогда можно записать:

$$S_r = \frac{W_{inverse}(S^W) + V_{inverse}(S^V)}{2} = S,$$

где  $S_r$  – восстановленный сигнал. Коэффициент 1/2 появляется из-за отсутствия децимации.

Модельный сигнал строится следующим образом:

$$M_1 = M_2 = M_3 = \dots = M_{N1} = (S_{ic} + S_{ic+1} + S_{ic+2} + \dots + S_{ic+n})/n, \quad 1 < n < N1,$$

$$M_{N1+j} = S_{ic+j}, \quad j=0, 1, 2, \dots, N.$$

где  $N$  – длина скачка,  $N1$  – длина (эффективная длина) отклика фильтра разложения, соответствующего вейвлет функции,  $ic$  – отсчет, с которого начинается скачок.

Далее можем записать:

$$M^W = W(M); \quad M^{CW} = M_j^W, \quad j = N1+1, N1+2, \dots, N1+N,$$

где  $M^{CW}$  – часть компоненты разложения модельного сигнала, содержащая непосредственно отклик фильтра разложения на отсчеты скачка. После этого производится пороговая обработка трансформанты модельного сигнала  $M^{CW}$ , но поскольку она будет отниматься от компоненты разложения -  $S^W$ , то пороговую обработку нужно проводить следующим образом:

$$M^{TW} = Th(M^{CW}, t) = \begin{cases} 0, & |M^{CW}| \geq t \\ M^{CW}, & |M^{CW}| < t \end{cases}$$

для жесткой пороговой обработки или

$$M^{TW} = Ts(M^{CW}, t) = \begin{cases} M^{CW} - sign(M^{CW})(|M^{CW}| - t), & |M^{CW}| \geq t \\ M^{CW}, & |M^{CW}| < t \end{cases}$$

для мягкой пороговой обработки.

(Далее пороговая обработка, вне зависимости от типа будет обозначаться -  $Thr$ ).

Таким образом, обработка компоненты разложения  $S^W$  для удаления шума выглядит следующим образом:

$$S^{WT} = \begin{cases} Thr(S_i^W), & i \neq ic, ic+1, ic+2, \dots, ic+N1 \\ S_i^W - M_j^{WT}, & i = ic+j, j=0, 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

После чего производится обратное преобразование сигнала:

$$S_r = \frac{W_{inverse}(S^{WT}) + V_{inverse}(S^V)}{2}.$$

Для определения координаты скачка вычисляется следующая функция:

$$f(i) = |(a(i-n+1) + a(i-n) + \dots + a(i-1) + a(i)) / n - (a(i+1) + \dots + a(i+n)) / n|.$$

По сути, это два окна, находящиеся вплотную друг к другу и «скользящие» вдоль сигнала. Внутри этих окон находится среднее значение сигнала, а результирующая функция – разность средних значений. Максимум результирующей функции приходится на координату скачка.

Для определения величины порога можно использовать формулу так называемого универсального порога [2]:

$$t = \sigma(2 \log N)^{1/2},$$

где  $t$  – порог,  $N$  – количество отсчетов в сигнале,  $\sigma$  - дисперсия шума. Дисперсию можно оценить, выбрав для этого гладкий участок исходного сигнала с добавленным аддитивным шумом.

В принципе, небольшое изменение порога несильно влияет на качество получаемого в итоге сигнала. Нижний предел значений порога равен нулю, а верхний предел определяется наибольшим значением трансформанты ВЧ вейвлет разложения.

Необходимо отметить, что описанный метод работает и с использованием децимации, т.е. в рамках дискретного вейвлет преобразования (для чего проводится децимация компонент разложения на выходе фильтров и компоненты разложения модельного сигнала, а также убирается коэффициент 1/2), но получаемые результаты оказываются несколько хуже (в терминах отношения сигнал/шум), чем без децимации.

### Экспериментальные результаты

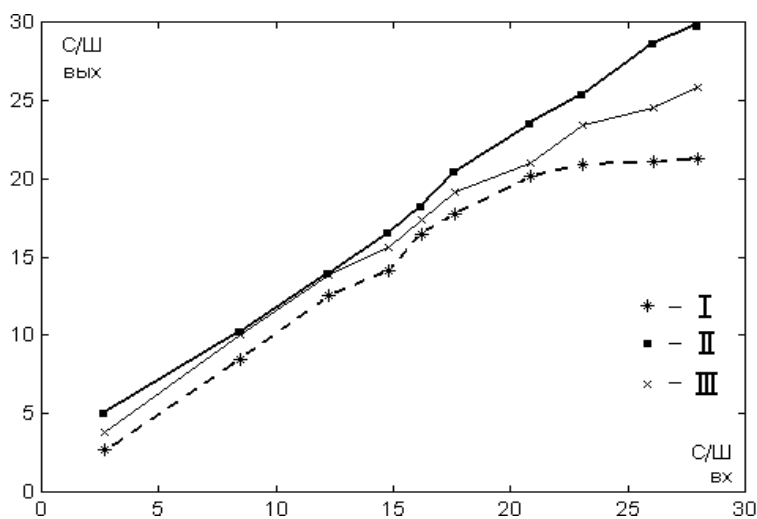


Рис.1. Сравнение вейвлет методов обработки (зависимость С/Ш на выходе от С/Ш на входе для прямоугольных импульсов):

- I – стандартная вейвлет обработка,
- II - предложенный метод
- III - вейвлет обработка с адаптивным порогом

Предложенный метод был проверен для гладких и разрывных сигналов. В качестве разрывного сигнала использовалась последовательность прямоугольных импульсов, длительность импульса - 7 отсчетов и расстояние между ними тоже 7 отсчетов. К сигналу добавлялся белый шум с равномерным распределением. На входе системы обработки соотношение сигнал/шум менялось в пределах от 1 до 30 дБ. В результате обработки получены следующие зависимости отношения сигнал/шум на входе и выходе систем (рис.1). Сравнение проводилось между вейвлет методами обработки. Сравнение между стандартным методом и медианным фильтром можно найти в [1] (в случае прямоугольных импульсов медианный фильтр по своим результатам оказывался близок к вейвлет обработке с адаптивным порогом).

При малом уровне шумов стандартный метод оказывается наименее выгодным, так как сглаживается фронт импульса. Чем больше разрывов в сигнале, тем большим оказывается выигрыш при использовании предложенного метода, с условием, что такой параметр как «минимальная длина гладкого участка сигнала после разрыва» задан корректно (обычно значение варьируется от 3 до  $N$  отсчетов и внутри этого интервала не должно находиться другого скачка, к которому нужно адаптироваться). При обработке была использована вейвлет функция Daubeshie 4.

Для гладких сигналов (использовалась синусоида с периодом 70 отсчетов) предложенный метод незначительно превосходит (до 1.5 дБ) стандартный вейвлет метод обработки для широкого диапазона входных значений С/Ш, что связано с отсутствием децимации в рассматриваемом методе (если метод применяется с децимацией, результат получается абсолютно идентичным).

### Заключение

В работе предложен метод, позволяющий улучшить соотношение С/Ш при работе с разрывными сигналами по сравнению с другими методами вейвлет обработки. При этом сохраняется большинство их преимуществ, например, возможность адаптироваться к конкретному сигналу за счет выбора вейвлет функции [3], сохранение класса гладкости исходного сигнала после обработки и др. Возможность использования метода без децимации позволяет работать в рамках теории банков фильтров, что расширяет возможности системы по удалению шумов, неравномерно распределенных по спектру. Метод может быть обобщен на  $M$ -полосный банк фильтров, а также может использоваться для удаления шумов из изображений.

Библиография

1. Donoho D.L. Johnstone I.M. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage // Department of Statistics, Stanford University, Technical report, July 20 1994.
2. Donoho D.L. Denoising by Soft Thresholding // Department of Statistics, Stanford University, Technical report, 1992.
3. Кобелев В.Ю. Ласточкин А.В. Выбор оптимальных вейвлетов для обработки сигналов и изображений // Труды II международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения». - М., 1999 –Т. II С. 514-518.



**THE DENOISING METHOD BASED ON THE WAVELET PROCESSING ADAPTED FOR SHARP SIGNALS**

Lastochkin A.V\*, Kobelev V.Yu.\*\*

\* Kiev State University  
252000, Ukraine, Kiev, Vladimirska st., 28. Phone: 266-04-83. E-mail: andrey\_v@mail.univ.kiev.ua  
\*\* Yaroslavl State University  
150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaja st., 14. Phone: (0852) 32-11-94 E-mail: cat@uniyar.ac.ru

**Abstract:** The method for denoising signals with boundaries has been suggested. All good properties of wavelet denoising methods have been preserved. It is shown that suggested method can be applied in case of filter bank signal processing. The comparison to wavelet denoising methods is given.

**Introduction**

The wavelet denoising theory is already well developed. Wavelet-based methods are optimal for a large class of signals. The method with adaptive threshold has been suggested to denoise signals with sharp boundaries (like square waves). In this paper the alternative method is suggested. This method uses some properties of FIR filters and is able to keep sharp boundaries of signals. The suggested method keeps practically all good properties of wavelet denoising methods and can be applied in case of signal processing by filter banks.

If the initial signal is not smooth and has sharp boundaries then the standard wavelet denoising by thresholding can work with less efficiency, because the sharp boundaries will be smoothed during the processing. If we will remove a procedure of downsampling and oversampling in discrete wavelet transforms (in other words we will leave all samples of the signal) than we will obtain a little advantage in case of denoising the smooth signals.

**Algorithm for adaptation to signals with sharp boundaries**

Let us suppose that the noised signal  $y$  consists from the initial signal  $x$  distorted by a white noise  $n$ :

$$y_i = x_i + \sigma n_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Let us consider a small part of the signal, which contains a sharp boundary. To work with it correctly the next procedure is suggested:

1. Finding the beginning of the boundary.
2. Building so called model signal (its second part is samples of signal displaced after the boundary including the sample of the beginning of the boundary and the first part of the model signal is samples containing the average value of the second part).
3. Executing transformation by wavelet filters for signal and model signal (for the model signal it is enough to find only the Hi-component of decomposition).
4. Subtracting the second part of Hi decomposition of model signal from the Hi component of signal decomposition in corresponding samples .
5. Executing the usual thresholding in other parts of the signal.
6. Executing inverse transformation by wavelet filters for processed the Hi-component and Lo-component of the signal.

Let  $S^V = V(S)$  - denote Lo component of the signal decomposition obtained by the filter corresponding to the scaling function without downsampling, and  $V_{inverse}(S)$  - inverse transformation by the filter corresponding to the scaling function without oversampling. Let also  $S^W = W(S)$  - denote Hi component of the signal decomposition obtained by the filter corresponding to the wavelet function without downsampling, and  $W_{inverse}(S)$  - inverse transformation by the filter corresponding to the scaling function without oversampling. Then we can write reconstructed signal  $S_r$ :

$$S_r = \frac{W_{inverse}(S^W) + V_{inverse}(S^V)}{2} = S$$

where the factor 1/2 appears because of the absence of downsampling and oversampling.

The model signal can be built as follows:

$$M_1 = M_2 = M_3 = \dots = M_{N1} = (S_{ic} + S_{ic+1} + S_{ic+2} + \dots + S_{ic+n})/n, \quad 1 < n < N1,$$

$$M_{N+j} = S_{ic+j}, \quad j=0, 1, 2, \dots, N$$

where  $N$  – is the minimum length between two boundaries,  $N1$  – is the length (effective length) of the impulse response of the decomposition filter, corresponding to the wavelet function without downsampling,  $ic$  – is the sample of the beginning of the boundary.

For the next step we can write:

$$M^W = W(M); \quad M^{CW} = M_j^W, \quad j = N1+1, N2+2, \dots, N1+N$$

where  $M^{CW}$  – is the part of the decomposition of the signal, containing the filter response exactly for the samples of signal displaced after the boundary (including the response for the sample of the beginning of the boundary). After that we should apply the thresholding to the  $M^{CW}$ , but we will subtract the second part of Hi decomposition of model signal -  $M^{CW}$  (thresholded) from the Hi component of signal decomposition -  $S^W$  in corresponding samples. So we need apply thresholding as follows:

$$M^{TW} = Th(M^{CW}, t) = \begin{cases} 0, & |M^{CW}| \geq t \\ M^{CW}, & |M^{CW}| < t \end{cases}$$

for hard thresholding and

$$M^{TW} = Ts(M^{CW}, t) = \begin{cases} M^{CW} - sign(M^{CW})(|M^{CW}| - t), & |M^{CW}| \geq t \\ M^{CW}, & |M^{CW}| < t \end{cases}$$

for soft thresholding (we will denote the thresholding as -  $Thr$ ).

Now we can write the processing of  $S^W$  as follows:

$$S^{WT} = \begin{cases} Thr(S_i^W), & i \neq ic, ic+1, ic+2, \dots, ic+N1 \\ S_i^W - M_j^{WT}, & i = ic+j, j=0, 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

After that we should execute inverse transformation by wavelet filters:

$$S_r = \frac{W_{inverse}(S^{WT}) + V_{inverse}(S^V)}{2}$$

To determine the beginning of the boundary the next function can be calculated:

$$f(i) = |(a(i-n+1) + a(i-n) + \dots + a(i-1) + a(i)) / n - (a(i+1) + \dots + a(i+n)) / n|$$

It represents two windows which are “sliding” along the signal. The function equals to the difference between the average values of those windows. The maximum of the function corresponds to the beginning of the boundary. The described method can work with downsampling as well as without it, but the results of applying this method without downsampling are usually better than with it. During the experiments we found that for the signals with many boundaries the suggested method was better for 0.5 - 5 dB than usual wavelet denoising methods with adaptive and non adaptive threshold.

### Conclusion

The suggested method is able to improve the results of denoising of the signals with sharp boundaries. In the absence of boundaries the results of denoising is the same as in standard wavelet methods (with downsampling and oversampling) or a little better. The suggested method can be applied in the case of system with more than two bounds of decomposition.