Динамические системы, вып. 25 (2008), 17–22

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.925

Устойчивость по Ляпунову и ограниченность решений обратимых дифференциальных уравнений второго порядка

Ю. Н. Бибиков

Санкт-Петербургский госуниверситет,
Санкт-Петербург 199034. *E-mail: Bibicoff@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка, представляющее собой малое обратимое периодическое по времени возмущение нелинейного осциллятора с нечетной степенной восстанавливающей силой. Доказана устойчивость по Ляпунову нулевого решения и указан вид возмущения, при котором решения уравнения ограничены. Для доказательства используются методы КАМ-теории.

Ключевые слова: обратимое возмущение, КАМ-теория, инвариантная поверхность.

1. Постановка задачи

В книге [4] Дж. Литлвуд выдвинул гипотезу об ограниченности решений дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + g(x) = p(t), \quad p(t+2\pi) = p(t),$$

где $\dfrac{g(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

В работах [1, 5] было отмечено, что гипотеза Литлвуда относится к КАМ-теории, поскольку рассматриваемое дифференциальное уравнение консервативно, а ограниченность решений можно трактовать как неасимптотическую устойчивость по Ляпунову бесконечно удаленной точки.

Как хорошо известно, методы КАМ-теории применимы не только к консервативным, но и к обратимым по времени системам, в частности, к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}, t) = 0, \quad g(x, -y, -t) = g(x, y, t).$$

В настоящей работе рассматриваются дифференциальные уравнения, которые являются малыми обратимыми возмущениями осциллятора $\ddot{x} + x^{2n+1} = 0$, где n —

натуральное число. Работа состоит из двух взаимосвязанных частей. В первой доказывается неасимптотическая устойчивость по Ляпунову нулевого решения, во второй — ограниченность решений. Устойчивость нулевого решения была анонсирована в работе [1] и при $n = 1$ доказана в книге [2]. Здесь мы доказываем этот результат для произвольного n. Исследования в обоих случаях проводятся на основании единого подхода, разработанного в [2].

2. Предварительное преобразование

Рассмотрим обратимое дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{2n+1} = X(x, \dot{x}, t), \tag{1}$$

где X — 2π-периодическая функция времени t, удовлетворяющая условиям обратимости

$$X(x, -y, -t) = X(x, y, t). \tag{2}$$

В дальнейшем на функцию X будут накладываться ограничения, означающие, что уравнение (1) является малым возмущением уравнения $\ddot{x} + x^{2n+1} = 0$.

В уравнении (1) выполним переход к ляпуновским "полярным" координатам [3] по формулам

$$x = rCs\varphi, \quad \dot{x} = -r^{n+1}Sn\varphi, \tag{3}$$

где функции $Cs\varphi$, $Sn\varphi$ удовлетворяют условиям

$$Cs'\varphi = -Sn\varphi, \quad Sn'\varphi = [Cs\varphi]^{2n+1},$$
$$Cs0 = 1, \quad Sn0 = 0.$$

Функции $Cs\varphi$, $Sn\varphi$ являются периодическими с некоторым периодом T, аналитическими в полосе $|\mathrm{Im}\varphi| < p_0$ функциями, четной и нечетной соответственно. При этом выполняется интегральное тождество

$$(n+1)[Sn\varphi]^2 + [Cs\varphi]^{2n+2} = 1. \tag{4}$$

Выполняя в (1) замену (3) и учитывая соотношение (4), получим систему

$$\dot{r} = R(r, \varphi, t), \quad \dot{\varphi} = r^n + \Phi(r, \varphi, t), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} R &= -r^{-n}X(rCs\varphi, -r^{n+1}Sn\varphi, t)Sn\varphi, \\ \Phi &= -r^{-n-1}X(rCs\varphi, -r^{n+1}Sn\varphi, t)Cs\varphi, \end{aligned} \tag{6}$$

причем в силу (2) выполняются условия обратимости

$$R(r, -\varphi, -t) = -R(r, \varphi, t), \quad \Phi(r, -\varphi, -t) = \Phi(r, \varphi, t). \tag{7}$$

3. Результат КАМ-теории

Ниже, следуя [2], мы формулируем положения КАМ-теории, которые будут использоваться в дальнейшем.

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\dot{r} = R(r, \varphi, t, a), \quad \dot{\varphi} = a + \Phi(r, \varphi, t, a), \tag{8}$$

где параметр a изменяется в комплексной окрестности множества

$$A_{\gamma,\tau} = \{\alpha \colon |k + l\alpha| > \gamma l^{-\tau}\},$$

где $k, l \geq 1$ — целые числа, не равные нулю одновременно. Функции R, Φ — 2π-периодические по φ, t, вещественно аналитические при

$$|\mathrm{Im}\varphi| < p_0, \quad |\mathrm{Im}t| < p_0, \quad |r| < \delta_0, \quad a \in A_{\gamma,\tau} + \frac{1}{2}\gamma\delta_0$$

и удовлетворяют неравенствам

$$|R| < p_0^{\tau+1}\gamma\delta_0^2, \quad |\Phi| < p_0^{\tau+1}\gamma\delta_0. \tag{9}$$

Если система (8) обратима, а δ_0 достаточно мало, то существует функция $a_0(\alpha)$, $\alpha \in A_{\gamma,\tau}$, и замена

$$r = \rho + \nu(\rho, \psi, t, \alpha), \quad \varphi = \psi + u(\psi, t, \alpha), \tag{10}$$

переводящая систему (8) при $a = a_0(\alpha)$ в систему

$$\dot{\rho} = P(\rho, \psi, t, \alpha), \quad \dot{\psi} = \alpha + \Psi(\rho, \psi, t, \alpha), \tag{11}$$

где функции P, Ψ, $\dfrac{\partial P}{\partial \rho}$ аннулируются при $\rho = 0$. Функция a_0 имеет вид

$$a_0(\alpha) = \alpha + \Gamma(\alpha), \tag{12}$$

где функция Γ допускает ту же оценку, что и Φ в (9).

При произвольной постоянной ψ_0 пара $\rho = 0$, $\psi = \alpha t + \psi_0$ образует решение системы (11). Поэтому система (8) имеет при $a = a_0(\alpha)$ семейство квазипериодических решений

$$r = \nu(0, \alpha t + \psi_0, t, \alpha), \quad \varphi = \alpha t + \psi_0 + u(\alpha t + \psi_0, t, \alpha), \tag{13}$$

Соответствующие интегральные кривые заполняют инвариантную периодическую по φ, t поверхность $r = F(\varphi, t, \alpha)$, где F получается из (10) при $\rho = 0$.

4. Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим обратимое дифференциальное уравнение (1), где функция $X(x, y, t)$ определена и вещественно аналитична в области

$$|x| < x^*, \quad |y| < x^*, \quad |\mathrm{Im} t| < p_0.$$

Предположим, что порядок малости по x, y не ниже $2n+2$, если переменной x приписать первый порядок, переменной y — порядок, равный $n+1$. При этом предположении система (5) имеет вид

$$\dot{r} = O(r^{n+2}), \quad \dot{\varphi} = r^n + O(r^{n+1}) \ \text{ при } r \to 0.$$

Положим

$$r = \varepsilon(c^{1/n} + \sqrt{\varepsilon} z) \tag{14}$$

где $|z| < 1$, $c \in [1/2, 3/2]$, ε — малый положительный параметр. В результате получим систему

$$\dot{z} = \varepsilon^{n+1/2} Z(z, \varphi, t, c, \sqrt{\varepsilon}), \quad \dot{\varphi} = \varepsilon^n c + \varepsilon^{n+1/2} \Phi_1(z, \varphi, t, c, \sqrt{\varepsilon}), \tag{15}$$

являющуюся при каждом $c \in [1/2, 3/2]$, $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ системой типа (8).

Лемма. *Пусть* $\mu > 0$. *Множество* A *чисел* $\alpha \in [\mu/2, 3\mu/2]$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|k + l\alpha| \geq K\mu l^{-2} \tag{16}$$

при целых ненулевых k, $l \geq 1$ *измеримо и* $\mathrm{mes} A \to \mu$ *при* $K \to 0$

Доказательство. Оценим меру множества чисел α, удовлетворяющих неравенству, противоположному (16). Для данных k, l мера этого множества не превышает $2\mu K l^{-3}$. Существует постоянная $d > 0$ такая, что число различных k, при которых неравенство (16) нарушается при каждом l, ограниченно сверху величиной dl.

Отсюда вытекает, что мера множества чисел, нарушающих (16), не превосходит величины

$$\mu \sum_{l=1}^{\infty} 2dKl^{-2} = \mu O(K) \ \text{ при } K \to 0.$$

Следовательно,

$$\mu > \mathrm{mes} A > \mu(1 - O(K)) \to \mu \ \text{ при } K \to 0.$$

□

Далее используем результаты третьего раздела при $\tau = 2$, $\gamma = \varepsilon^n K$. Нормализуем в системе (15) период по φ к 2π. Наряду с (15) рассмотрим систему

$$\dot{z} = \varepsilon^{n+1/2} Z(z, \varphi, t, a\varepsilon^{-n}, \sqrt{\varepsilon}), \quad \dot{\varphi} = a + \varepsilon^{n+1/2} \Phi_1(z, \varphi, t, a\varepsilon^{-n}, \sqrt{\varepsilon}), \tag{17}$$

полученную из (15) заменой $a = c\varepsilon^n$. Условие (9) выполняется, если

$$\sqrt{\varepsilon *} < KM^{-1}p_0^3\delta_0^2,$$

где $M = \sup\{|Z|, |\Phi_1|\}$. Поскольку система (17) обратима, она имеет инвариантную поверхность с решением (13) при $a = a_0(\alpha) = \alpha + \varepsilon^{n+1/2}\Delta(\alpha, \sqrt{\varepsilon})$, где в силу (12) Δ ограничена при $\varepsilon \to 0$. Параметр c связан с α формулой

$$c = \varepsilon^{-n}\alpha + \sqrt{\varepsilon}\Delta(\alpha, \sqrt{\varepsilon}.$$

Функцию Δ можно продолжить по α до гладкой на $\mathbb{R}$ функции. Согласно лемме $\mathrm{mes}A \to \varepsilon^n$ при $K \to 0$. Следовательно, мера множества, образованного точками c, соответствующими $\alpha \in A$, стремится к 1 при $K \to 0$. Каждому такому c соответствует инвариантная цилиндрическая поверхность с квазипериодическими решениями.

Теорема 1. *Нулевое решение обратимого уравнения (1) неасимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Инвариантные поверхности системы (15) образуют двумерные цилиндры вокруг оси t, разделяющие трехмерное пространство системы и стягивающиеся в силу (14) и (3) при $\varepsilon \to 0$ к этой оси. В силу единственности решения задачи Коши интегральные кривые либо принадлежат указанным инвариантным поверхностям, либо находятся между какими-либо двумя из них. Тем самым они ограничены сверху и снизу. Поскольку инвариантные поверхности стягиваются к оси t, выполняется определение устойчивости решения системы (5) по Ляпунову. Следовательно, и решение $x = 0$ уравнения (1) устойчиво по Ляпунову. □

5. Ограниченность решений

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1), в котором

$$X = \varepsilon q(t)\dot{x} + \sum_{k=0}^{n} p_k(t)x^k, \tag{18}$$

где ε — малый положительный параметр, $q(t)$ — нечетная функция, $p_0(t)$, ..., $p_n(t)$ — четные периодические функции. В результате замены (3) получим обратимую систему (5). Условия (6) принимают вид

$$R = -\varepsilon q(t)r[Sn\varphi]^2 - r^{-n}XSn\varphi,$$
$$\Phi = -\varepsilon q(t)Sn\varphi Cs\varphi - r^{-n-1}XCs\varphi.$$

Следовательно, при $r \to \infty$

$$R = -\varepsilon q(t)r[Sn\varphi]^2 + O(1),$$
$$\Phi = -\varepsilon q(t)Sn\varphi Cs\varphi + O(r^{-1}).$$

Положим

$$r = \varepsilon^{-1}(c^{-1/n} + \sqrt{\varepsilon} z), \quad c \in [1/2, 3/2]. \tag{19}$$

Получим при $\varepsilon \to 0$ систему вида

$$\dot{z} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \dot{\varphi} = c^{-1}\varepsilon^{-n}(1 + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Примем φ за независимую переменную. Тогда получается система

$$\frac{dz}{d\varphi} = O(\varepsilon^{n+1/2}), \quad \frac{dt}{d\varphi} = \varepsilon^n c + O(\varepsilon^{n+1/2}). \tag{20}$$

Теорема 2. *Если в уравнении (1) функция X удовлетворяет условиям (18), то при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ решения (1) ограничены.*

Доказательство. К системе (20), как и к системе (15), применимы результаты третьего раздела. Следовательно при каждом достаточно малом ε система (20) имеет инвариантные цилиндрические поверхности вокруг оси φ, стягивающиеся в силу (19) и (3) к бесконечно удаленной точке. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, заключаем, что решения системы (5), а значит и уравнения (1), ограничены. $\square$

Список цитируемых источников

1. *Бибиков Ю.Н.* Применение теоремы Мозера к исследованию дифференциальных уравнений нелинейных колебаний // ДАН СССР, 1975. — Т. 225, No. 6. — С. 1241–1244.
2. *Бибиков Ю.Н.* Локальные проблемы теории многочастотных нелинейных колебаний. // Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2003. — 170 с.
3. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задач об устойчивости движения. Собрание сочинений, т.2, М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — С.272–331.
4. *Littlewood J.E.* Some problems in real and complex analysis. — Lexington, MA: Heath, 1968 — 58pp.
5. *Morris G.R.* A case of boundedness in Littlewood's problem on oscillatory differential equations. // Bull. Austral. Math. Soc.,1976. — Vol.14, No. 1. — P. 71-93.

Получена 10.11.2008