НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ СО СКОЛЬЗЯЩИМ РЕЖИМОМ

Перевод с английского: Трандафилов В.Н.

Источник: Материал свободной энциклопедии Википедии.

http://en.wikipedia.org/wiki/Sliding_mode_control#Sliding_mode_observer

В наблюдателях состояния могут применяться скользящие режимы. Такие наблюдатели являются нелинейными и имеют высокий коэффициент усиления. Они способны доводить динамическую ошибку оценивания координаты к нулю за конечное время. Кроме того, наблюдатели, работающие в режиме ключа, устойчивы к шумам в измерениях подобно фильтру Калмана [1, 2]. В простейшем случае, данный пример рассматривает скользящий режим для традиционного наблюдателя Люенбергера в системе LTI. В наблюдателях со скользящим режимом порядок наблюдателя снижается на единицу, когда система переходит в скользящий режим. Данная особенность заключается в следующем, когда ошибка оценивания одного состояния доходит до нуля за конечное время, то только после этого другие ошибки восстановления экспоненциально стремятся к нулю. Впервые описанный Дракуновым [3] наблюдатель со скользящим режимом для нелинейных систем был построен таким образом, что доводил координаты ошибки оценивания к нулю за конечное (и сколь угодно малое) время.

Рассмотрим LTI систему:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & \end{bmatrix}\mathbf{x} = x_1\end{aligned}$$

где $\mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния;

$\mathbf{u} \triangleq (u_1, u_2, \ldots, u_r) \in \mathbb{R}^r$ – вектор входных воздействий;

y – выходной сигнал, скалярная величина, равная первому состоянию вектора состояния $\mathbf{x}$.

Допустим, что:

$$A \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

где $\boldsymbol{a_{11}}$ – скаляр, показывающий влияние первого состояния $\boldsymbol{x_1}$ на себя;

$A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ – вектор-столбец, показывающий влияние других состояний на первое состояние;

$A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ – матрица, показывающая влияние других состояний на самих себя;

$A_{12} \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$ – вектор-строка, соответствующий влиянию первого состояния на остальные состояния.

Наблюдатель с высоким коэффициентом усиления, который оценивает вектор состояния $\mathbf{x}$, использует только информацию о измеренном выходе $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x_1}$. Предполагаем, что $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ будет оценивать $\boldsymbol{n}$ состояний. Уравнение наблюдателя получает вид:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + Lv(\hat{x}_1 - x_1)$$

где $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – нелинейная функция ошибки между состоянием $\hat{x}_1$ и выходом $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x_1}$;

$L \in \mathbb{R}^n$ – вектор коэффициентов наблюдателя, который подобен вектору коэффициентов типичного наблюдателя Люенбергера.

Вектор коэффициентов наблюдателя имеет вид:

$$L = \begin{bmatrix} -1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

где $L_2 \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ – вектор-столбец.

Дополнительно примем вектор ошибок оценивания состояний:

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$$

где $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$.

Динамическая ошибка оценивания имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} \\ &= A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + Lv(\hat{x}_1 - x_1) - A\mathbf{x} - B\mathbf{u} \\ &= A(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + Lv(\hat{x}_1 - x_1) \\ &= A\mathbf{e} + Lv(e_1) \end{aligned}$$

где $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ – ошибка оценивания первого состояния.

Нелинейный закон управления $\boldsymbol{v}$ может быть выбран таким образом, чтобы обеспечить скольжение в трубке:

$$0 = \hat{x}_1 - x_1$$

Таким образом, оцененное значение $\hat{x}_1$ будет следовать за реальным состоянием $\boldsymbol{x_1}$ после некоторого конечного времени (т.е. $\hat{x}_1 = x_1$). Отсюда функция переключения для режима скольжения будет равна:

$$\sigma(\hat{x}_1, \hat{x}) \triangleq e_1 = \hat{x}_1 - x_1.$$

Для достижения скольжения в трубке, $\dot{\sigma}$ и σ должны всегда иметь противоположные знаки (т.е., $\sigma\dot{\sigma} < 0$ для всех $\mathbf{x}$). Однако:

$$\dot{\sigma} = \dot{e}_1 = a_{11}e_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 - v(e_1) = a_{11}e_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 - v(\sigma)$$

где $\mathbf{e}_2 \triangleq (e_2, e_3, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ – вектор ошибок оценивания неизмеряемых состояний.

Для обеспечения условия $\sigma\dot{\sigma} < 0$, допускаем, что:

$$v(\sigma) = M\mathrm{sign}(\sigma)$$

где $M > \max\{|a_{11}e_1 + A_{12}\mathbf{e}_2|\}$.

Т.е., положительная константа $\boldsymbol{M}$ должна быть больше чем масштабируемый вариант максимально возможных для системы ошибок оценивания (т.е., внутренняя ошибка выбирается ограниченной для того чтобы $\boldsymbol{M}$ была более чем достаточной). Если $\boldsymbol{M}$ достаточно велико, это дает возможность предположить, что система достигает $\boldsymbol{e_1 = 0}$ (т.е., $\hat{x}_1 = x_1$). Отсюда, прерывный регулятор $\boldsymbol{v(\sigma)}$ может быть заменен непрерывным регулятором $\boldsymbol{v_{eq}}$:

$$0 = \dot{\sigma} = a_{11}\overbrace{e_1}^{=0} + A_{12}\mathbf{e}_2 - \overbrace{v_{\text{eq}}}^{v(\sigma)} = A_{12}\mathbf{e}_2 - v_{\text{eq}}.$$

Тогда:

$$\overbrace{v_{\text{eq}}}^{\text{scalar}} = \overbrace{A_{12}}^{1\times(n-1)\text{ vector}} \overbrace{\mathbf{e}_2}^{(n-1)\times 1\text{ vector}}.$$

Эквивалентный регулятор $\boldsymbol{v_{eq}}$ представляет собой влияние других $(\boldsymbol{n-1})$ состояний на траекторию выходного состояния $\boldsymbol{x_1}$. В частности, матрица-строка $\boldsymbol{A_{12}}$ выступает в качестве вектора выходных значений для ошибки подсистемы:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\dot{e}_2\\ \dot{e}_3\\ \vdots\\ \dot{e}_n\end{bmatrix}}^{\dot{\mathbf{e}}_2} = A_2 \overbrace{\begin{bmatrix}e_2\\ e_3\\ \vdots\\ e_n\end{bmatrix}}^{\mathbf{e}_2} + L_2 v(e_1) = A_2\mathbf{e}_2 + L_2 v_{\text{eq}} = A_2\mathbf{e}_2 + L_2 A_{12}\mathbf{e}_2 = (A_2 + L_2 A_{12})\mathbf{e}_2.$$

Итак, чтобы гарантировать ошибку оценивания $\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ для неизмеряемого состояния $\boldsymbol{x}_2$, вектор $\boldsymbol{L}_2$ размерностью $(n-1)\times 1$ должен быть выбран таким чтобы матрица $(\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{L}_2\boldsymbol{A}_{12})$ размерностью $(n-1)\times(n-1)$ была матрицей Гурвица (т.е., действительные части всех собственных чисел должны быть отрицательными). Эквивалентный регулятор $\boldsymbol{v}_{\mathbf{eq}}$ оценивает неизмеряемые состояния, при этом, оценки асимптотически стремятся к истинным значениям. В то же время, прерывный регулятор $v = M\mathrm{sign}(\hat{x}_1 - x)$ позволяет оценивать состояние, чтобы оценка имела нулевую ошибку за конечное время. Кроме того, белый шум с нулевым средним значением в канале измеренного сигнала (например, гауссов шум) влияет только на частоту коммутации регулятора $\boldsymbol{v}$, и следовательно шум будет оказывать незначительный эффект на эквивалентный регулятор скользящего режима $\boldsymbol{v}_{\mathbf{eq}}$. Отсюда следует, что наблюдатель со скользящим режимом имеет свойства фильтра Калмана [2].

Конечный вариант наблюдателя следующий:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + LM\mathrm{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \\
&= A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + \begin{bmatrix} -1 \\ L_2 \end{bmatrix} M\mathrm{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \\
&= A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + \begin{bmatrix} -M \\ L_2 M \end{bmatrix} \mathrm{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \\
&= A\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} B & \begin{bmatrix} -M \\ L_2 M \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathrm{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \end{bmatrix} \\
&= A_{\mathrm{obs}}\hat{\mathbf{x}} + B_{\mathrm{obs}}\mathbf{u}_{\mathrm{obs}}
\end{aligned}$$

где:

$$A_{\mathrm{obs}} \triangleq A,$$

$$B_{\mathrm{obs}} \triangleq \begin{bmatrix} B & \begin{bmatrix} -M \\ L_2 M \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

тогда:

$$u_{\mathrm{obs}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathrm{sign}(\hat{x}_1 - x_1) \end{bmatrix}.$$

То есть, при увеличении вектора управления $\mathbf{u}$ на функцию переключения $\mathrm{sign}(\hat{x}_1 - x_1)$, наблюдатель со скользящим режимом может быть реализован как LTI система. То есть, прерывный сигнал $\operatorname{sign}(\hat{x}_1 - x_1)$ аналогичен сигналу управления в LTI системе с двумя входами.

Для простоты, данный пример предполагает, что наблюдатель со скользящим режимом имеет доступ к одному измеренному состоянию (т.е., выход $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1$). Однако, подобная процедура создания наблюдателя со скользящим режимом аналогична для векторной формы (т.е., когда выход $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$ использует общую матрицу $\boldsymbol{C}$). В каждом случае, скользящий режим перейдет в трубку когда оцененный выход $\hat{\mathbf{y}}$ следует за измеренным выходом $\mathbf{y}$ с нулевой ошибкой (т.е., режим скольжения в трубке достигается при $\sigma(\mathbf{x}) \triangleq \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$).

Перечень ссылок:

1. Utkin Vadim, Guldner Jürgen, Shi Jingxin (1999). Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. Philadelphia, PA: Taylor & Francis, Inc. ISBN 0-7484-0116-4.

2. Drakunov S.V. (1983). "An adaptive quasioptimal filter with discontinuous parameters". Automation and Remote Control 44 (9): 1167–1175.

3. Drakunov S.V. (1992). Sliding-Mode Observers Based on Equivalent Control Method. 2368–2370. ISBN 0-7803-0872-7.