

УДК 531.391:621.86.01

В.И. Дворников, проф., д.т.н.

(Украина, Макеевка, Донбасская государственная академия строительства и архитектуры),

Н.Г.Гаркуша, проф., д.т.н.

(Украина, Донецк, Донецкий государственный технический университет)

О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОДВЕШЕННОГО НА УПРУГИХ СВЯЗЯХ КАНАТА

Рассматривается задача о поперечных колебаниях горизонтально подвешенной на упругих связях (опорах) абсолютно гибкого каната, как это изображено на рис. 1.

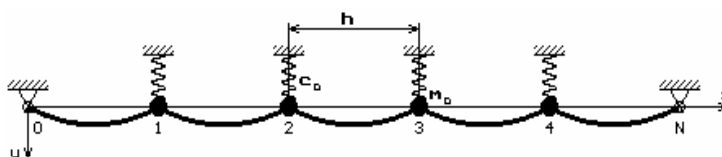


Рис. 1. Схема подвески к упругим связям абсолютно гибкого каната

Предполагается, что расстояния между смежными точками подвеса каната постоянные, равные h . Все точки подвесов, включая крайние, пронумерованы от 0 до N . Крайние опоры считаются абсолютно жесткими, поэтому количество упругих связей равно $N - 1$. Каждая из связей имеет один и тот же коэффициент жесткости c_0 и обладает некоторой массой m_0 , приведенной к точке подвеса. Натяжение каната P принимается постоянным, независящим ни от времени t , ни от горизонтальной координаты s , причем величина P считается настолько большой, что имеют место соотношения:

$$e_0 = \frac{rgh}{P} \ll 1, \quad e_1 = \frac{EJ}{Ph^2} \ll 1, \quad (1)$$

где r - линейная плотность каната; EJ - его изгибная жесткость; g - ускорение свободного падения.

Рассмотрим вначале поперечные колебания каната в вертикальной плоскости. В силу принятых допущений (1) уравнения динамического состояния каната на любом n -ом пролете, то есть на участке каната между связями с номерами n и $n + 1$, можно записать в форме

$$P \frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} - r \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -rg \quad (0 < s < h, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1), \quad (2)$$

где $u_n(s, t)$ – функция поперечных перемещений каната, отсчитываемых вниз от некоторого условного уровня; координата s на каждом пролете отсчитывается от его левой опоры ($s = 0$), причем при $s = 0$ и $s = h$ уравнения сопряжений функций u_n и u_{n-1} имеют вид:

$$u_n(0, t) = u_{n-1}(h, t),$$

$$P \left[\frac{\partial u_n(0, t)}{\partial s} - \frac{\partial u_{n-1}(h, t)}{\partial s} \right] = c_0 u_n(0, t) + m_0 \frac{\partial^2 u_n(0, t)}{\partial t^2} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \quad (3)$$

Для определенности, как было оговорено выше, примем, что на крайних опорах с номерами $n = 0$ и $n = N$ имеют место следующие граничные условия:

$$u_0(0, t) = 0, \quad u_{N-1}(h, t) = 0. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (2) с граничными условиями (4) и уравнениями сопряжения (3) целесообразно искать в форме

$$u_n(s, t) = \bar{u}_n(s) + \tilde{u}(s, t), \quad (5)$$

где $\bar{u}(s)$ – статическая форма равновесия каната; $\tilde{u}(s, t)$ – динамическая составляющая перемещений точек каната. В дальнейшем ограничимся изучением динамического состояния, описываемое однородной граничной задачей

$$P \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial s^2} - r \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial t^2} = 0, \quad \tilde{u}_n(0, t) = \tilde{u}_{n-1}(h, t),$$

$$P \left[\frac{\partial \tilde{u}_n(0, t)}{\partial s} - \frac{\partial \tilde{u}_{n-1}(h, t)}{\partial s} \right] = c_0 \tilde{u}_n(0, t) + m_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(0, t)}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\tilde{u}_n(0, t) = 0, \quad \tilde{u}_{N-1}(h) = 0,$$

которую будем решать, следуя идее работы [1], для чего положим здесь

$$\tilde{u}_n(s, t) = \exp(i\omega t) U_n(s) \quad (i = \sqrt{-1}),$$

что формально преобразует соотношения (6) к виду:

$$P \frac{d^2 U_n}{ds^2} + r\omega^2 U_n = 0, \quad U_n(0) = U_{n-1}(h),$$

$$P \left[\frac{dU_n(0)}{ds} - \frac{dU_{n-1}(h)}{ds} \right] = (c_0 - m_0\omega^2) U_n(0), \quad (7)$$

$$U_0(0) = 0, \quad U_{N-1}(h) = 0.$$

Функцию $U_n(s)$ запишем в форме

$$U_n(x) = U_{n+1}(0) \frac{\sin bx}{\sin b} + U_n(0) \frac{\sin b(1-x)}{\sin b}, \quad (8)$$

где обозначено $b^2 = r\omega^2 h^2 / P$, $x = s/h$ ($0 \leq x \leq 1$). Тогда подстановка (8) в третье уравнение граничной задачи (7) приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$U_{n+1}(0) - 2j(b)U_n(0) + U_{n-1}(0) = 0, \quad (9)$$

где $j(b) = \cos b + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{b} - bz \right) \sin b$, $s = \frac{c_0 h}{P}$, $z = \frac{m_0}{rh}$. Рассматривая (9) как

уравнение в конечных разностях, ищем его решения в форме $U_n(0) = Ag^n$, где A - некоторая константа. Подставляя это в (9), получим относительно g алгебраическое уравнение второго порядка возвратного типа

$$g^2 - 2gj(b) + 1 = 0, \quad (10)$$

откуда определяются два значения g_1 и g_2 , которые в силу свойств уравнения (10) связаны между собой очевидным соотношением $g_1 = 1/g_2$. Обозначая в дальнейшем $g_1 = g$, запишем согласно (10) общее решение уравнения (9) в форме $U_n(0) = Ag^n + Bg^{-n}$, а постоянные A и B определим с помощью граничных условий при $n=0$ и $n=N$ из двух последних уравнений системы (7) - $A + B = 0$, $Ag^N + Bg^{-N} = 0$. Отсюда следует, что $A(g^N - g^{-N}) = 0$. А так как $A \neq 0$, то с необходимостью получаем уравнение $g^{2N} = 1$, которое имеет $2N$ комплексных корней в форме

$$g = \pm \left(\cos \frac{kp}{N} + i \sin \frac{kp}{N} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (11)$$

Заметим, что из этой совокупности два корня $g = \pm 1$ (при $k=0$), как видно, соответствуют невозмущенному состоянию каната ($U_n \equiv 0$), и из дальнейшего рассмотрения их исключаем. Кроме того, для каждого $k > 0$ найдется такое $k' = N - k$, для которого в соответствии с (11) величина g отличается только знаком, поэтому в (11) из знаков « \pm » оставляем один из них, например, « $+$ ». Количество различных g в (11) оказывается, таким образом, равным $N-1$, то есть количеству упругих подвесок. Итак, подстановка (11) в (9) с учетом сделанных замечаний и принятых обозначений приводит к характеристическому уравнению для определения спектра собственных чисел b , а значит, и собственных частот w :

$$\cos b + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{b} - bz \right) \sin b = \cos \frac{kp}{N} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (12)$$

Из уравнений (12) следует, что для каждого фиксированного k из совокупности чисел $1, 2, \dots, N-1$ определяется бесконечное множество собственных чисел b_{kj} ($j = 1, 2, \dots, \infty$). Следовательно, собственные числа образуют изолированные группы из $N-1$ чисел в каждой, и таких групп - бесконечное множество.

При большом N величины $\cos(kp/N)$ в интервале $(-1, 1)$ укладываются, в известном смысле, достаточно плотно, поэтому характеристические числа b_{kj} в каждой группе образуют почти непрерывный спектр на отрезке $[b_{1j}, b_{N-1j}]$. Граничные точки этого интервала находятся с помощью (12) при $k=1$ и $k=N-1$, то есть из двух уравнений $\cos b + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{b} - bz \right) \sin b = \pm \cos \frac{p}{N}$, а при $N \rightarrow \infty$ - из двух уравнений $\cos b + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{b} - bz \right) \sin b = \pm 1$.

Выражения для $U_n(0)$ согласно выкладкам с точностью до нормировочного множителя запишется в виде $U_n(0) = A \sin \frac{nkp}{N}$ ($k, n = 1, 2, \dots, N-1$), а подстановка этих выражений в (8) дает возможность определить собственные функции рассматриваемой граничной задачи в форме

$$U_n(x) = A \left(\sin \frac{(n+1)kp}{N} \frac{\sin bx}{\sin b} + \sin \frac{nkp}{N} \frac{\sin b(1-x)}{\sin b} \right) \quad (n, k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (13)$$

На рис. 2 изображены три группы ($j=3$) собственных чисел b для $N=11$ и $z=0$ при логарифмическом изменении параметра s . Как видно, каждая группа образуется десятью ($N-1$) непрерывными линиями геометрических мест собственных чисел, стягивающимися в точки $p, 2p, 3p$ при $s \rightarrow \infty$.

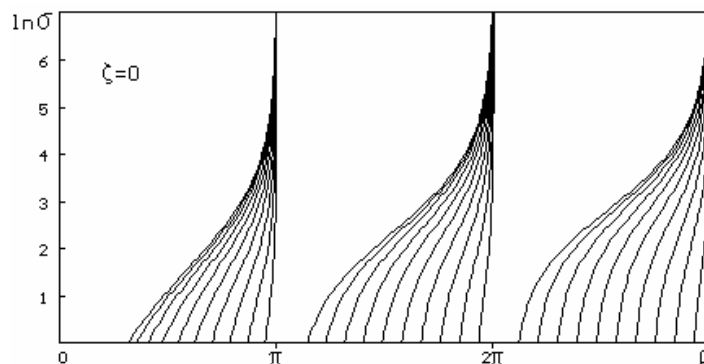


Рис. 2. Диаграмма собственных чисел b_{kj} при $z=0$ ($N=11$)

При увеличении N «ширина зоны» каждой группы увеличивается, что заметно лишь при сравнительно небольших s , но даже в пределе, при $N \rightarrow \infty$, зоны групп не перекрываются и остаются изолированными при всех $s > 0$. Это обстоятельство иллюстрирует диаграмма рис.3, построенная при $N=71$ (дальнейшее увеличение N картину практически не изменяет).

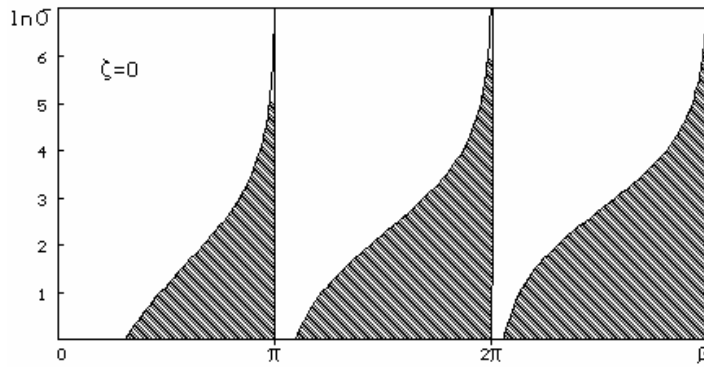


Рис.3. Дискретные области группировки чисел b_{kj} при $z = 0$ ($N = 11$)

Здесь в каждой из заштрихованных областей располагается ровно по 70 непересекающихся кривых, устремляющихся практически в точку при больших значениях s . Правые границы областей практически не зависят от s , то есть имеют место приближенные оценки: $b_{N-1j} \approx jp$.

На рис. 4 изображены три группы собственных чисел, как и на рис. 2, но при $z = 1$. В этом случае имеет место значительная «деформация» зон, особенно заметная при относительно небольших s .

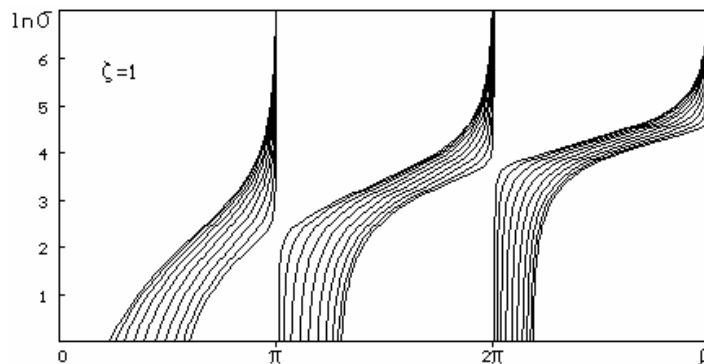


Рис. 4. Диаграмма собственных чисел b_{kj} с сосредоточенными массами на промежуточных опорах ($N = 11$)

При некоторых «критических» значениях $s = s_j$ имеет место взаимное «сближение» соседних зон, что особенно характерно при больших N , как это показано на рис. 5, полученном при $N = 71$. Здесь, как и на рис.3, в каждой из заштрихованных областей располагается ровно по 70 непересекающихся кривых, устремляющихся практически в точку при больших значениях s . Однако правые границы областей оказываются зависящими от s , причем для любого $j \geq 1$ имеют место приближенные оценки типа $b_{1j} \approx (j-1)p$ при $s < s_{j-1}$, $b_{N-1j} \approx jp$ при $s > s_j$, где s_j определяется при условии равенства нулю множителя при $\sin b$ в уравнении (12) при $b = 0, p, 2p, \dots$, то есть по формуле

$s_j = z(jp)^2$ ($j = 0, 1, 2, \dots$). Так, при $z = 1$ имеем $s_0 = 0$, $\ln s_1 \approx 2.29$, $\ln s_2 \approx 3.68$, $\ln s_3 \approx 4.49$ и т.д., что также подтверждается диаграммой рис. 5.

Изложенный метод определения собственных чисел путем их разделения на группы по $N - 1$ чисел в каждой значительно упрощает их вычисление особенно при больших N или при больших S .

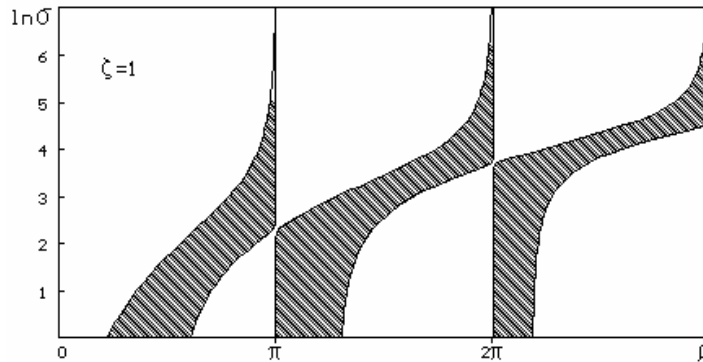


Рис.5. Дискретные области группировки собственных чисел b_{kj} с сосредоточенными массами на промежуточных опорах ($N = 71$).

В дальнейшем вместо обозначений b_{kj} , где k означает номер числа в группе, а j - номер группы, ограничимся более простой сквозной записью - b_k , где индекс k номерует подряд все числа в порядке их возрастания.

Цель дальнейшего изложения состоит в построении общего решения уравнений поперечных колебаний гибкого каната при воздействии на него внешних возмущающих сил. Природа этих сил может быть весьма разнообразной и в общем случае представим их в форме распределенной нагрузки $q_n(s, t)$, зависящей от координаты s и времени t , и действие которой распространяется в пределах пролета между опорами с номером n и $n + 1$.

Прежде всего покажем, что собственные формы (13) граничной задачи (7) образуют полную ортогональную систему. Для этого первое уравнение задачи (7), записанные для двух различных собственных чисел b_j и b_k в безразмерной

форме $\frac{d^2 U_{nj}}{dx^2} + b_j^2 U_{nj} = 0$, $\frac{d^2 U_{nk}}{dx^2} + b_k^2 U_{nk} = 0$, умножим в отдельности первое

на U_{nk} , а второе - на U_{nj} , проинтегрируем их разность по x от 0 до 1 и просуммируем по всем пролетам:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 \left[U_{nk} \frac{d^2 U_{nj}}{dx^2} - U_{nj} \frac{d^2 U_{nk}}{dx^2} \right] dx + \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 (b_j^2 - b_k^2) U_{nj} U_{nk} dx = 0.$$

Первый из этих интегралов проинтегрируем по частям и учтем граничные условия и уравнения сопряжения граничной задачи (7). При этом получим

$$(b_j^2 - b_k^2) \left\{ z \sum_{n=1}^{N-1} U_{nk}(0)U_{nj}(0) + \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 U_{nk}(x)U_{nj}(x)dx \right\} = 0.$$

Отсюда при $b_j \neq b_k$ с необходимостью следует равенство

$$z \sum_{n=1}^{N-1} U_{nk}(0)U_{nj}(0) + \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 U_{nk}(x)U_{nj}(x)dx = 0, \quad (14)$$

что и является свидетельством ортогональности собственных функции, принадлежащих различным собственным числам ($k \neq j$). Если же $k = j$, то (14), естественно, отлично от нуля и в общем случае есть некоторое положительное число, зависящее от номера k . Потребовав, чтобы это число равнялось единице, можно таким образом определить нормировочный коэффициент A в (13) из следующего соотношения, получающегося при подстановке (13) в (14),

$$A^2 \left\{ z \sum_{n=1}^{N-1} \sin^2 \frac{nkp}{N} + \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 \left[\sin \frac{(n+1)kp}{N} \frac{\sin bx}{\sin b} + \sin \frac{nkp}{N} \frac{\sin b(1-x)}{N} \right]^2 dx \right\} = 1, \quad (15)$$

и этим самым система собственных функций становится ортонормированной:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 U_{nk}(x)U_{nj}(x)[1 + zd(x-1)]dx = d_{kj}, \quad (16)$$

где d_{kj} - символ Кронекера, $d(x-1)$ - импульсивная функция Дирака. Если при вычислении (15) учесть известные тождества

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2 \frac{nkp}{N} = \frac{N}{2}, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2 \frac{(n+1)kp}{N} = \frac{N}{2},$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin \frac{nkp}{N} \sin \frac{(n+1)kp}{N} = \frac{N}{2} \cos \frac{kp}{N}, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \sin \frac{nkp}{N} \cos \frac{nkp}{N} = 0,$$

то квадрат нормировочного коэффициента можно определить в виде

$$A_k^2 = \frac{4b_k^2 \sin b_k}{N(b_k^2 \sin b_k + zb_k^2(\sin b_k + b_k \cos b_k) + s(\sin b_k - b_k \cos b_k))}. \quad (17)$$

С помощью системы ортонормированных собственных функций теперь не представляет труда получить общее решение уравнений поперечных колебаний каната при действии на него произвольной нагрузки. Так, если

$$P \frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} - r \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -q_n(s, t) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (18)$$

то отыскивая решение в форме разложения

$$u_n(s, t) = h \sum_{k=1}^{\infty} U_{nk}(s) j_k(t), \quad (19)$$

где $j_k(t)$ – некоторые пока еще неизвестные функции, получим при подстановке

ке (19) в (18) выражение: $rh \sum_{k=1}^{\infty} U_{nk}(s) (j_k'' + w_k^2 j_k) = q_n(s, t)$. С учетом принятых

обозначений перепишем полученное соотношение также в форме

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{nk}(x) \left(\frac{d^2 j_k}{dt^2} + b_k^2 j_k \right) = \frac{h}{P} q_n(x, t), \quad (20)$$

где введено «безразмерное время» t согласно $t = t \sqrt{P/(rh^2)}$. Умножим теперь (20) на множитель $[1 + zd(x-1)] \cdot U_{nj}(x)$, проинтегрируем по x от 0 до 1 и просуммируем по n от 0 до $N-1$, в результате чего получим, благодаря соотношениям ортогональности (16),

$$\frac{d^2 j_j}{dt^2} + b_j^2 j_j = \frac{h}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 q_n(x, t) [1 + zd(x-1)] \cdot U_{nj}(x) dx. \quad (21)$$

Таким образом, определяя с помощью (21) совокупность функций $j_j(x)$ для каждого собственного числа b_j , можно утверждать, что ряд (19) представляет собой искомое решение сформулированной задачи.

В качестве иллюстрации изложенного метода решения рассмотрим простейший случай, когда возмущающая функция $q_n(s, t)$ представляет собой функцию вида $q_n(s, t) = mv d(s - s_0) d(t) d_{np}$ ($0 < s_0 < h$), то есть предполагается, что в момент времени $t = 0$ на некотором пролете с номером p в точке $s = s_0$ канат подвергся нагружению импульсом mv (например, произошло столкновение с канатом некоторой массы m , движущейся со скоростью v). При этом с помощью

(21) получим уравнение $\frac{d^2 j_j}{dt^2} + b_j^2 j_j = \frac{mv}{h\sqrt{Pr}} d(t) U_{pj}(x_0)$ ($x_0 = \frac{s_0}{h}$), имеющее

решение $j_j(t) = \frac{mv}{h\sqrt{Pr}} \frac{\sin b_j t}{b_j} U_{pj}(x_0)$ в форме интеграла Дюамеля, а общее

решение (19) запишется так:

$$u_n(x, t) = \frac{mv}{rc} \sum_{k=1}^{\infty} U_{nk}(x) U_{pk}(x_0) \frac{\sin b_k t}{b_k}, \quad (22)$$

где $c = \sqrt{P/r}$ - скорость распространения поперечной волны в канате.

Рассмотрим характер колебаний точек каната при некоторых фиксированных значениях x в (22), например, при $x = x_1$, где $0 \leq x_1 \leq 1$, причем x_1 может также совпадать с x_0 . На рис. 6 и рис. 7 изображены два процесса колебаний, полученных при $\ln s = 2$, $z = 0$ и $N = 11$ для точек на центральном пролете, где подействовал импульс mv в точке с координатой x_0 . По вертикальной оси на этих графиках отложены величины безразмерной функции $x(t) = \frac{rc}{mv} u(x_1, t)$.

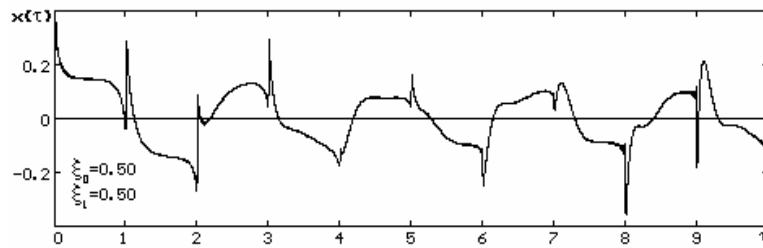


Рис. 6. Колебание точки каната с координатой $x_1 = 0.5$ на центральном пролете при $N = 11$ ($\ln s = 2$, $z = 0$)

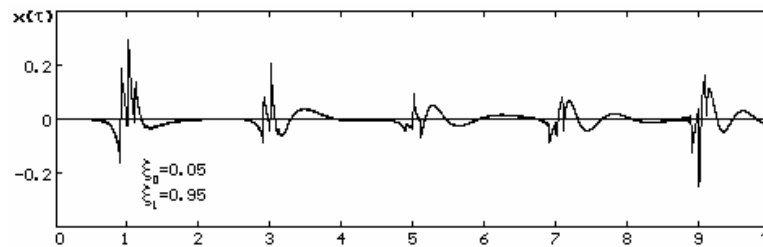


Рис. 7. Колебание точки каната с координатой $x_1 = 0.95$ на центральном пролете при $N = 11$ ($\ln s = 2$, $z = 0$)

Форма графиков, представленных на этих рисунках, свидетельствует о явно выраженном релаксационном характере колебаний, обладающих квазипериодическими свойствами в связи с многократными отражениями волн прежде всего от соседних опор. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что колебания имеют очевидные признаки хаотических процессов, хотя это, вообще говоря, требует специальной проверки.

Рассмотренная задача может найти приложение при исследовании подвесных канатных дорог, линий электропередач и др.

Литература

1. Дворников В.И. Собственные формы и частоты колебаний многопролетных балок на упругих опорах, Прикладная механика, т. 10, в. 9, 1974, с. 92-97.