Бородянко Владимир Николаевич
Переходные процессы в линейных электрических цепях
Введение

Под переходным (динамическим, нестационарным) процессом или режимом в электрических цепях понимается процесс перехода цепи из одного установившегося состояния (режима) в другое. При установившихся, или стационарных, режимах в цепях постоянного тока напряжения и токи неизменны во времени, а в цепях переменного тока они представляют собой периодические функции времени. Установившиеся режимы при заданных и неизменных параметрах цепи полностью определяются только источником энергии. Следовательно, источники постоянного напряжения (или тока) создают в цепи постоянный ток, а источники переменного напряжения (или тока) – переменный ток той же частоты, что и частота источника энергии.

Переходные процессы возникают при любых изменениях режима электрической цепи: при подключении и отключении цепи, при изменении нагрузки, при возникновении аварийных режимов (короткое замыкание, обрыв провода и т.д.). Изменения в электрической цепи можно представить в виде тех или иных переключений, называемых в общем случае коммутацией. Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего до коммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему после коммутационному режиму.

Переходные процессы обычно быстро протекающие: длительность их составляет десятые, сотые, а иногда и миллиардные доли секунды. Сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд. Тем не менее изучение переходных процессов весьма важно, так как позволяет установить, как деформируется по форме и амплитуде сигнал, выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса, а также определять продолжительность переходного процесса. С другой стороны, работа многих электротехнических устройств, особенно устройств промышленной электроники, основана на переходных процессах. Например, в электрических нагревательных печах качество выпускаемого материала зависит от характера протекания переходного процесса. Чрезмерно быстрое нагревание может стать причиной брака, а чрезмерно медленное отрицательно оказывается на качестве материала и приводит к снижению производительности.

5.1 Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации

В общем случае в электрической цепи переходные процессы могут возникать, если в цепи имеются индуктивные и емкостные элементы, обладающие способностью накапливать или отдавать энергию магнитного или электрического поля. В момент коммутации, когда начинается переходный процесс, происходит перераспределение энергии между индуктивными, емкостными элементами цепи и внешними источниками энергии, подключенными к цепи. При этом часть энергия безвозвратно преобразуется в другие виды энергий (например, в тепловую на активном сопротивлении).

После окончания переходного процесса устанавливается новый установившийся режим, который определяется только внешними источниками энергии. При отключении внешних источников энергии переходный процесс может возникать за счет энергии электромагнитного поля, накопленной до начала переходного режима в индуктивных и емкостных элементах цепи.

Изменения энергии магнитного и электрического полей не могут происходить мгновенно, и, следовательно, не могут мгновенно протекать процессы в момент коммутации. В самом деле, скачкообразное (мгновенное) изменение энергии в индуктивном и емкостном элементе приводит к необходимости иметь бесконечно большие мощности $p = dW/dt$, что практически невозможно, ибо в реальных электрических цепях бесконечно большой мощности не существует.

Таким образом, переходные процессы не могут протекать мгновенно, так как невозможно в принципе мгновенно изменять энергию, накопленную в электромагнитном поле цепи. Теоретически переходные процессы заканчиваются за время $t \to \infty$. Практически же переходные процессы являются быстропротекающими, и их длительность обычно составляет доли секунды. Так как энергия магнитного W_M и электрического полей $W_Э$ описывается выражениями

,

то ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться мгновенно. На этом основаны законы коммутации.

Первый закон коммутации состоит в том, что ток в ветви с индуктивным элементом в начальный момент времени после коммутации имеет то же значение, какое он имел непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения он начинает плавно изменяться. Сказанное обычно записывают в виде $i_L(0-) = i_L(0+)$, считая, что коммутация происходит мгновенно в момент $t = 0$.

Второй закон коммутации состоит в том, что напряжение на емкостном элементе в начальный момент после коммутации имеет то же значение, какое оно имело непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения оно начинает плавно изменяться: $U_C(0-) = U_C(0+)$.

Следовательно, наличие ветви, содержащей индуктивность, в цепи, включаемой под напряжение, равносильно разрыву цепи в этом месте в момент коммутации, так как $i_L(0-) = i_L(0+)$. Наличие в цепи, включаемой под напряжение, ветви, содержащей разряженный конденсатор, равносильно короткому замыканию в этом месте в момент коммутации, так как $U_C(0-) = U_C(0+)$.

Однако в электрической цепи возможны скачки напряжений на индуктивностях и токов на емкостях.

В электрических цепях с резистивными элементами энергия электромагнитного поля не запасается, вследствие чего в них переходные процессы не возникают, т.е. в таких цепях стационарные режимы устанавливаются мгновенно, скачком.

В действительности любой элемент цепи обладает каким-то сопротивлением r, индуктивностью L и емкостью C, т.е. в реальных электротехнических устройствах существуют тепловые потери, обусловленные прохождением тока и наличием сопротивления r, а также магнитные и электрические поля.

Переходные процессы в реальных электротехнических устройствах можно ускорять или замедлять путем подбора соответствующих параметров элементов цепей, а также за счет применения специальных устройств.
5.2. Математические основы анализа переходных процессов

Задача исследования переходных процессов заключается в том, чтобы выяснить, по какому закону и как долго будет наблюдаться заметное отклонение токов в ветвях и напряжений на участках цепи от их установившихся значений. Так, например, если в исследуемой ветви некоторой цепи до коммутации существовал постоянный ток I1, а в установившемся режиме после коммутации он стал I2, то нас будет интересовать закон изменения переходного тока i между моментом коммутации (t=0) и тем неизвестным нам моментом времени t1, когда переходный процесс можно считать закончившимся.

При анализе переходных процессов в электрических цепях считается, что:
рубильники включаются и размыкаются мгновенно, без возникновения электрической дуги;
время переходного процесса, теоретически бесконечно длительное, (переходный режим асимптотически приближается к новому установившемуся режиму), ограничивают условным пределом – длительностью переходного процесса;
установившийся режим после коммутации рассчитывают при теоретическом условии $t\to\infty$, т.е. когда после коммутации прошло бесконечно большое время.

Установившийся режим до коммутации рассчитывают обычно в предположении, что к моменту коммутации в цепи закончился предыдущий переходный процесс. Хотя иногда приходится анализировать переходные процессы, возникающие в цепи, когда предыдущий переходный процесс, вызванный прежними коммутациями, еще не закончился. Но это не изменяет теоретическую постановку задачи.

Анализ переходных процессов производят путем решения дифференциальных уравнений, составленных для исследуемой электрической цепи на основе законов Кирхгофа или метода контурных токов.

Рис. 5.1

Пусть в некоторой цепи (рис. 5.1 а) внезапно изменяется сопротивление. До коммутации в цепи существовали сопротивления R0 и R, после коммутации остается только R. Требуется определить переходный ток i. Электрическое состояние схемы после коммутации описывается интегродифференциальным уравнением, записанным на основании II закона Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений:

(5.1)

Если это уравнение продифференцировать по времени получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, у которого в качестве постоянных коэффициентов выступают параметры цепи или их комбинации:

(5.2)

Из математики известно, что полное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами находят в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Поскольку в правой части дифференциальных уравнений, описывающих электрическое состояние цепей, обычно находится напряжение (или ток) источника (внешняя вынуждающая сила), то частное решение находят из анализа установившегося режима после коммутации. Отсюда этот режим называют принужденным и соответственно токи или напряжения, найденные в данном режиме, называют принужденными. Расчет принужденного режима, когда внешние источники вырабатывают постоянную или синусоидальную э.д.с. (ток), не представляет трудностей и может быть осуществлен любым известным методом.

Однородное дифференциальное уравнение получают из выражения (5.2) путем "освобождения" его от правой части. Физически это означает, что исследуемая цепь "освобождается" от внешней вынуждающей силы. Токи или напряжения, найденные при решении однородного дифференциального уравнения, называются свободными. Свободные токи и напряжения являются результатом действия внутренних источников схемы: э.д.с. самоиндукции, возникающих в катушках, и напряжений на конденсаторах, когда и те, и другие не уравновешены внешними источниками.

Схематически анализ переходного процесса может быть представлен как результат наложения двух режимов: принужденного и свободного. Схема на рис. 5.1 б должна быть рассчитана в установившемся (принужденном) режиме, а схема на рис. 5.1 в — в режиме, когда цепь освобождена от внешних источников. Действительный (переходный) ток в соответствии с принципом суперпозиции равен сумме установившегося (принужденного) и свободного токов:

i = iу + iсв.

Заметим, что физически существует только переходные токи и напряжения, а разложение их на свободные и принужденные составляющие является математическим приемом, позволяющим упростить расчет переходных процессов в линейных цепях. Напомним, что принцип суперпозиции применим лишь к линейным цепям.

Существуют различные методы решения однородного дифференциального уравнения, полученного из выражения (5.2):

(5.3)

Классический метод анализа переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений. Решение находят в виде суммы экспонент:

(5.4)

iсв = A1 · ep1t + A2 · ep2t,

где число слагаемых равно порядку дифференциального уравнения.

После подстановки экспонент Ak · epkt в исходное уравнение (5.3) и дифференцирования можно получить характеристическое уравнение, из которого определяют корни p1, p2. Если встречаются кратные корни (например, p1 = p2 = P), решение имеет вид A1 · ePt + A2 · ePt.

Постоянные интегрирования A1, A2 находят из начальных условий, которые определяют с помощью законов коммутации. Различают независимые и зависимые (после коммутационные) начальные условия. К первым относят значения токов через индуктивности и значения напряжений на емкостях, известные из до коммутационного режима работы цепи.

Значения остальных токов и напряжений при t = 0 в после коммутационной схеме, определяемые по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа для схемы после коммутации, называют зависимыми начальными значениями.

Классический метод анализа применяют обычно для анализа процессов в несложных электрических цепях.
5.3. Алгоритм расчета переходного процесса классическим методом

Для анализа переходного процесса предварительно следует привести схему к минимальному числу накопителей энергии, исключив параллельные и последовательные соединения однотипных реактивных элементов (индуктивностей или емкостей). Система интегродифференциальных уравнений, составленных в соответствии с законами Кирхгофа или методом контурных токов, может быть сведена путем подстановки к одному дифференциальному уравнению, которое используется для составления характеристического уравнения.

Порядок дифференциального, следовательно, и характеристического уравнения зависит от числа реактивных элементов приведенной схемы. Главная трудность в решения задачи классическим методом для уравнений высоких порядков состоит в отыскании корней характеристического уравнения и постоянных интегрирования. Поэтому для решения уравнений порядка выше второго применяют другие методы, в частности операторный метод, основанный на применении преобразования Лапласа и исключающий трудоемкую процедуру отыскания постоянных интегрирования.

Для практических целей при анализе переходных процессов в любой схеме классическим методом может быть рекомендован следующий алгоритм.
Рассчитать принужденный (установившийся) режим при t→∞. Определить принужденные токи и напряжения.
Рассчитать режим до коммутации. Определить токи в ветвях с индуктивностью и напряжения на конденсаторах. Значения этих величин в момент коммутации является независимыми начальными условиями.
Составить дифференциальные уравнения для свободного процесса (E = 0) в схеме после коммутации по законам Кирхгофа или по методу контурных токов. Алгебраизировать данные уравнения, получить характеристическое уравнение и найти его корни. Существуют приемы, упрощающие операцию отыскания корней характеристического уравнения, например, приравнивание нулю входного операторного сопротивления цепи, которое получается путем замены в выражении комплексного сопротивления цепи множителя "jω" на оператор "p".
Записать общие выражения для искомых напряжений и токов в соответствии с видом корней характеристического уравнения.
Переписать величины, полученные в п. 4, и производные от них при t = 0.
Определить необходимые зависимые начальные условия, используя независимые начальные условия.
Подставив начальные условия в уравнения п. 5, найти постоянные интегрирования.
Записать законы изменения искомых токов и напряжений.
5.4. Переходные процессы в электрических цепях с последовательно соединенными резисторами и катушками

В данном разделе предполагается не только практическое знакомство с классическим методом расчета переходных процессов, но и с особенностями самих процессов в рассматриваемых задачах.
5.4.1. Короткое замыкание в цепи с резистором и катушкой

Рис. 5.2

Исследуем электромагнитные процессы в цепи, изображенной на рис. 5.2, происходящие после замыкания ключа.

Рассчитаем установившийся режим в цепи до коммутации (до замыкания ключа) и определим из него независимое начальное условие — ток в катушке в момент t = 0-, непосредственно предшествующий коммутации

$i(0-) = i(0+) = E / (R_{вн} + R)$.

Найдем установившийся ток i после коммутации. Так как во вновь образованном контуре из катушки L и резистора R нет источника, то $i_у = 0$.

Для определения свободной составляющей тока запишем по второму закону Кирхгофа уравнение электрического состояния цепи после коммутации:

.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$pL + R = 0$.

Общее решение уравнения для свободной составляющей:

$i_{св} = A\,e^{pt}$,

где: A – постоянная интегрирования;
$p = - R/L$, c^{-1} – корень характеристического уравнения.

Записав общий вид переходного тока катушки

$i = i_у + i_{св} = A\,e^{pt}$,

приравниваем его значение $i(0+) = A$ в точке $t = 0+$ к значению $i(0-)$, найденному в п. 1. Получаем искомую константу

$A = E / (R_{вн} + R) = I_0$.

Переходный ток $i = i_у + i_{св}$ при этом равен

,

где $\tau = L / R$ – постоянная времени цепи.

Постоянная времени – это время, в течение которого свободная составляющая процесса уменьшается в e = 2,72 раза по сравнению с начальным значением.

Рис. 5.3

График изменения переходного тока показан на рис. 5.3.

Определим э.д.с. самоиндукции катушки

$t \geq 0$.

В момент коммутации эта э.д.с. равна напряжению на сопротивлении R, а в дальнейшем уменьшается по экспоненциальному закону.
На основании изложенного можно сделать следующие выводы.
При коротком замыкании в рассматриваемой цепи ток в ней изменяется по экспоненциальному закону, уменьшаясь от начального значения до нуля.
Скорость изменения тока определяется постоянной времени цепи, которая равна индуктивности катушки, деленной на активное сопротивление цепи.
Практически можно считать, что переходный процесс заканчивается при $t \approx (3…5)\tau$, когда первоначальное значение тока уменьшается по модулю на порядок.
Напряжение на катушке в начальный момент времени равно напряжению на активном сопротивлении:

$u_L(0+) = I_0R$.
С энергетической точки зрения рассматриваемый переходный процесс характеризуется расходом энергии магнитного поля катушки на тепловые потери в резисторе. Следует отметить, что сопротивление резистора влияет не на количество выделенной теплоты W, а на начальное значение напряжения катушки и длительность процесса. В самом деле

.
5.4.2. Включение цепи с резистором и катушкой на постоянное напряжение

Рис. 5.4

Переходный ток в цепи, изображенной на рис. 5.4, представим в виде

$i = i_у + i_{св}$.

1. До коммутации тока в катушке не было, следовательно,

$i_L(0-) = 0$.

2. Установившаяся составляющая тока после коммутации

$i_у = U / R$.

3. Свободная составляющая тока для цепи, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка

$i_{св} = A\, e^{-t/\tau} = A\, e^{pt}$, $p = - R / L$.

4. По начальным условиям определим постоянную интегрирования A и свободную составляющую тока:

$i(0) = i_у(0) + i_{св}(0)$; $i(0) = i_у(0+) + i_{св}(0-)$;

или

$0 = U / R + A$; $A = -U / R$; $i_{св} = -U / R \cdot e^{-t/\tau}$.

Переходный ток получается в виде

$i = U / R\, (1 - e^{-t/\tau})$.

Рис. 5.5

Напряжение на катушке

.

Кривые изменения токов i, $i_у$, $i_{св}$ и напряжения на катушке u_L показаны на рис. 5.5.

При включении рассматриваемого контура под постоянное напряжение ток в нем нарастает от нуля до установившегося значения. Скорость нарастания тока

изменяется по экспоненте с отрицательным показателем. В момент t = 0 эта скорость максимальна и равна U / L [A/c], со временем она падает практически до нуля, процесс выходит на установившийся режим.

В первый после коммутации момент t = 0+ ток в цепи еще равен нулю, и напряжение на катушке максимально $u_L = U$, далее оно экспоненциально снижается до нуля.
5.4.3. Включение цепи с резистором и катушкой на синусоидальное напряжение

Рис. 5.6

Если напряжение источника цепи (рис. 5.6)

$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$,

то установившийся ток

$i_у = U_m / Z \sin(\omega t + \psi - \varphi)$,

где: – полное сопротивление цепи;
$\varphi = \mathrm{arctg}(\omega L/R)$ - угол сдвига фаз между напряжением и током.

Свободный ток определяется

$i_{св} = A\, e^{-t/\tau}$.

Суммируя установившуюся и свободную составляющие, получим выражение для переходного тока:

$i = i_у + i_{св} = U_m / Z \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A\, e^{-t/\tau}$.

Рис. 5.7

используя независимые начальные условия при t = 0

$i(0-) = i(0+) = 0$,

находим постоянную интегрирования:

$A = -U_m / Z \sin(\psi - \varphi)$.

Тогда переходный ток:

.

Зависимости переходного тока от времени при различных значениях разностей ψ - φ показаны на рис. 5.7. Их анализ позволяет сделать следующие выводы.
Если в момент включения установившийся ток равен нулю (ψ - φ = 0 или ψ - φ = π), то свободной составляющей тока не возникает и в цепи сразу возникает установившийся режим:

i = iу = Im sin(ωt) = Um / Z sin(ωt).
Если в момент включения установившийся ток имеет наибольшее значение (ψ - φ = π / 2), свободный ток достигает максимального по модулю значения приблизительно через половину периода, однако ни при каких условиях он не может превышать удвоенной амплитуды установившегося тока (рис. 5.7 б).
5.5 Переходные процессы в цепи с последовательно включенными резисторами и конденсатором
5.5.1. Разряд конденсатора на резистор

Рассмотрим переходный процесс при коротком замыкании в цепи с конденсатором и резистором (рис. 5.8), если предварительно конденсатор был заряжен до напряжения

uC(0+) = U0 = E.

Рис. 5.8

Установившийся ток через конденсатор и установившееся напряжение на конденсаторе равны нулю. Для построения характеристического уравнения запишем по второму закону Кирхгофа уравнение для вновь образованного контура

R i + uC = 0.

При расчете переходных процессов в цепях с конденсатором часто удобнее отыскать сначала не ток, а напряжение на конденсаторе uC , а затем учитывая, что , найти ток через конденсатор. Поэтому запишем уравнение по второму закону Кирхгофа в виде:

.

Характеристическое уравнение имеет вид:

RCp + 1 = 0.

Общее решение для свободной составляющей напряжения:

uCсв = A ept = A e-t/τ,

где: A = U0 – постоянная интегрирования;
p = - 1 / (RC) – корень характеристического уравнения;
τ = RC – постоянная времени цепи.

С учетом нулевого значения установившегося напряжения получим напряжение на конденсаторе:

uC = U0 e-t/τ.

Переходный ток в цепи

.

Рис. 5.9

Кривые изменения напряжения на конденсаторе и тока в цепи во времени имеют вид экспонент (рис. 5.9).

С энергетической точки зрения переходный процесс характеризуется переходом энергии электрического поля конденсатора в тепловую энергию в резисторе. Следует отметить; что сопротивление резистора влияет не на количество выделенной теплоты, а на начальное значение тока и длительность разряда. В самом деле

.
5.5.2. Включение цепи с резистором и конденсатором на постоянное напряжение (заряд конденсатора)

Из схемы, приведенной на рис. 5.10, следует, что установившаяся составляющая напряжения на конденсаторе uCу = U, а свободная составляющая, очевидно, равна

Рис. 5.10

uCсв = A e-t/τ, τ = RC.

Полагаем, что до замыкания ключа конденсатор не был заряжен (Uc(0-) = 0). На основании законов коммутации uC(0-) = uC(0+) = 0, при t = 0; следовательно:

$u_C(0) = u_{Cy}(0) + u_{Cсв}(0)$ или $0 = U + A$, откуда $A = -U$.

Тогда переходное напряжение на конденсаторе

$u_C = U (1 - e^{-t/\tau})$,

а переходный ток в цепи

.

Зависимости напряжений и токов от времени показаны на рис. 5.10. Из них видно, что напряжение на конденсаторе возрастает по экспоненциальному закону от нуля до напряжения источника, а ток уменьшается от начального значения до нуля также по экспоненте. Длительность их изменения определяется постоянной времени $\tau = RC$. Здесь как и в п. 5.5.1 время переходного процесса принимается равным $t \approx (3 \div 5)\tau$.

5.5.3. Включение цепи с резистором и конденсатором на синусоидальное напряжение

Рис. 5.11

Пусть напряжение источника изменяется по закону

$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$.

Установившаяся составляющая напряжения на конденсаторе (см. рис. 5.11) равна:

$u_{Cy} = -U_m X_C / Z \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi / 2)$.

где: - полное сопротивление цепи;
$X_C = 1 / (\omega C)$ – емкостное сопротивление;
$\varphi = -\mathrm{arctg}(X_C / R)$ – угол сдвига фаз между установившимся током в цепи и приложенным синусоидальным напряжением.

Свободная составляющая напряжения на конденсаторе

$u_{Cсв} = A e^{-t/\tau}$, $\tau = RC$.

Переходное напряжение на конденсаторе

.

Рис. 5.12

Полагая, что $u_C(0-) = 0$, для постоянной интегрирования получим

.

Окончательно напряжение на конденсаторе можно записать в виде

.

Ток в цепи

.

Зависимости переходного напряжения на конденсаторе от времени при различных значениях разностей $\psi - \varphi$ показаны на рис. 5.12. Их анализ позволяет сделать следующие выводы.

Если в момент включения мгновенное значение установившегося напряжение на конденсаторе равно нулю ($\psi - \varphi - \pi / 2 = 0$), то и свободная составляющая напряжения равна нулю. В цепи сразу устанавливается режим (рис. 5.12 а).

Если в момент включения мгновенное значение установившегося напряжение на конденсаторе имеет наибольшее значение ($\psi - \varphi - \pi / 2 = \pi / 2$), то переходное напряжение достигает максимального значения приблизительно через половину периода и может приблизиться к удвоенной амплитуде установившегося напряжения, но не превысит его (рис. 5.12 в).

5.6. Разряд конденсатора на цепь с резистором и катушкой

Рис. 5.13

Пусть в цепи, изображенной на рис. 5.13, конденсатор был заряжен до напряжения $u_C(0-) = U_0$. Исследуем процессы в контуре, образованном резистором, конденсатором и катушкой после замыкания в момент $t = 0$ ключа. Так как источники в цепи отсутствуют, то установившиеся составляющие решений равны нулю. Решение будет состоять из одной свободной составляющей.

5.6.1. Составление характеристического уравнения. Определение собственных частот цепи

По второму закону Кирхгофа $t \geq 0$ имеем:

.

Учитывая, что , получаем дифференциальное уравнение второго порядка для свободной составляющей напряжения

.

Характеристическое уравнение при этом имеет вид:

.

Характер электромагнитных процессов в контуре зависит от соотношения параметров R, L, C, входящих в выражение для корней характеристического уравнения

.

В зависимости от знака подкоренного выражения корни могут быть вещественными или комплексно-сопряженными. Они определяют характер свободных составляющих переходных токов и напряжений.

5.6.2. Апериодический разряд конденсатора на катушку и резистор

Рассмотрим процесс разряда конденсатора на резистор R и катушку L. Если параметры контура из резистора, катушки и конденсатора удовлетворяют условию или , то корни характеристического уравнения контура вещественные, различные, т.е. $p1 \neq p2$, и отрицательные. В этом случае напряжение на конденсаторе описывается уравнением

$uC = uCсв = A1 \cdot ep1t + A2 \cdot ep2t$,

где A1 и A2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных, условий.

Свободный ток равен

.

Установившиеся составляющие напряжения на конденсаторе и тока равны нулю. Поэтому их переходные значения равны свободным составляющим:

$uC = uCсв$; $i = iсв$.

Определим из начальных условий постоянные интегрирования A1 и A2. При $t = 0$, $uC(0) = U0$ и $i(0) = 0$. Подставив их в выражения для переходных напряжений и токов при $t = 0$ имеем

$U0 = A1 + A2$; $0 = A1\ p1 + A2\ p2$.

Отсюда

$A1 = U0\ p2 / (p2 - p1)$; $A2 = -U0\ p1 / (p2 - p1)$;

С учетом начальных условий запишем

; .

Рис. 5.14

Произведение корней по теореме Виета: $p1\ p2 = 1 / (LC)$, следовательно, ток

.

Напряжение на катушке

.

Графики зависимости тока и напряжения от времени, показанные на рис. 5.14 позволяют говорить об апериодическом разряде конденсатора. Апериодическим называется такой разряд, при котором конденсатор все время разряжается, т.е. функция uC(t) - убывающая, а ток i не меняет своего направления, в нашем случае он отрицателен. Сделаем некоторые выводы.

Апериодический разряд конденсатора в цепи R, L, C возникает при вещественных, отрицательных и неравных корнях характеристического уравнения.

При апериодическом разряде напряжение на конденсаторе уменьшается от начального значения до нуля, а ток сначала возрастает по модулю, затем уменьшается, проходя через максимальное значение.

Напряжение на катушке уменьшается от начального значения, проходит через нулевое значение, изменяя знак и, достигнув наибольшего значения, уменьшается до нуля.

5.6.3. Предельный апериодический разряд конденсатора на катушку и резистор

При соотношении параметров контура из конденсатора, катушки и резистора

,

где RКР - критическое сопротивление резистора R, корни характеристического уравнения контура вещественные, равные и отрицательные:

p1 = p2 = p = -R / (2L).

Переходный процесс получается апериодическим, но граничным с колебательным процессом. Переходный ток и переходное напряжение в этом случае имеют вид:

uC = (A1 + A2 t) ept;

.

При начальных условиях uC(0) = U0; i(0) = 0 находим: A1 = U0; A2 = -p U0. С учетом найденных постоянных интегрирования получаем решения:

uC = U0 (1 - pt) ept;
;
.

Зависимости i, uC, uL такие же, как для апериодического разряда.
5.6.4. Периодический (колебательный) разряд конденсатора на цепь с резистором и катушкой

При соотношении параметров контура из конденсатора, катушки и резистора , где RКР – критическое сопротивление цепи, корни характеристического уравнения комплексные сопряженные:

p1,2 = -α ± jω,

где α = R / (2L) – коэффициент затухания свободной составляющей;
– угловая частота собственных колебаний контура;
T0 – период собственных колебаний.

Поскольку , то можно ввести обозначения

, , .

Свободная составляющая переходного напряжения при комплексно-сопряженных корнях (см. п.п. 5.2.1)

uCсв = A e-αt sin(ω0t + ψ),

Для свободной составляющей тока имеем

iсв = C A e-αt (-α sin(ω0t + ψ) + ω0 cos(ω0t + ψ)).

С учетом начальных условий при t = 0, uC = U0 , i = 0 из последних двух уравнений находим константы интегрирования:

U0 = A sin ψ; 0 = C A (-α sin ψ + ω0 cos ψ).

и далее

.

Запишем переходные напряжения и ток:

uC = UCm e-αt sin(ω0t + ψ);
i = -Im e-αt sin(ω0t + π);
uL= ULm e-αt sin(ω0t - ψ),

где ; .

Рис. 5.15

Зависимости переходных напряжения и тока uC, i показаны на рис. 5.15. Они представляют собой затухающие синусоиды. Скорость затухания колебаний оценивают декрементом колебаний. Декремент колебания - это постоянная, зависящая от параметров R, L, C и равная отношению амплитуд переходных параметров, отстающих друг от друга на период колебания T0, например:

.

Часто пользуются логарифмическим декрементом колебания:

.

В предельном случае чисто консервативной системы (R = 0) Δ = 1 колебания в параллельно соединенных конденсаторе и катушке носят незатухающий характер. Период этих колебаний дается формулой Томпсона , а частота незатухающих колебаний .

5.7. Включение контура из конденсатора, резистора, катушки на постоянное напряжение

Рис. 5.16

Рассмотрим электромагнитные процессы, возникающие после замыкания ключа в цепи, изображенной на рис. 5.16 в предположении, что конденсатор был предварительно не заряжен, т.е. uC(0-) = 0. Характеристическое уравнение и вид его корней будут такими же, как и в цепи, рассмотренной в п. 5.6.

5.7.1. Апериодический процесс

Между разрядом конденсатора на резистор с катушкой и включением на постоянное напряжение контура (см. рис. 5.16) существует аналогия. Так же, как при разряде конденсатора, установившаяся составляющая тока равна нулю. Установившееся напряжение на конденсаторе uCу = U. Следовательно, начальное значение свободной составляющей напряжения на конденсаторе

Рис. 5.17

uCсв(0+) = uC(0+) - uCу(0-)

равно uCсв(0+) = -U. То есть знаки постоянных интегрирования A1 и A2 в отличие от рассмотренного в п. 5.6 случая изменяются на противоположные. В этом случае переходное напряжение на конденсаторе, ток и напряжение на катушке определяются по формулам:

;
;.

Кривые uC(t), uL(t) и i(t) приведены на рис. 5.17.

5.7.2. Колебательный процесс

Включение рассматриваемого контура на постоянное напряжение может сопровождаться колебательным переходным процессом. При этом в отличие от процесса разряда конденсатора (см. п. 5.6) знак начального значения преходящего напряжения, следовательно, и коэффициента A, изменится на противоположный. Переходные напряжения и ток приобретут вид:

Рис. 5.18

;
;
.

Кривые uC(t) и i(t) показаны на рис. 5.18. Кривая тока отображает затухающие колебания относительно нулевого значения, а напряжения на конденсаторе – относительно установившегося значения. Следует отметить, что за время переходного процесса контура часть энергии источника переходит в тепло, а другая часть запасается в электрическом поле конденсатора в виде:

т.е. .