Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — № 1 (18). — С. 175–181

УДК 621.313

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА В РОТОРЕ ШАРОВОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Ю. И. Лютахин, В. С. Осипов

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: es@samgtu.ru

Разработана математическая модель тепловых процессов, протекающих в роторе шарового асинхронного двигателя под воздействием внутренних источников тепла. Предложена аналитическая модель процесса, позволяющая решать задачи определения предельных тепловых режимов двигателя и хорошо приспособленная для поисковых процедур задач оптимизации конструкции.

Ключевые слова: *вихревые токи, векторный магнитный потенциал, тепловой потенциал.*

Мощность и развиваемый момент высокочастотных шаровых асинхронных электродвигателей (ШАД) с разомкнутым магнитопроводом статора и полым шаровым ферромагнитным ротором ограничиваются прежде всего допустимой величиной нагрева их активных частей. Температурный режим ротора, в свою очередь, ограничивается допустимым значением его температурной деформации.

Основным источником тепловыделения в сплошном материале шарового ротора являются вихревые токи, вектор плотности которых определяется законом Ома

$$\vec{J}_p = \sigma_p \vec{E}_p,$$

где $\vec{E}_p$ — вектор напряженности электрической составляющей электромагнитного поля в p-среде материала ротора; σ_p — удельная электропроводность материала ротора. Вектор электрической напряженности определяется зависимостью [1]

$$\vec{E}_p = -j\omega \vec{A}_p,$$

где ω — угловая частота поля; $\vec{A}_p$ — вектор потенциала магнитного поля.

Для упрощения задачи рассмотрим поле, создаваемое элементом магнитной системы — круговым бесконечно тонким витком с гармоническим током и шаровым ферромагнитным ротором. Для перехода к реальной электромагнитной системе ШАД необходимо дополнительно воспользоваться методом суперпозиции полей, создаваемых системой витков, а также алгоритмом математического конструирования магнитного поля ШАД.

В рамках принятой к исследованию элементарной электромагнитной системы

$$\vec{A}_p = \vec{l}_\varphi A_{p\varphi}, \quad A_{p\varphi} = \mathrm{Re}\, A_{p\varphi} + j \mathrm{Im}\, A_{p\varphi},$$

Лютахин Юрий Иванович — докторант кафедры электрических станций; к.т.н., доцент.
Осипов Вячеслав Семенович — доцент кафедры электроснабжения; к.т.н., доцент.

где $\operatorname{Re} A_{p\varphi} = |A_{p\varphi}|\cos(\omega t + \psi)$, $\operatorname{Im} A_{p\varphi} = |A_{p\varphi}|\sin(\omega t + \psi)$, соответственно, действительная и мнимая части функции комплексного переменного.

Интенсивность источников тепловыделения, т. е. плотность потерь мощности, возникающих при протекании вихревых токов в роторе, определяется зависимостью

$$q = \frac{1}{2}\sigma_p \omega^2 (\operatorname{Re} \vec{A}_p)^2. \tag{1}$$

Известно [2, 3], что задача стационарной теплопроводности сводится к решению дифференциального уравнения Пуассона:

$$\Delta T = -q\lambda_p^{-1}, \tag{2}$$

где T — температурное поле; λ_p — коэффициент теплопроводности материала ротора; Δ — оператор Лапласа.

Лапласиан скалярной функции в сферической системе координат при наличии вращательной симметрии имеет вид

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin\nu}\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\sin\nu\frac{\partial T}{\partial \nu}\Big). \tag{3}$$

Общим решением неоднородного дифференциального уравнения (2) является сумма общего решения однородного уравнения Лапласа

$$\Delta T = 0 \tag{4}$$

и частного решения исходного неоднородного уравнения [4]. В данном случае удобно решать однородное уравнение (4) методом разделения переменных Фурье [4]:

$$T = R(r)\cdot\Theta(\nu), \tag{5}$$

преобразующим уравнение (4) в частных производных в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{p^2}{r^2}R = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\nu^2} + \operatorname{ctg}\nu\frac{d\Theta}{d\nu} + p^2\Theta = 0, \tag{7}$$

которые имеют частные решения [5]:

$$R(r) = \sqrt{r}\left(l\cdot r^{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}} + d\cdot r^{-\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}}\right), \tag{8}$$

$$\Theta(\nu) = cP_n(\cos\nu) + bQ_n(\cos\nu), \tag{9}$$

где $P_n(\cos\nu)$ и $Q_n(\cos\nu)$ — полиномы Лежандра первого и второго рода; l, d, c, b — произвольные действительные постоянные. Решение (9) требует выполнения зависимости $p^2 = n(n+1)$, где $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$.

Так как температурное поле во всем пространстве электромагнитной системы должно быть конечным, то необходимо потребовать выполнение равенства $b = 0$.

Таким образом, общее решение однородного уравнения (4) имеет вид

$$T'' = \sum_{n=0}^{\infty}(l_n r^n + d_n r^{-n-1})P_n(\cos\nu), \tag{10}$$

где l_n и d_n — коэффициенты ряда, значения которых находятся в результате решения краевой задачи.

В качестве частного решения уравнения (2) принимается выражение для скалярного теплового потенциала в виде [2]:

$$T' = \frac{1}{\lambda_p}\int_{\nu'=0}^{\nu'=\pi}\int_{r'=r_{p-1;p}}^{r'=r_{p;p+1}} q(r';\nu')r'^2\sin\nu dr'd\nu' \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi}\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}d\varphi', \tag{11}$$

где $|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1} = \left(r^2+r'^2-2r'r\cos\nu'\cos\nu-2r'r\sin\nu'\sin\nu\cos(\varphi-\varphi')\right)^{-\frac{1}{2}}$ — функция трёх пространственных координат r, ν, φ исследуемых точек пространства и координат r', ν', φ' точек области пространства, в которой задано поле источников тепла. Эта функция теряет регулярность в точках $r = r'$, $\nu = \nu'$, $\varphi = \varphi'$. Для интегрирования этой функции целесообразно воспользоваться её преобразованием, полученным в работе [1] с помощью разложения её в биноминальный степенной ряд. Преобразованная функция имеет вид

$$\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1} = \left(r^2+r'^2-2r'r\cos\nu'\cos\nu\right)^{-\frac{1}{2}}\times \\ \times\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!}x^n\right), \tag{12}$$

где

$$x = \left(r^2+r'^2-2r'r\cos\nu'\cos\nu\right)^{-1}\left(2r'r\sin\nu'\sin\nu\cos(\varphi-\varphi')\right);$$

неравенство $|x| < 1$ является условием абсолютной и равномерной сходимости ряда (12).

В результате интегрирования функции (12) получаем выражение

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)!}{2^{6n}(n+1)(2n)!(n!)^2}\left(x\cos^{-1}(\varphi-\varphi')\right)^{2n}. \tag{13}$$

Дальнейшее интегрирование выражения (11) выполняется численными методами.

Таким образом, температурное поле в материале ротора, занимающего область пространства $\left\{r\in[r_{p-1;p};\, r_{p;p+1}];\ \nu\in[0;2\pi];\ \varphi\in[0;2\pi]\right\}$, является функцией

$$T = T' + T'', \tag{14}$$

определяемой формулами (1), (10)–(13), а также формулами, полученными в работе [1] для вектор-потенциала электромагнитного поля в материале ротора:

$$\operatorname{Re}A'_p = \frac{I_c\rho_c x_c\operatorname{Re}\mu_p}{8\sqrt{r'^2+\rho_c^2+z_c^2-2r'z_c\cos\nu}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)!x_c^{2n}}{2^{6n}(n+1)(2n)!(n!)^2}, \tag{15}$$

$$\operatorname{Re}A''_p = \frac{1}{\sqrt{r'}}\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{pn}I_{n+\frac{1}{2}}(k_pr') + F_{pn}Y_{n+\frac{1}{2}}(k_pr')\right]P'_n(\cos\nu)\right\}, \tag{16}$$

$$\operatorname{Re} A_p = \operatorname{Re} A'_p + \operatorname{Re} A''_p, \tag{17}$$

где $\{\rho = \rho_c;\ z = z_c;\ \varphi \in [0; 2\pi]\}$ — контур витка со сторонним током I_c, возбуждающим электромагнитное поле, заданный в цилиндрической системе координат (ρ, z, φ);

$$x_c = \frac{2\rho_c r' \sin\nu'}{r'^2 + \rho_c^2 + z_c^2 - 2r' z_c \cos\nu'}; \tag{18}$$

$I_{n+\frac{1}{2}}(k_p r')$, $Y_{n+\frac{1}{2}}(k_p r')$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода полуцелого индекса $n + \frac{1}{2} \in [1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ \ldots]$ и комплексного аргумента $k_p r'$; $k_p = \sqrt{\varepsilon_{ep}\mu_p\omega}$ — комплексный волновой параметр; $\varepsilon_{ep} = \varepsilon_p - j\sigma_p\omega^{-1}$; μ_p — комплексные, соответственно, эквивалентная диэлектрическая и магнитные проницаемости материала ротора, т. е. среды p; $P'_n(\cos\nu)$ — присоединённые функции Лежандра первого рода; c_{pn}, F_{pn} — комплексные коэффициенты ряда (16), определяемые из краевых условий преломления электромагнитного поля на сферических поверхностях, разделяющих среды электромагнитной системы ШАД [1].

Для окончательного исследования стационарной теплопроводности ШАД необходимо сформулировать и решить краевую задачу, что позволит найти неизвестные коэффициенты l_n и d_n ряда (10) и спроектировать оптимальную электромагнитную систему ШАД [7, 9, 10]. В дальнейшем предполагается такое конструктивное исполнение ротора, при котором не происходит теплообмен на внутренней его поверхности. На практике это означает использование внутри ротора совершенной теплоизоляции, например, экранно-вакуумной. Применение последней позволяет избежать аккумулирования тепла во внутреннем объёме ротора, а также разогрева объекта разворота. Этому обстоятельству соответствует краевое условие

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_{p-1;p}} = 0 \tag{19}$$

на внутренней сферической поверхности $\{r = r_{p-1;p};\ \nu \in [0; p];\ \varphi \in [0; 2\pi]\}$ ротора. Теплообмен между ротором и внешней средой, температура которой T_0, через внешнюю сферическую поверхность ротора задаётся приближённо в виде закона Ньютона [2, 3]:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_{p;p+1}} = -\alpha\lambda_p^{-1}\big((T_{r=r_p;p+1}) - T_0\big), \tag{20}$$

где α — коэффициент теплоотдачи, [Вт/(м^{2}К)]. Дифференцированием по радиусу r функций (10), (11) устанавливаются необходимые частные производные:

$$\frac{\partial T\text{''}}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(l_n n r^{n-1} - d_n (n+1) r^{-n-2}\right) P_n(\cos\nu), \tag{21}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial r} = \frac{1}{4\lambda_p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)!}{2^{6n}(n+1)(2n)!(n!)^2}\times$$
$$\times\int_{\nu'=0}^{\nu'=\pi}\int_{r'=r_{p-1;p}}^{r'=r_{p;p+1}}\frac{\partial(x_0^{2n})}{\partial r}q(r';\nu')\,r'\sin\nu'\,dr'd\nu', \quad (22)$$

где

$$\frac{\partial(x_0^{2n})}{\partial r} = 2nx_0^{2n-1}\frac{2r'\sin\nu'\sin\nu(r'^2-r^2)}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\nu'\cos\nu)^2}. \quad (23)$$

Использование выражений (21)–(23) позволяет избежать численного дифференцирования, которое вносит погрешности; последние могут привести к неустойчивости всего алгоритма расчёта температурного поля.

После учета зависимостей (10), (21)–(23) краевое условие (20) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(l_n n r_{p-1;p}^{n} - d_n(n+1)r_{p-1;p}^{-n-1}\right)P_n(\cos\nu) = r_{p-1;p}\cdot\frac{\partial T'}{\partial r}\Big|_{r=r_{p-1;p}}. \quad (24)$$

Левую часть уравнения (24) можно рассматривать в качестве специального разложения в ряд по полиномам Лежандра функции, представленной правой частью этого же уравнения. Применение известной формулы [8] для определения коэффициентов такого разложения к конкретному случаю позволяет найти их в виде

$$c'_n = \frac{2n+1}{2}r_{p-1;p}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{\partial T'}{\partial r}\Big|_{r=r_{p-1;p}}P_n(\cos\nu)d(\cos\nu). \quad (25)$$

Значение интеграла в полученном выражении (25) находится численными методами. Таким образом, краевое условие (24) сводится к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$l_n n r_{p-1;p}^{n} - d_n r_{p-1;p}^{-n-1}(n+1) - c'_n = 0. \quad (26)$$

Вторая система алгебраических уравнений получается из краевого условия (20), которое формулами (20), (21)–(23) приводится к уравнению

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[l_n\left(nr_{p;p+1}^{n-1}+\frac{\alpha}{\lambda_p}r_{p;p+1}^{n}\right)+d_n\left(\frac{\alpha}{\lambda_p}r_{p;p+1}^{-n-1}-r_{p;p+1}^{-n-2}(n+1)\right)\right]P_n(\cos\nu) =$$
$$= \frac{\alpha}{\lambda_p}\left[T_0 - T'_{r=r_{p;p+1}}\right] - \frac{\partial T'}{\partial r}\Big|_{r=r_{p;p+1}}. \quad (27)$$

Решение данного уравнения аналогично решению уравнения (24), сводится к отысканию коэффициентов разложения в ряд по полиномам Лежандра:

$$c''_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\alpha}{\lambda_p}\left[T_0 - T'_{r=r_{p;p+1}}\right] - \frac{\partial T'}{\partial r}\Big|_{r=r_{p;p+1}}\right]P_n(\cos\nu)d(\cos\nu). \quad (28)$$

Таким образом, находится и вторая бесконечная система алгебраических уравнений:

$$l_n r_{p;p+1}^n \Big(\frac{n}{r_{p;p+1}} + \frac{\alpha}{\lambda_p} \Big) + d_n r_{p;p+1}^{-n-1} \Big(\frac{\alpha}{\lambda_p} - \frac{n+1}{r_{p;p+1}} \Big) - c_n'' = 0. \qquad (29)$$

Совместное решение двух бесконечных систем алгебраических уравнений (26) и (29) возможно, так как общая система является бесконечной совокупностью независимых друг от друга пар алгебраических уравнений, то есть каждому n-ному члену ряда (10) соответствует своя пара алгебраических уравнений вида (26) и (29), однозначно определяющая одну пару коэффициентов l_n и d_n этого члена ряда.

Выводы. Полученная математическая модель стационарной теплопроводности в роторе, выполненном в виде сферической оболочки, разогреваемой вихревыми токами при работе трехстепенного ШАД, позволяет рассчитать при конкретно заданных условиях температурное поле ротора в наиболее тяжелом случае (длительная работа двигателя в пусковом режиме), и, следовательно, определить необходимые условия охлаждения, или при заданных условиях охлаждения — длительно допустимые значения момента, развиваемого двигателем, при котором ротор имеет заданные температуру и температурные деформации. В свою очередь, решение этой задачи является исходной постановкой задачи термоупругости, то есть задачи определения деформации ротора, обусловленной его разогревом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дементьев В. М., Скороспешкин А. И.* Вращательно-симметричное электромагнитное поле в «сферическом» многосредном пространстве, возбужденное сторонним гармоническим током кругового витка / В сб.: *Машино-вентильные системы, коммутация коллекторных электрических машин*: Сб. научн. тр. — Куйбышев: КПтИ, 1981. — С. 20–29.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. — М.: ГИФМЛ, 1961. — Т. 2. — 628 с.
3. *Филиппов Н. Ф.* Теплообмен в электрических машинах. — Л.: Энергоатомиздат, 1986. — 256 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 831 с.
5. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров / пер. с франц. — М.: Наука, 1965. — 780 с.
6. *Шимони К.* Теоретическая электротехника / пер с немец. — М.: Мир, 1964. — 773 с.
7. *Лютахин Ю. И.* Оптимальное проектирование электромагнитной системы шарового электродвигателя / В сб.: *Электрические машины специального назначения*: Сб. научн. тр. — Куйбышев: КПтИ, 1985. — С. 6–12.
8. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики / пер. с немецк. — М.: Наука, 1968. — 620 с.
9. *Лютахин Ю. И., Дементьев В. М.* Математическая модель стационарной теплопроводности ШАД / В сб.: *Энергетика: состояние, проблемы перспективы*: Тр. Всерос. научно-техн. конф. — Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. — С. 186–191.
10. *Лютахин Ю. И.* Краевая задача стационарной теплопроводности ротора шарового асинхронного электродвигателя / В сб.: *Матем. моделирование и краев. задачи*: Тр. Пятой Всероссийск. научн. конф. (26–28 мая 2004 г.). Часть 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами. — Самара: СамГТУ, 2008. — С. 75–79.

Поступила в редакцию 06/X/2008;
в окончательном варианте — 16/II/2009.

MSC: 93A30

MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL PROCESS IN THE ROTOR OF SPHERICAL ASYNCHRONOUS ENGINE

Yu. I. Lutakhin, V. S. Osipov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: es@samgtu.ru

Mathematical model of the thermal processes existing in a rotor of the spherical asynchronous engine under the influence of internal sources of heat was developed. Analytical model of the process is introduced, allowing solving problems of definition of limiting thermal modes of the engine and well adapted for searching procedures of design optimization problems.

Key words: *whirling currents, magnetic vector potential, calorific potential.*

Original article submitted 06/X/2008;
revision submitted 16/II/2009.

Lutakhin Yuriy Ivanovich, Ph. D. (Techn.), Ass. Prof., Dept. of Electric Power Plants.
Osipov Vyacheslav Semenovich, Ph. D. (Techn.), Ass. Prof., Dept. of Electric Power Supply.