УДК 681.3 + 519.21

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЁТОК В 1-ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЕ ГРАФЫ.

И.А. Науменко, В.Г. Скобелев

Донецкий национальный технический университет, , г. Донецк, Украина
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк, Украина

Источник: Научный журнал «Прикладная дискретная математика». Томск, 2008. №1. С. 111-115.

Решается задача преобразования трансляцией по циклической группе графа некоторых n-мерных решёток в 1-отказоустойчивые графы. Оценен ряд характеристик результирующих графов.

Ключевые слова: графы, 1-отказоустойчивые системы

Введение.

В работе исследуется задача преобразования n-мерных решёток в 1-отказоустойчивые графы методом, предложенным в [1]. Детально этот метод изложен в [2,3]. Предполагается, что в преобразуемом графе существует гамильтонов путь либо цикл [4]. При их отсутствии исходный граф преобразуется в граф, имеющий гамильтонов путь. Реконфигурация при отказах производится преобразованием отказавшей вершины (связи) на избыточную с соответствующим переименованием вершин графа по одной из следующих групп автоморфизмов: циклической группе вращений (поворот на угол $\frac{2\pi}{n}i$ (i= 0,…,n–1)) или диэдральной группе симметрий.

Структура работы следующая. П.1 содержит основные понятия и определения. В п.2 исследуется преобразование простых прямоугольных n-мерные решеток, а в п.3 – диагональных прямоугольных n-мерные решеток. Заключение содержит ряд выводов.

1. Основные понятия.

Исходный объект – граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин, E ($E \subseteq V^{(2)}$) – множество рёбер. Задачей исследования является построение такого графа $G^* = (V_1, E_1)$, что при удалении одной его вершины либо ребра, редуцированный граф $G^*_{ред}$ содержит подграф $G^{\#}$, изоморфный G. При этом естественно строить не избыточный граф G^* , т.е. граф, который теряет свойство «быть 1-отказоустойчивым» при удалении хотя бы одной вершины, либо ребра. Особый интерес представляют минимальные 1-отказоустойчивые графы, т.е. которые содержат наименьшее число вершин и ребер. В 1-отказоустойчивом графе G^* существуют ребра 2-х типов: рабочие и избыточные, т.е. те, которые появились в результате преобразования графа к виду 1-отказоустойчивого графа G^*. Назовем степенью вершинной избыточности графа G число $v_в(G) = |V_1|\cdot|V|^{-1}$, а степенью рёберной избыточности графа G – число $v_р(G) = |E_1|\cdot|E|^{-1}$. В дальнейшем считаем, что $V = \mathbf{Z}_k$ и, следуя [3], сохраним термин ребро только за такими элементами $\{z_i, z_j\} \in E$, что $| z_i – z_j | = 1$, а элемент $\{z_i, z_j\} \in E$, для которого $| z_i – z_j | >1$ будем называть хордой длины l. Пусть $S_l(G)$ ($l \geq 2$) – число хорд длины l в графе G, а $S(G)$ – общее число хорд в графе G, т.е.

$$S(G) = \sum_{l\geq 2} S_l(G). \tag{1}$$

Пусть $S^{раб}(G^*)$ и $S^{изб}(G^*)$ – соответственно, число рабочих и избыточных хорд в графе G^*. Тогда $S^{раб}(G^*) = S(G)$ и $S^{изб}(G^*) = S(G^*) – S^{раб}(G^*)$. Пусть $E(G)$ – число рёбер в графе G, а $E^{раб}(G^*)$ и $E^{изб}(G^*)$ – соответственно, число рабочих и избыточных рёбер в графе G^*. Тогда $E^{раб}(G^*)= E(G)$ и $E^{изб}(G^*) = E(G^*) – E^{раб}(G^*)$. Характеристиками избыточности при переходе от графа G к графу G^* являются параметры $v_в(G)$, $v_р(G)$, $S^{изб}(G^*)$, $S^{раб}(G^*)$, $E^{изб}(G^*)$, $E^{раб}(G^*)$.

Рассмотрим характеристики 1-отказоустойчивых графов на примере некоторых однородных структур.

2. Простые прямоугольные n-мерные решетки.

Назовем простой прямоугольной n-мерной решёткой такой граф $R_{k_1,\dots,k_n} = (V, E)$, что $V = \times_{i=1}^{n} Z_{k_i}$ и

$$E = \{\{(v_1,\dots, v_n), (v_1',\dots,v_n')\} \subseteq V \mid (\exists!\, j \in \{1,\dots,n\})(| v_j – v_j' | = 1 \,\&\, (\forall j' \neq j)(v_j = v_j'))\}.$$

Занумеруем вершины графа $R_{k_1,\dots,k_n}$ так, что номером вершины $\mathbf{v} = (v_1,\dots,v_n)$ является число

$$q(\mathbf{v}) = v_1 + k_1\cdot v_2 + k_1\cdot k_2\cdot v_3 +\dots+ k_1\cdot\dots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n = \sum_{i=1}^{n}(v_i \cdot \prod_{j=0}^{n-1} k_j). \tag{2}$$

Пусть $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \in E$, где $\mathbf{v} = (v_1,\dots,v_i,\dots,v_n) \in V$ и $\mathbf{v}' = (v_1,\dots,v_i +1,\dots,v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(\mathbf{v}) = v_1 + k_1\cdot v_2 +\dots+ k_1\cdot\dots\cdot k_{i-1}\cdot v_i +\dots+ k_1\cdot\dots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n, \tag{3}$$

$$q(\mathbf{v}') = v_1 + k_1\cdot v_2 +\dots+ k_1\cdot\dots\cdot k_{i-1}\cdot(v_i +1) +\dots+ k_1\cdot\dots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$| q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{v}') | = k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1} \ (i = 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Из (5) вытекают

Утверждение 1. В решетке $R_{k_1,\ldots,k_n}$ $\{\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n),\ \mathbf{v}' = (v_1,\ldots,v_i+1,\ldots,v_n)\} \in E$ – хорда тогда и только тогда, когда $i = 2,\ldots, n$.

Утверждение 2. В решетке $R_{k_1,\ldots,k_n}$ если $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \in E$ – хорда длины l, то

$$l \in \{k_1,\ k_1 \cdot k_2,\ \ldots,\ \prod_{i=1}^{n-1} k_i\ \}. \tag{6}$$

Так как

$$\begin{cases} S_{k_1}(R_{k_1,\ldots,k_n}) = k_1 \cdot (k_2 - 1) \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n = \prod_{i=1}^{n} k_i \cdot (1 - k_2^{-1}) \\ S_{k_1 \cdot k_2}(R_{k_1,\ldots,k_n}) = k_1 \cdot k_2 \cdot (k_3 - 1) \cdot k_4 \cdot \ldots \cdot k_n = \prod_{i=1}^{n} k_i \cdot (1 - k_3^{-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{\prod_{1}^{n-1} k_i}(R_{k_1,\ldots,k_n}) = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_{n-1} \cdot (k_n - 1) = \prod_{i=1}^{n} k_i \cdot (1 - k_n^{-1}) \end{cases}, \tag{7}$$

то из (1), (6) и (7) вытекает

Теорема 1. Для решетки $R_{k_1,\ldots,k_n}$ истинно равенство

$$S(R_{k_1,\ldots,k_n}) = ((n-1) - \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i\ .$$

Преобразуем решетку $R_{k_1,\ldots,k_n}$ к виду 1-отказоустойчивого графа. Для этого добавим рёбра таким образом, чтобы гамильтонов путь имел стандартный вид: $0 \to 1 \to \ldots \to (n-1)$. Добавим новую вершину n и соединим её с вершинами 0 и $n - 1$. Для того, чтобы получить минимальный 1-отказоустойчивый граф необходимо вставить избыточную вершину n в ребро, принадлежащее гамильтонову пути. Осуществим трансляцию дуг по циклической группе автоморфизмов C_n. В результате получим 1-отказоустойчивый граф $R^*_{k_1,\ldots,k_n}$. Характеристики избыточности при переходе от $R_{k_1,\ldots,k_n}$ к $R^*_{k_1,\ldots,k_n}$ равны

$$S^{раб}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = S(R_{k_1,\ldots,k_n}) = ((n-1) - \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i\ ,$$

$$S^{изб}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = \prod_{i=1}^{n} k_i \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1} + n - 1,$$

$$E^{раб}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = (k_1 - 1) \prod_{i=2}^{n} k_i\ ,$$

$$E^{изб}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = \prod_{i=2}^{n} k_i + 1.$$

Рассмотрим специальные случаи прямоугольной n-мерной решётки $R_{k_1,\ldots,k_n}$, когда $n \in \{2,3\}$.

1. $n = 2$. Решётка R_{k_1,k_2} размера изображена на рис. 1, а граф $R^*_{k_1,k_2}$ – на рис. 2.

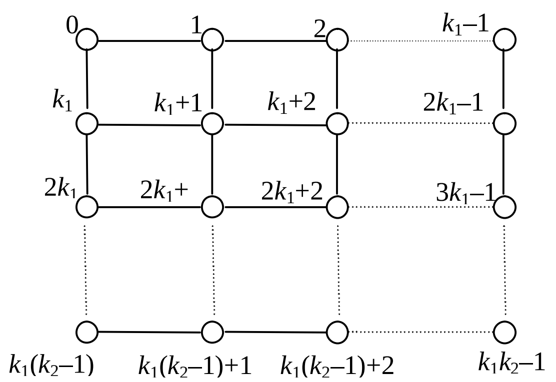

Рисунок 1 – Решётка R_{k_1,k_2}

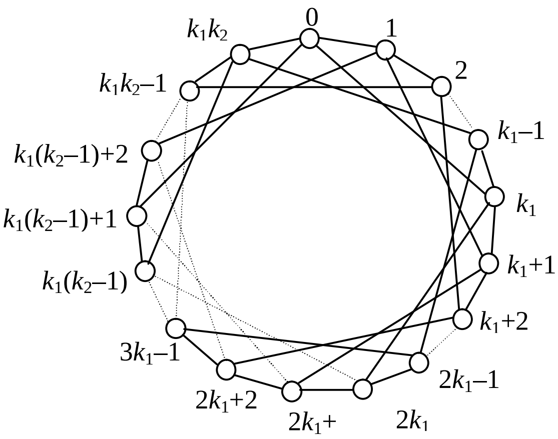

Рисунок 2 – Граф $R^*_{k_1,k_2}$

Сведём характеристики графа $R^*_{k_1,k_2}$ в таблицу 1.

Таблица 1 – Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2}$

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	k_1k_2	1
Рёбра	$(k_1-1)k_2$	k_2+1
Хорды	$(k_2-1)k_1$	k_1+1
Связи (общ.)	$2k_1k_2-k_1-k_2$	k_1+k_2+2

Из таблицы 1 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности графа $R^*_{k_1,k_2}$ равны соответственно:

$$\nu_в(R_{k_1,k_2}) = 1 + (k_1k_2)^{-1},$$

$$\nu_p(R_{k_1,k_2}) = 1 + \frac{k_1+k_2-2}{2k_1k_2-k_1-k_2}.$$

2. $n = 3$. Решётка R_{k_1,k_2,k_3} изображена на рис. 3. Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2,k_3}$ сведены в таблицу 2.

Таблица 2 – Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2,k_3}$.

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	$k_1k_2k_3$	1
Рёбра	$(k_1-1)k_2k_3$	k_2k_3+1
Хорды	$2k_1k_2k_3-k_1(k_2+k_3)$	$k_1(k_2+k_3)+2$
Связи (общ.)	$3k_1k_2k_3-k_1k_2-k_1k_3-k_2k_3$	$k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3$

Из таблицы 2 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности равны соответственно:

$$\nu_в(R_{k_1,k_2}) = 1 + (k_1k_2)^{-1},$$

$$\nu_p(R_{k_1,k_2}) = 1 + \frac{3k_1k_2k_3+k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3+1}{3k_1k_2k_3-k_1k_2-k_1k_3-k_2k_3}.$$

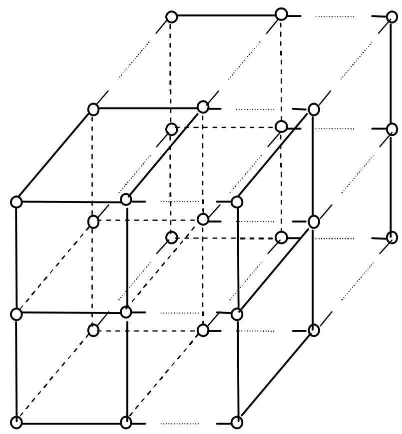

Рисунок 3 – Решётка R_{k_1,k_2,k_3}

2. Диагональные прямоугольные *n*-мерные решетки.

Диагональной прямоугольной n-мерной решёткой назовём такой граф $D_{k_1,\ldots,k_n} = (V', E')$, что $V' = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} Z_{k_i}$ и

$$E' = E \cup D^{(1)} \cup D^{(2)},$$

где

$$D^{(1)} = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n-1\\ j=i+1,\ldots,n}} D^{(1)}_{ij},\quad D^{(2)} = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n-1\\ j=i+1,\ldots,n}} D^{(2)}_{ij},$$

а

$$D^{(1)}_{ij} = \{(v_1,\ldots,v_n),(v_1,\ldots,v_i+1,\ldots,v_j+1,\ldots,v_n)\},\quad D^{(2)}_{ij} = \{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j+1,\ldots,v_n),(v_1,\ldots,v_i+1,\ldots,v_j,\ldots,v_n)\}.$$

Пусть $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \in D^{(1)}_{ij}$ где $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_i,\ldots, v_j,\ldots,v_n) \in V$ и $\mathbf{v}' = (v_1,\ldots,v_i+1,\ldots, v_j+1,\ldots,v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(\mathbf{v}) = v_1 + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{i-1}\, v_i + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{j-1}\cdot v_j + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n, \tag{8}$$

$$q(\mathbf{v}') = v_1 + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{i-1}\,(v_i+1) + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{j-1}\cdot(v_j+1) + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что

$$|\,q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{v}')\,| = (k_1\cdot\ldots\cdot k_{i-1})(1 + k_i\cdot\ldots\cdot k_{j-1})\ \ (i,j = 2,\ldots, n).$$

Число таких диагоналей равно

$$S_{D^{(1)}_{ij}} = \prod_{h=1}^{n} k_h \cdot \sum_{i<j}((1-k_j^{-1})(1-k_i^{-1})).$$

Пусть $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \in D^{(2)}_{ij}$ где $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_i,\ldots, v_j+1,\ldots,v_n) \in V$ и $\mathbf{v}' = (v_1,\ldots,v_i+1,\ldots, v_j,\ldots,v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(\mathbf{v}) = v_1 + k_1\cdot\ldots\cdot k_{i-1}\, v_i + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{j-1}\cdot(v_j+1) + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n, \tag{10}$$

$$q(\mathbf{v}') = v_1 + k_1\cdot\ldots\cdot k_{i-1}\,(v_i+1) + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{j-1}\cdot v_j + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n. \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает, что

$$|\,q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{v}')| = (k_1\cdot\ldots\cdot k_{i-1})(1 - k_i\cdot\ldots\cdot k_{j-1})\ \ (i,j = 2,\ldots, n).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$S_{D_{ij}^{(1)}} = S_{D_{ij}^{(2)}} = \prod_{h=1}^{n} k_h \cdot \sum_{i<j}(1-k_j^{-1})(1-k_i^{-1}),$$

где

$$S_{D_{ij}^{(n)}} = \left|D_{ij}^{(n)}\right| \ (n = 1,2).$$

После трансляции дуг по циклической группе автоморфизмов C_n получим 1-отказоустойчивый граф $D^*_{k_1,\ldots,k_n}$. Характеристики избыточности при переходе от решетки $D_{k_1,\ldots,k_n}$ к графу $D^*_{k_1,\ldots,k_n}$ равны:

$$E^{раб}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = (k_1-1)k_2\ldots k_n,$$

$$E^{изб}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = k_2\ldots k_n + 1,$$

$$S^{раб}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = (n-1-\sum_{i=2}^{n}k_i^{-1} + 2\sum_{i<j}(1-k_j^{-1})(1-k_i^{-1}))\prod_{i=1}^{n}k_i,$$

$$S^{изб}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = (n+\sum_{i=2}^{n}k_i^{-1} - 2\sum_{i<j}(1-k_j^{-1})(1-k_i^{-1}))\prod_{h=1}^{n}k_h + 2n - 1.$$

Рассмотрим специальные случаи диагональной прямоугольной n-мерной решётки $D_{k_1,\ldots,k_n}$, когда $n \in \{2,3\}$.

1. $n = 2$. Решётка D_{k_1,k_2} изображена на рис. 4, а граф $D^*_{k_1,k_2}$ – на рис. 5.

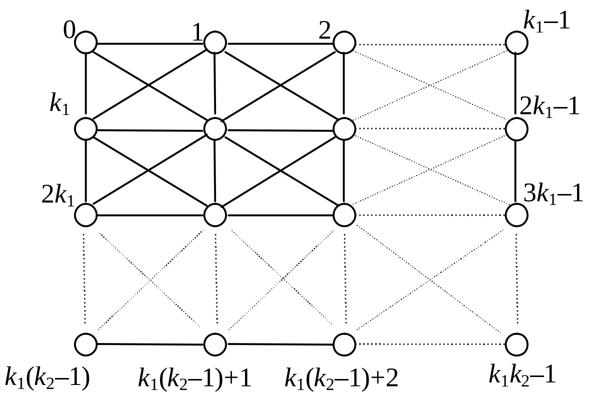

Рисунок 4– Решётка D_{k_1,k_2}

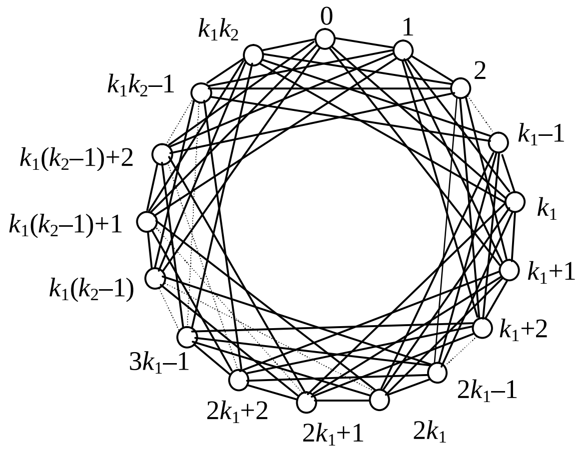

Рисунок 5 Граф $D^*_{k_1,k_2}$

Характеристики графа $D^*_{k_1,k_2}$ сведём в таблицу 3.

Таблица 3 – Характеристики графа $D^*_{k_1,k_2}$

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	k_1k_2	1
Рёбра	$(k_1-1)k_2$	$k_2 + 1$
Хорды	$3k_1k_2 - 3k_1 - 2k_2 + 2$	$3k_1 + 2k_2 + 1$
Связи (общ.)	$4k_1k_2 - 3(k_1 + k_2) + 2$	$3k_1 + 3k_2 + 2$

Из таблицы 3 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности графа $D^*_{k_1,k_2}$ равны соответственно:

$$\nu_в(D^*_{k_1,k_2}) = 1 + (k_1k_2)^{-1},$$

$$\nu_р(D^*_{k_1,k_2}) = 1 + \frac{3k_1+3k_2+2}{4k_1k_2-3k_1-3k_2+2}.$$

2. n= 3. Характеристики графа $D^*_{k_1,k_2,k_3}$ сведены в таблицу 4.

Таблица 4 – Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2,k_3}$

Элементы решёт-ки	Рабочие	Избыточные
Вершины	$k_1k_2k_3$	1
Рёбра	$(k_1-1)k_2k_3$	$k_2k_3 + 1$
Хорды	$8k_1k_2k_3 - 5k_1k_3 - 5k_1k_2 - 4k_2k_3 + 2(k_1 + k_2 + k_3)$	$5k_1(k_2 + k_3) + 4k_2k_3 - 2(k_1 + k_2 + k_3) - k_1k_2k_3 + 7$
Связи (общ.)	$9k_1k_2k_3 - 5k_1k_3 - 5k_1k_2 - 5k_2k_3 + 2(k_1 + k_2 + k_3)$	$5k_1(k_2 + k_3) + 5k_2k_3 - 2(k_1 + k_2 + k_3) - k_1k_2k_3 + 8$

Из таблицы вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности равны соответственно:

$$\nu_в(D^*_{k_1,k_2,k_3}) = 1 + (k_1 k_2)^{-1},$$

$$\nu_p(D^*_{k_1,k_2,k_3}) = 1 + \frac{5(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) - 2(k_1 + k_2 + k_3) - k_1k_2k_3 + 8}{9k_1k_2k_3 - 5(k_1k_3 - k_1k_2 - k_2k_3) + 2(k_1 + k_2 + k_3)}.$$

Заключение

В работе исследованы характеристики избыточности при преобразовании простых прямоугольных n-мерных решёток и диагональных прямоугольных n-мерных решёток в 1-отказоустойчивые минимальные графы. Полученные оценки являются верхними границами избыточности при преобразовании в 1-отказоустойчивый граф любого графа, вложимого в рассмотренные решётки. Одно из направлений дальнейших исследований состоит в оценке избыточности при преобразовании более сложных регулярных классических структур в 1-отказоустойчивые графы. Второе направление исследований состоит в исследовании характеристик избыточности при преобразовании регулярных структур в m-отказоустойчивые графы, где $m \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каравай М.Ф.* Общий подход к построению отказоустойчивых цифровых систем // Вестник Томского университета. – 2004. – № 9. – С. 123-134.
2. *Каравай М.Ф.* Инвариантно-групповой подход к исследованию k-отказоустойчивых структур // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 1. – С. 144-156.
3. *Каравай М.Ф.* Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 6. – С. 159-173.
4. *Bollobas B.* Modern graph theory. – Springer –Verlag New York, Inc., 1998. – 394p