Е. В. Ч а у с о в а (Томск, ТГУ). **Интервальная динамическая модель управления запасами с задержками поставок.**

Рассматривается задача управления запасами в условиях интервальной неопределенности. Неизвестные параметры системы (спрос и коэффициенты потерь запаса) задаются в виде интервалов, в границах которых они произвольным образом принимают свои значения. Система управления запасами представляется в виде динамической сети с запаздыванием управлений. Динамика сети описывается уравнением

$$x(t+1) = A(t)x(t) + \sum_{s=0}^{\Delta t} B_s u(t-s) + Ed(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний системы, i-я компонента которого описывает уровень запаса в i-м узле сети (на i-м складе) в момент времени t ($x(0)$ считается известным); $u(t) \in \mathbb{R}^q$ — вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t; $d(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t. Структура сети определяется матрицами $B_s \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $s = 0, 1, \ldots, \Delta t$, $E \in \mathbb{R}^{n\times m}$, где s — период запаздывания управляемого потока в сети, $s = 0$ соответствует немедленной поставке, Δt — максимальный период задержки поставки. Диагональная матрица $A(t) = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ учитывает возможные потери запаса в узлах сети в момент времени t (порчу, убыль, устаревание и т. д.).

О спросе $d(t)$ известен лишь интервал его возможных значений $d(t) \in \mathbf{D}$, $t \geqslant 0$, где $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}^m$, $\mathbf{D} = [\underline{D}, \overline{D}]$, $\mathbf{D} \geqslant 0$; $\mathbb{IR} = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]\colon\ \underline{x} \leqslant \overline{x},\ \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}$ — множество всех правильных интервалов [1].

Коэффициенты потерь запаса $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ заданы интервалами $A(t) \in \mathbf{A}$, $t \geqslant 0$, где $\mathbf{A} = \mathrm{Diag}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$, $\mathbf{a}_i = [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i]$, $0 \leqslant \mathbf{a}_i \leqslant 1$, $\mathrm{wid}\mathbf{a}_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\mathrm{wid}\mathbf{x} = \overline{x} - \underline{x}$ — ширина интервала $\mathbf{x}$, $\mathrm{wid}\,\mathbf{x} \geqslant 0$.

На размеры запасов $x(t)$ и управления $u(t)$ накладываются ограничения, обусловленные возможностями системы

$$x(t) \in \mathbf{X}, \quad u(t) \in \mathbf{U}, \qquad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{X} = [0, \overline{X}]$; $\mathbf{U} \in \mathbb{IR}^q$, $\mathbf{U} = [0, \overline{U}]$.

О п р е д е л е н и е 1. Стратегию $\Phi = \{u(t),\ t \geqslant 0\}$ будем называть *допустимой на интервале* $\mathbf{X}$ *стратегией управления для начального запаса* $x(0) \in \mathbf{X}$, если при любых потерях запаса $A(t) \in \mathbf{A}$ и любом спросе $d(t) \in \mathbf{D}$ выполнено условие (2), где $x(t)$ определяется соотношением (1). Множество стратегий, допустимых на интервале $\mathbf{X}$ при начальном запасе $x(0) \in \mathbf{X}$, будем обозначать $\Phi(x(0))$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем называть $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in \mathbf{X}$, *допустимым уровнем запаса в системе*, если для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x})$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}(0, \widehat{x})$ стратегия управления, где $\mathbf{X}(a, b) = [a, b]$ — интервальнозначная вектор-функция, которая определена для $a \leqslant b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Задача управления запасами формулируется следующим образом.

1) Найти оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^*$, минимизирующий затраты системы в единицу времени $C(\widehat{x}) = h^T\widehat{x}$, где $h \in \mathbb{R}^n$, $h \geqslant 0$, $h \neq 0$, — вектор затрат, i-я компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i-м узле сети.

2) Построить стратегию управления запасами $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующую включение $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ при $t \to \infty$, при любых потерях запаса $A(t) \in \mathbf{A}$ и любом спросе $d(t) \in \mathbf{D}$.

Поставленная задача сводится к задаче управления запасами в системе с мгновенными поставками, рассмотренной в [2]. Для этого вводится понятие фиктивного уровня запаса, который определяется в виде суммы наличного запаса и объема заказов на текущий момент времени, и выполняется преобразование над переменной состояния системы. Динамика фиктивного запаса описывается уравнением без задержек управлений. Однако в нем появляется новая составляющая, которую можно рассматривать как дополнительное воздействие на систему, принимающее значения из заданного интервала в зависимости от текущего состояния системы. С учетом этого и результатов, полученных в работе [2] для модели с мгновенными поставками, были определены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления с обратной связью, доказана теорема об оптимальном допустимом уровне запаса, получены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами с обратной связью, гарантирующей асимптотическую сходимость системы к оптимальному запасу. Разработан алгоритм построения оптимальной стратегии, согласно которому оптимальное управление на каждом шаге определяется из решения задачи линейного программирования.

Работа выполнена по гранту Президента РФ № МК–3097.2005.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
2. *Чаусова Е. В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и потерь запаса. — Вестник ТГУ, 2006, № 290, с. 208–215.