

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КРАНАХ С ПОДВИЖНОЙ КАРЕТКОЙ ПОДЪЕМА ГРУЗА

Дворников В. И., докт. техн. наук, профессор, Геммерлинг В. А., студент  
Донецкий национальный технический университет

*В работе описано моделирование динамических процессов в кранах с подвижной кареткой подъема груза и приведены полученные результаты.*

*In work modeling dynamic processes in cranes with the mobile carriage of rise of a cargo is described and the obtained results are adduced.*

Краны с подвижной кареткой подъема груза широко используются в промышленности, строительстве и других отраслях народного хозяйства. К таким кранам относятся башенные, мостовые и козловые краны, которые схематически изображены на рис. 1.

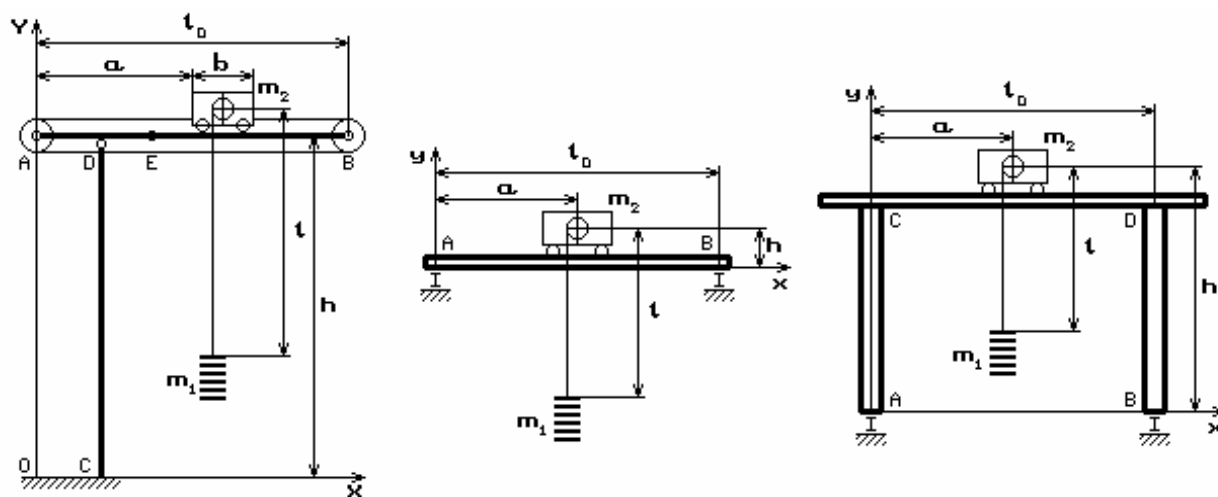


Рис. 1. Схемы башенного, мостового и козлового кранов

Отличительной особенностью таких кранов является то, что грузовая каретка в общем случае совершает двухмерное движение в горизонтальной плоскости. В связи с этим концевой груз может интенсивно раскачиваться в поперечных направлениях с определенной амплитудой, которая зависит от ха-

рактера движения каретки и режима подъема груза. Неуправляемые поперечные перемещения груза могут представлять реальную опасность для обслуживающего персонала и окружающих объектов и, как правило, доставляют известного рода неудобства при ведении монтажных и погрузочных работ (так называемая проблема *позиционирования* груза).

Целью данного исследования является разработка математической модели динамического состояния крана с подвижной кареткой подъема груза, моделирование динамических процессов с помощью ЭВМ и получение конкретных параметров динамического состояния машины при нерегулируемом и регулируемом движении каретки.

Рассмотрим простейший вариант подъема груза, когда каретка совершает одномерное движение при отсутствии перемещения самого крана. Расчетная схематизация такого процесса показана на рис. 2.

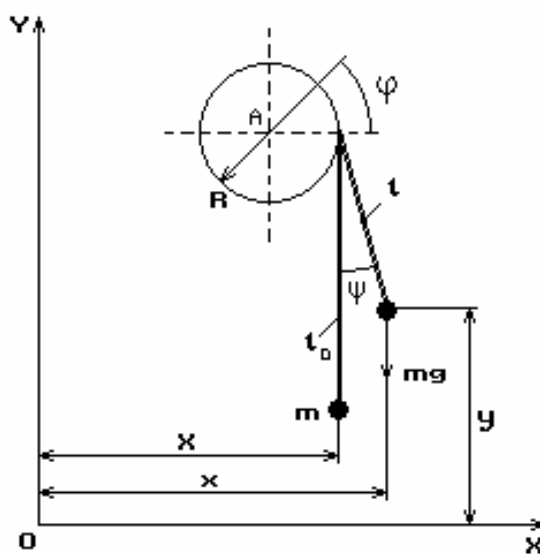


Рис. 2. Схема подъема груза при горизонтальном перемещении каретки

Здесь изображены положения поднимаемого груза в двух состояниях – в начальном, когда длина отвеса каната равна  $l_0$ , и в некотором текущем, когда барабан лебедки повернулся на угол  $j$  против часовой стрелки, отвес каната образовал с вертикалью угол  $\psi$ , отсчитываемый также против часовой стрелки,

а его длина стала равной  $l$ . Координаты груза в его текущем состоянии обозначим посредством символов  $x$  и  $y$ .

В этом текущем состоянии каретка переместилась таким образом, что точка набегания каната на барабан приобрела координату  $X(t)$  в принятой системе отсчета  $XOY$ . Можно считать, что  $X(t)$  является также и текущей горизонтальной координатой каретки, отсчитываемой от ее некоторого первоначального положения (на рис. 1 эта координата обозначена символом  $a$ ).

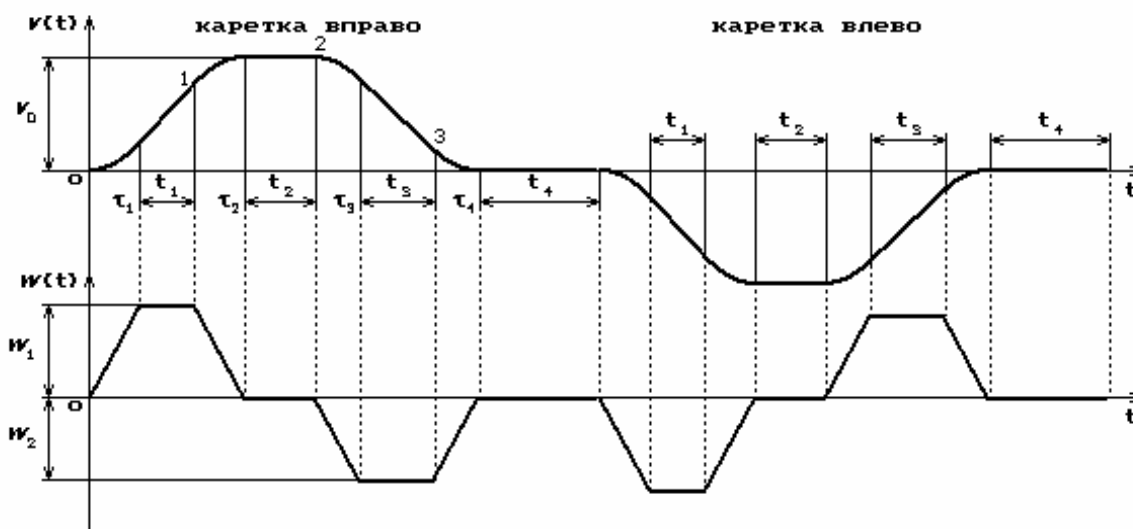


Рис. 3. Изменение скорости и ускорений каретки при ее горизонтальном перемещении

Будем полагать, что перемещение каретки задано, и при этом ее скорость  $V(t) = \dot{X}(t)$  и ускорение  $W(t) = \dot{V}(t) = \ddot{X}(t)$  изменяются, например, так, как показано на рис. 3. При этом предполагается, что в интервалах времени  $t_1, t_2, t_3, t_4$  имеет место движение с переменным ускорением (замедлением), то есть управление горизонтальным движением каретки осуществляется с ограничением рывка как первой производной от ускорения, или второй производной от скорости, или третьей производной от перемещения:

$$r(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^2 X}{dt^2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{dX}{dt} \right) = \frac{d^3 X}{dt^3}.$$

В интервалах времени  $t_1, t_2, t_3, t_4$  – рывки принимаются постоянными, равными соответственно  $r_1, r_2, r_3, r_4$ ; в интервалах  $t_1, t_2$  – ускорения посто-

яны, соответственно равные  $w_1, -w_2$ . В интервале  $t_2$  – скорость постоянная, равная  $v_0$ , что является максимальной скоростью перемещения каретки. В дальнейшем, как это обычно принято на практике, а также для упрощения выкладок будем полагать, что  $r_1 = -r_2 = -r_3 = r_4 = r$ ,  $w_1 = -w_2 = w$ .

Подъем груза также может осуществляться с ограничением рывка, то есть в соответствии с диаграммой, подобной представленной на рис. 3. В этом случае соответствующие динамические переменные, для различия, будем обозначать символами  $\tilde{r}, \tilde{w}, \tilde{v}$ .

С помощью схемы, приведенной на рис. 2, запишем текущие координаты груза в форме:

$$x = X(t) + l \sin y, \quad y = l_0 - l \cos y, \quad (1)$$

где  $X(t)$ , как было сказано выше, заданная координата грузовой тележки,  $l_0$  – начальная длина отвеса каната,  $l$  – текущая его длина,  $y$  – угол, образуемый отвесом подъемного каната с вертикалью. С помощью (1) находим:

$$\dot{x} = \dot{X}(t) + \dot{l} \sin y + l \dot{y} \cos y, \quad \dot{y} = -\dot{l} \cos y + l \dot{y} \sin y, \quad (2)$$

где точки символизируют производные по времени  $t$ .

С использованием соотношений (2) квадрат скорости груза определится в форме  $V^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}(\dot{l} \sin y + l \dot{y} \cos y) + \dot{l}^2 + l^2 \dot{y}^2$ , и тогда кинетическую энергию в целом всей системы определим как

$$T = \frac{J}{2} \dot{j}^2 + \frac{m}{2} [\dot{X}^2 + 2\dot{X}(\dot{l} \sin y + l \dot{y} \cos y) + \dot{l}^2 + l^2 \dot{y}^2], \quad (3)$$

где  $j$  – текущий угол поворота барабана;  $J$  – момент инерции барабана с присоединенными вращающимися массами редуктора и ротора двигателя (здесь считается этот параметр постоянным, то есть пренебрегается его изменением за счет присоединенной массы навиваемого на барабан каната);  $m$  – масса концевого груза.

Упругое удлинение качающегося отвеса каната определим как разность намотанной на барабан длины каната  $Rj$  и фактического сокращения (уменьшения) длины каната на величину  $(l_0 - l)$  в текущий момент времени:

$$x = Rj - (l_0 - l), \quad (4)$$

и тогда общая потенциальная энергия системы представится в форме

$$U = \frac{C_{омв}}{2} [Rj - (l_0 - l)]^2 + mg(l_0 - l \cos y), \quad (5)$$

причем здесь  $C_{омв}$  – коэффициент жесткости отвеса каната, определяемый формулой  $C_{омв} = E \bar{a} d_{\kappa}^2 / l$ , где  $E$  – модуль упругости стали проволоки ( $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ );  $\bar{a}$  – безразмерный параметр, зависящий от конструкции применяемого каната (для канатов ГОСТ 7668-80 –  $\bar{a} \approx 0,315$ ; для других типов канатов численное значение этого параметра отличается незначительно);  $d_{\kappa}$  – диаметр каната, м.

Функция Лагранжа  $L = T - U$  с учетом (3) и (5) будет иметь вид

$$L = \frac{J}{2} \dot{j}^2 + \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}(\kappa \sin y + l\dot{y} \cos y) + \dot{\kappa}^2 + l^2 \dot{y}^2] - \frac{C_{омв}}{2} [Rj - (l_0 - l)]^2 - mg(l_0 - l \cos y). \quad (6)$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

в качестве обобщенных координат дискретных элементов установки целесообразно взять  $q_1 = j$ ,  $q_2 = l$ ,  $q_3 = y$ , а обобщенные непотенциальные силы  $Q_1, Q_2, Q_3$  – принять следующими:  $Q_1 = M_{об}(t)$ ,  $Q_2 = 0$ ,  $Q_3 = 0$ , где  $M_{об}(t)$  – приведенный к оси барабана момент, развиваемый двигателем, как известная функция от времени  $t$ . Обобщенные силы  $Q_2, Q_3$  считаются равными нулю, так как предполагается, что концевой груз не подвержен действию иных внешних силовых факторов, кроме уже учтенных сил.

Прежде чем приступить к записи уравнений движения путем подстановки (6) в уравнение (7), заметим, что в выражении (6), в силу свойств функций Лагранжа, слагаемые  $m\dot{x}^2/2$  и  $mg l_0$  можно не принимать во внимание, так как первое из них есть известная функция от времени  $t$ , а второе – есть обычная

константа. Кроме того, так как слагаемое  $m\dot{x}(l\dot{\sin y} + l\dot{y}\dot{\cos y})$  можно представить в форме

$$m\dot{x}(l\dot{\sin y} + l\dot{y}\dot{\cos y}) = m\dot{x}\frac{d}{dt}(l\sin y) = m\frac{d}{dt}(x\dot{l}\sin y) - m\dot{x}l\dot{\sin y},$$

то, опуская здесь полную производную по времени от функции, содержащей время и обобщенные координаты  $l$  и  $y$ , в итоге вместо (6) получим:

$$L = \frac{J}{2}\dot{\omega}^2 + \frac{m}{2}[\dot{l}^2 + l^2\dot{y}^2] - \frac{C_{омб}}{2}[Rj - (l_0 - l)]^2 + ml(g\cos y - \dot{x}\dot{\sin y}), \quad (8)$$

что несколько упрощает процедуру построения уравнений движения.

В результате подстановки (8) в уравнения (7) получим следующую систему нелинейных уравнений динамического состояния рассматриваемой механической системы:

$$\left. \begin{aligned} J\dot{\omega} + C_{омб}R[Rj - (l_0 - l)] &= M_{дв}(t), \\ m(\dot{x}\dot{\sin y} + l\dot{y}\dot{\cos y}) + C_{омб}[Rj - (l_0 - l)] - mg\cos y - mly\dot{\omega}^2 &= 0, \\ ml(\dot{x}\dot{\cos y} + 2l\dot{y}\dot{\sin y} + l\dot{y}^2) + gml\sin y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для возможности аналитического решения полученных уравнений произведем их линеаризацию, отнюдь не искажающую физические процессы в рассматриваемой системе, что сделаем следующим образом.

Во втором уравнении системы (9) компонента  $mly\dot{\omega}^2 = F_y$  представляет собой центробежную силу, возникающую при поперечных раскачиваниях груза. По абсолютной величине эта сила значительно меньше веса груза, если угол отклонения отвеса  $y$  (следовательно, и  $\dot{y}$ ) сравнительно мал, и по этой причине из системы (9) слагаемым  $mly\dot{\omega}^2$  можно пренебречь.

В третьем уравнении системы (9) компонента  $2ml\dot{y}\dot{\omega} = M_k$  является моментом силы Кориолиса, возникающей в результате поворота концевой массы вокруг точки набегания каната на барабан с одновременным перемещением вдоль оси каната. Момент кориолисовой силы, вообще говоря, может быть соизмеримым с восстанавливающим моментом  $mg\dot{l}\sin y$ , следовательно, этим силовым фактором пренебрегать нельзя. Однако здесь целесообразно считать,

что  $\dot{\varphi} \approx V_{cp}(t)$ , где  $V_{cp}(t)$  – некоторая функция времени, представляющая собой усредненную за период продольных колебаний скорость подъема груза, и эта скорость считается известной в силу заданной тахограммы движения. Тогда момент кориолисовой силы в результате линеаризации будет выглядеть как  $M_{\kappa} = 2mlV_{cp}\dot{\varphi}$ . Далее, при малых углах отклонений отвеса подъемного каната можно считать, что  $\cos y \approx 1$ ,  $\sin y \approx y$ , и тогда в результате всех указанных выше упрощений вместо нелинейной системы (9) получим, так сказать, частично линеаризованную систему

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\varphi} + C_{омг}R[R\dot{\varphi} - (l_0 - l)] &= M_{\delta\epsilon}(t), \\ m(\ddot{x} + \ddot{\varphi}y) + C_{омг}[R\dot{\varphi} - (l_0 - l)] - mg &= 0, \\ ml^2\ddot{\varphi} + ml(\ddot{x} + 2V_{cp}\dot{\varphi}) + mgy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Решения системы (9) или (10) позволяет определить максимальные поперечные перемещения груза при любом заданном законе перемещения каретки  $X(t)$ , максимальные динамические усилия в подъемном канате при различном характере изменения движущего момента  $M_{\delta\epsilon}(t)$  и др.

Для реализации численного интегрирования системы (9) будем считать, что приводной двигатель подъема груза обладает *неограниченной мощностью* в том смысле, что двигатель в состоянии обеспечить подъем груза по наперед заданной тахограмме, типа приведенной на рис. 3. В такой идеализации движущий момент  $M_{\delta\epsilon}(t)$  представим в форме

$$M_{\delta\epsilon}(t) = R \left[ (m + J/R^2) \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} + mg \right], \quad (11)$$

где, как оговорено выше,  $\tilde{v}(t)$  – заданная скорость подъема в соответствии с принятой тахограммой, а выражение  $m_{np} = m + J/R^2$  представляет собой приведенную к окружности навивки каната на барабан массу системы «груз-барабан».

Далее проделаем следующие операции. Так как в соответствии с обозначением (4) переменная  $x$  представляет собой упругую деформацию каната, то

удобнее иметь дело именно с этой переменной, и тогда система уравнений (9) после элементарных преобразований примет вид

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{J}{R^2} + m \right) R \ddot{\alpha} &= \frac{M_{\partial s}(t)}{R} - mg + m \dot{\alpha}^2 + m [g(1 - \cos \gamma) - l \dot{\gamma}^2 + \dot{\alpha} \sin \gamma], \\ \dot{\alpha}^2 + w^2 \alpha &= g \cos \gamma + l \dot{\gamma}^2 + R \frac{M_{\partial s}(t)}{J} - \dot{\alpha} \sin \gamma = 0, \\ \dot{\gamma} + \frac{g}{l} \sin \gamma &= -\frac{\dot{\alpha}}{l} \cos \gamma - 2 \frac{\dot{\alpha}}{l} \dot{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где для квадрата собственной циклической частоты продольных колебаний груза на канате принято обозначение  $w^2 = C_{oms} (1/m + R^2/J)$ .

Текущая свободная длина каната  $l$ , входящая во второе и третье уравнение системы (14), определяется из соотношения (4) в виде

$$l = l_0 - Rj + x, \quad (13)$$

при этом угол поворота барабана  $\Phi$  определяется обычным двукратным интегрированием первого уравнения из системы (12).

Заметим, что, судя по структуре второго уравнения системы (12), переменная  $x(t)$  является осциллирующей с частотой  $w$  функцией. Тогда линейное перемещение точек на окружность навивки каната  $Rj(t)$ , оказывается, представляет собой суперпозицию осциллирующей с частотой  $w$  функции, получающейся в результате двукратного интегрирования  $\dot{\alpha}(t)$ , и монотонно изменяющейся функции, получающейся в результате двукратного интегрирования выражения  $M_{\partial s}(t)/R - mg$ . Аналогичное относится и к переменной  $l(t)$ , что следует из (13).

Монотонные составляющие переменных  $Rj(t)$  и  $l(t)$ , как очевидно, представляют собой некоторые «средние» или *квазидинамические* компоненты соответственно угла поворота барабана и свободного отвеса подъемного каната. Так, из первого уравнения системы (12) с учетом представления (11) и обозначения (13) имеем, пренебрегая для этой цели выражением в квадратных скобках в (12):



$$Rj_{cp}(t) = \int_0^t \tilde{v}(t) dt, \quad l_{cp}(t) = l_0 - \int_0^t \tilde{v}(t) dt. \quad (14)$$

Определяя, таким образом, текущее значение  $Rj(t)$  из первого уравнения системы (12) в форме интеграла Дюамеля, получим:

$$Rj(t) = Rj_{cp}(t) + \frac{m}{m_{np}} x + \frac{m}{m_{np}} \int_0^t \{g[1 - \cos y(t)] - l y \ddot{y}(t) + \ddot{x}(t) \sin y(t)\} (t - \tau) d\tau.$$

На рис. 4, 5, 6, 7 изображены графики, иллюстрирующие изменения во времени наиболее характерных динамических параметров рассматриваемой механической системы, полученные в результате численного интегрирования с помощью ЭВМ системы уравнений (12) с учетом (11), (13) и (14).

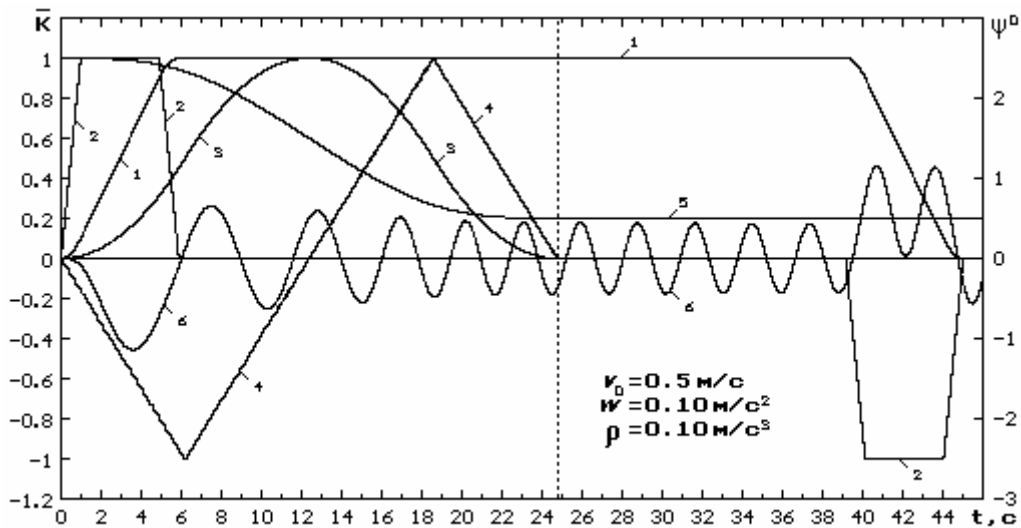


Рис. 4

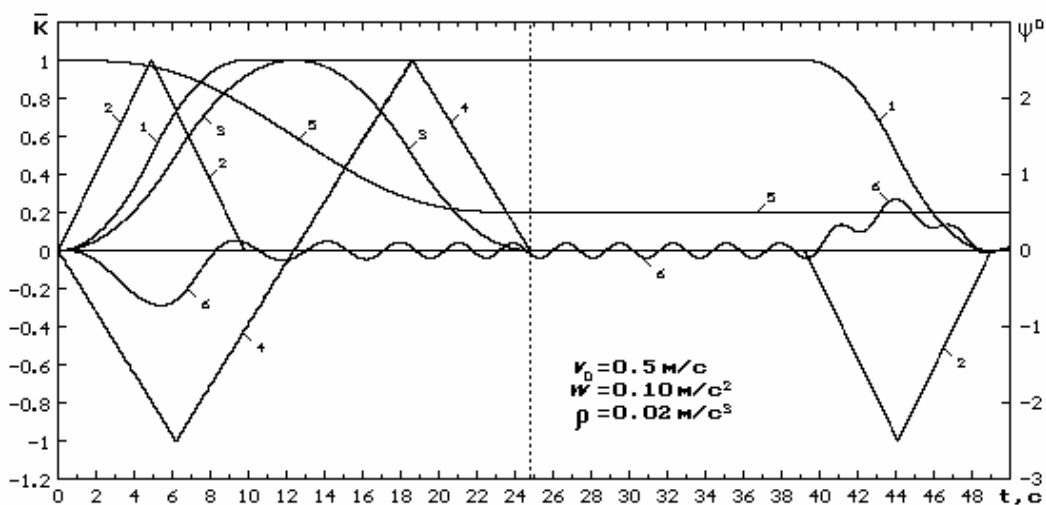


Рис. 5

Здесь вертикальная шкала  $\bar{K}$  символизирует безразмерные динамические параметры системы, и цифрами обозначено: 1 – текущая скорость перемещения грузовой каретки, отнесенная к принятой максимальной скорости каретки  $v_0$ ; 2 – ускорение каретки, отнесенное к максимальному ускорению  $w$ ; 3 – скорость подъема груза, отнесенная к  $\tilde{v}_0$ ; 4 – вспомогательная функция

$$c(t) = \{1 - C_{ome} [Rj - (l_0 - l)] / (mg)\} g / \tilde{w}, \quad (15)$$

где  $\tilde{w}$  – максимальное ускорение подъема груза; 5 – переменная длина отвеса подъемного каната, отнесенная к ее максимальной длине; 6 – угол отклонения отвеса каната от вертикали в градусах (шкала отклонений дана справа).

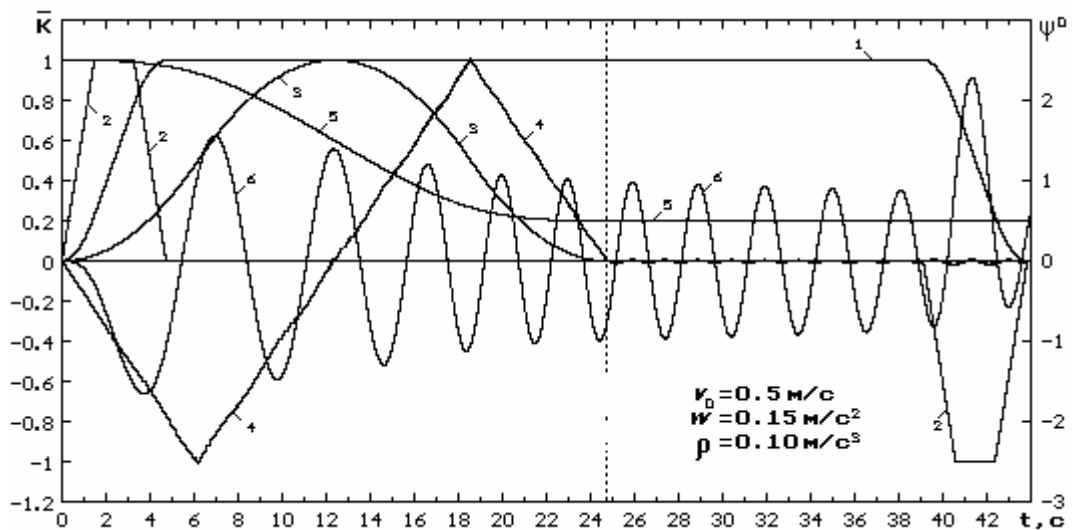


Рис. 6

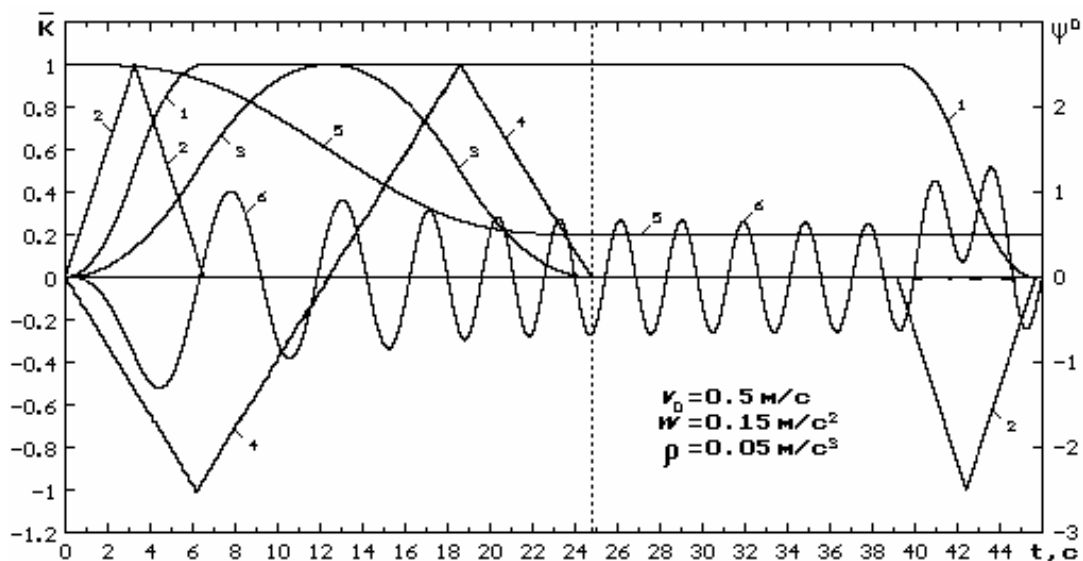


Рис. 7

Вертикальной пунктирной линией на рисунках обозначен момент времени окончания подъема груза (момент стопорения барабана механическим тормозом).

Посредством функции  $c(t)$  (15) усилие в подъемном канате определяется формулой

$$P(t) = mg \left( 1 - c(t) \frac{\tilde{w}}{g} \right), \quad (16)$$

Графики построены для двух значений максимальных ускорений перемещения каретки –  $w = 0,1 \text{ м/с}^2$  (рис. 4, рис. 5) и  $w = 0,2 \text{ м/с}^2$  (рис. 6, рис. 7). При этом графики рис. 4, рис. 6 отличаются от соответствующих графиков рис. 5, рис. 7 тем, что в первом случае принят рывок  $r = 0,1 \text{ м/с}^3$ , а во втором –  $r = 0,02 \text{ м/с}^3$ . Для всех вариантов принято: максимальное ускорение подъема груза  $\tilde{w} = 0,1 \text{ м/с}^2$ , максимальная скорость подъема груза  $\tilde{v}_0 = 0,1 \text{ м/с}$ .

Сравнивая между собой приведенные графики, можно сделать выводы о том, что уменьшение рывка и ускорения приводит к соответствующим уменьшениям горизонтальной раскачки поднимаемого груза.

Заметим, что теоретически оптимальная величина рывка, обеспечивающая минимальные отклонения груза от вертикали определяется по формуле

$$r_{opt} = \frac{w}{2p} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

что, например, при начальной длине отвеса  $l = 10 \text{ м}$  и  $w = 0,1 \text{ м/с}^2$  дает  $r_{opt} \approx 0,015 \text{ м/с}^3$ , однако для принятой максимальной скорости  $v_0 = 0,5 \text{ м/с}$  реализовать такой рывок не представляется возможным.

Результаты данного исследования можно использовать при проектировании приводов и систем управления кранов.

В дальнейших исследованиях планируется развитие математической модели для двумерного движения каретки, а также предполагается осуществить учет податливости приводного каната каретки.