

Метод парциальных реакций для анализа процессов на выходе линейных фильтров в моделях электромагнитной совместимости

КУРЕННЫЙ Э.Г., ЛЮТЫЙ А.П., ЧЕРНИКОВА Л.В.

Рассматривается задача определения реакций линейных фильтров на помехи любого вида. Фильтр сложной структуры представляется в виде параллельно включённых элементарных звеньев. Реакции звеньев суммируются. Предложены методы расчёта реакций фильтра на детерминированные и случайные помехи.

Ключевые слова: ЭМС, линейный фильтр, преобразование фильтра, парциальные реакции, методы расчёта.

The task of determination of linear filters reactions on any type interferences is decided. The complex structure filter is shown as elementary links connected in parallel. Reactions of links are sum up. The methods of calculation of filter reaction on determined and random interferences are proposed.

Key words: EMC, linear filter, transformation of filter, partial reactions, methods of calculation

Постановка задачи. Основой моделей электромагнитной совместимости (ЭМС) являются линейные взвешивающие фильтры, которые моделируют реакции объектов на помехи. Процессы в фильтрах описываются линейными дифференциальными уравнениями, порядок n которых может быть большим. Например, взвешивающий фильтр фликер-моделей [1, 2] имеет $n = 11$. Нахождение аналитического решения таких уравнений затруднено как при детерминированных, так и при случайных помехах.

В работах [3, 4] предложен метод парциальных реакций (МПР), суть которого заключается в том, что фильтр заменяется эквивалентной системой, которая состоит из n параллельно включенных инерционных звеньев первого порядка. Парциальная реакция каждого звена определяется очень просто, а искомое решение сводится к суммированию парциальных реакций.

Однако в этих работах принято допущение о том, что порядок m числителя передаточной функции фильтра должен быть меньше n . Целью статьи является обобщение МПР на случаи $m \geq n$, а также нахождение реакций $Y(t)$ фильтров на помехи $X(t)$ любого вида¹.

Суть метода. Задача заключается в нахождении реакции $Y(t)$ на помеху $X(t)$. В общем виде передаточная функция фильтра пропорциональна отношению многочленов порядков m и n :

$$W(p) = a_{\Phi} \frac{M(p)}{N(p)} = a_{\Phi} \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \mathbf{K} + b_1 p + 1}{c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \mathbf{K} + c_1 p + 1}, \quad (1)$$

где a_{Φ} – коэффициент передачи фильтра, p – оператор дифференцирования, b и c – постоянные времени.

Если \tilde{p} – полюса знаменателя, то его можно записать в виде

$$N(p) = c_n^n (p - \tilde{p}_1)(p - \tilde{p}_2) \mathbf{K} (p - \tilde{p}_n). \quad (2)$$

При $m < n$ разложение (1) на элементарные дроби позволяет найти параметры l -го инерционного звена² с передаточной функцией $a_l / (p / g_l + 1)$: сопрягающую частоту

$$\gamma_l = -\tilde{p}_l \quad (3)$$

и коэффициент передачи

$$a_l = a_{\Phi} \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \mathbf{K} + b_1 p + 1}{c_n^n p (p - \tilde{p}_1)(p - \tilde{p}_2) \mathbf{K} (p - \tilde{p}_n)} (p - \tilde{p}_l) \Big|_{p=\tilde{p}_l}, \quad (4)$$

где выражение $p - \tilde{p}_l$ в числителе и знаменателе сокращается, а потому неопределенности $0/0$ не возникает. Количество звеньев равно n (рис. 1, а). Выражения (3) и (4) могут быть комплексными.

На выходе каждого звена наблюдаются парциальные реакции $y(t)$, а искомая реакция равна их сумме:

$$Y(t) = \sum_{l=1}^n y_l(t). \quad (5)$$

¹ Численное решение задачи можно получить и на компьютере. Однако для выбора шага дискретизации и в этом случае целесообразно иметь аналитическое решение – хотя бы в качестве тестовой задачи.

² Одним из авторов составлена таблица параметров инерционных звеньев для наиболее употребляемых передаточных функций, а также для взвешивающего фильтра фликер-модели.

Парциальные реакции также могут быть комплексными, но при суммировании мнимые величины сокращаются.

При $m \geq n$ обобщение МПР достигается путем понижения порядка числителя. С этой целью разделим многочлены в (1) углом до тех пор, пока в числителе не останется многочлен $Q(p)$ порядка $q = n - 1$. В этом случае полученный многочлен $R(p)$ будет иметь порядок $r = m - n$, а вместо (1) получим

$$W(p) = a_{\phi} \frac{Q(p)}{N(p)} + R(p). \quad (6)$$

Поскольку $q < n$, к первому слагаемому можно применить формулы (3) и (4). Сопрягающие частоты инерционных звеньев останутся теми же, но коэффициенты передачи будут другими, а потому другими будут и парциальные реакции.

Из (6) следует, что к n инерционным звеньям (рис. 1, б) добавляется линейная система с передаточной функцией $R(p)$, на выходе которой протекает реакция $z(t)$. Поэтому вместо (5) реакция фильтра

$$Y(t) = \sum_{l=1}^n y_l(t) + z(t). \quad (7)$$

Наибольший практический интерес представляют частные случаи с $m = n$ и $m = n + 1$. В первом из них $r = 0$, а следовательно, второе слагаемое в (6) будет постоянной величиной R_0 . Обозначив через f коэффициенты многочлена $Q(p)$ в (6) и

$$d_0 = b_m^m / c_n^n,$$

делением многочленов в (1) найдем

$$R_0 = a_{\phi} d_0, \quad (8)$$

$$f_v^v = (b_v^v - c_v^v d_0) / (1 - d_0) \quad (9)$$

при $v = 1, 2, \mathbf{K}, n - 1$.

Тогда выражение (6) примет вид

$$W(p) = a_{\phi} (1 - d_0) \frac{f_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \mathbf{K} + f_1 p + 1}{c_n^n p(p - \tilde{p}_1) \mathbf{K} (p - \tilde{p}_n)} + a_{\phi} d_0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что преобразованная схема (рис. 1, б) включает в себя n инерционных звеньев с сопрягающими частотами (3) и коэффициентами передачи

$$a_l = a_\Phi (1 - d_0) \left. \frac{f_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \mathbf{K} + f_1 p + 1}{c_n^n p (p - \tilde{p}_1) \mathbf{K} (p - \tilde{p}_n)} (p - \tilde{p}_l) \right|_{p=p_l}, \quad (11)$$

а также пропорциональное звено с коэффициентом передачи (8). Реакция

$$z(t) = a_\Phi d_0 X(t). \quad (12)$$

Перейдем ко второму случаю, когда $r = 1$. В отличие от предыдущего случая, где величина d_0 была безразмерной, здесь отношение b_m^m / c_n^n имеет размерность времени, поэтому обозначим его через J_0 . Кроме того, введем обозначения:

$$d_1 = (b_{m-1}^{m-1} - c_{n-1}^{n-1} J_0) / c_n^n, \quad J_{R1} = J_0 / d_1,$$

в которых при $m = n + 1$ величина d_1 является безразмерной.

Деление углом многочленов в (1) дает следующие выражения:

$$R(p) = a_\Phi d_1 (J_{R1} p + 1), \quad (13)$$

$$f_v^v = (b_v^v - c_{v-1}^{v-1} d_0 - c_v^v d_1) / (1 - d_1), \quad (14)$$

а выражение (6) дает

$$W(p) = a_\Phi (1 - d_1) \frac{f_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \mathbf{K} + f_1 p + 1}{c_n^n (p - \tilde{p}_1) \mathbf{K} (p - \tilde{p}_n)} + a_\Phi d_1 (J_{R1} p + 1). \quad (15)$$

Такую передаточную функцию имеет система, также состоящая из n инерционных звеньев с сопрягающими частотами (3) и коэффициентами передачи

$$a_l = a_\Phi (1 - d_1) \left. \frac{f_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \mathbf{K} + f_1 p + 1}{c_n^n p (p - \tilde{p}_1) \mathbf{K} (p - \tilde{p}_n)} (p - \tilde{p}_l) \right|_{p=p_l}. \quad (16)$$

Добавочная система является форсирующим звеном с коэффициентами передачи $a_\Phi d_1$ и постоянной времени J_{R1} .

Аналогичным образом структурная схема преобразовывается и при $m > n + 1$. В результате получается n инерционных звеньев, параллельно кото-

рым подключается добавочная система в виде $m - n$ последовательно включенных звеньев с действительными или комплексными параметрами.

Частотные и переходные функции. Частотные функции фильтра целесообразно определять по передаточной функции (1) без её преобразования. Заменяв оператор дифференцирования на $j\omega$, получим амплитудно-частотную функцию

$$A(\omega) = a_{\phi} |M(j\omega)/N(j\omega)| = a_{\phi} |M(j\omega)|/|N(j\omega)|, \quad (17)$$

где $j = \sqrt{-1}$, ω – угловая частота.

Переходные функции значительно проще находить согласно (5), так как для инерционных звеньев они известны, а для системы с передаточной функцией $R(p)$ их определение с использованием обратного преобразования L^{-1} Лапласа не вызывает затруднений.

Для параллельно соединенных звеньев переходная функция

$$h(t) = \sum_{l=1}^n a_l (1 - e^{-\gamma_l t}) + L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} R(p) \right\}. \quad (18)$$

Весовая функция

$$g(t) = h'(t) = \sum_{l=1}^n a_l \gamma_l e^{-\gamma_l t} + L^{-1} \{R(p)\}. \quad (19)$$

Для частных случаев вторые слагаемые в (18) и (19) определяются выражениями:

$$h_R(t) = a_{\phi} d_0 1(t), \quad g_R(t) = a_{\phi} d_0 \delta(t) \quad \text{при } m = n, \quad (20)$$

$$h_R(t) = a_{\phi} d_1 [1(t) + J_{R1} \delta(t)], \quad g_R(t) = a_{\phi} d_1 [\delta(t) + J_{R1} \delta'(t)] \quad \text{при } m = n + 1, \quad (21)$$

в которых $1(t)$ – единичная функция, $\delta(t)$ – дельта-функция.

Детерминированные непериодические помехи. Исходная для расчетов помеха задается аналитическим выражением или в виде дискретной последовательности ординат X_s с шагом при $s = 0, 1, \mathbf{K}, S$. Шаг дискретизации должен быть настолько малым, чтобы на результатах расчетов не сказывалось то, как представляется функция между ординатами.

Простейшим является случай, когда ординаты помехи внутри интервала считаются неизменными: например, при численных расчетах с помощью интеграла Дюамеля. Такое представление помехи в виде ступенчатой функции приемлем для случаев $m \leq n$, когда отсутствуют форсирующие звенья, а потому не требуется находить производные на границах интервалов Δ . При $m \geq n + 1$ дифференцирование ступенчатой функции приводит к появлению в выражениях для реакции добавочной системы дельта-функций и их производных. Оперировать с такими выражениями удобно в аналитических преобразованиях. В численных же расчетах целесообразно использовать более сложные представления помехи: при $m = n + 1$ – в виде кусочно-линейной функции, при $m = n + 2$ – путем параболической аппроксимации и т.д. Кроме того, для исключения дельта-функций в начальный и конечный момент времени, ординаты для этих моментов времени должны быть равны нулю. Это можно сделать добавлением нулевых ординат или приравниванием первой и последней ординаты к нулю.

Парциальные реакции можно определить по формуле интеграла Дюамеля, однако значительно проще рассчитывать их ординаты пошагово – такой метод назовём интервальным.

Рассмотрим случай, когда $m < n$. Процессы в инерционном звене описываются дифференциальным уравнением первого порядка. Будем считать, что величина s -ой ступени определяется ординатой X_s в её начале, поэтому номера ординат и ступеней будут совпадать. Если y_{lsh} – ордината реакции l -го звена в начале ступени, то решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{ls}(t) = y_{lsh} e^{-\gamma_l t} + a_l X_s (1 - e^{-\gamma_l t}) \text{ при } 0 \leq t \leq \Delta, \quad (22)$$

где время отсчитывается от начала ступени.

Подставив сюда $t = \Delta$ и обозначив $e_l = e^{-\gamma_l \Delta}$, найдём конечную ординату

$$y_{lск} = e_l y_{lsh} + a_l (1 - e_l) X_s. \quad (23)$$

Вычисление начинается с нулевой ступени, для которой начальная ордината равна нулю. Рассчитанная согласно (23) конечная ордината является начальной для первой ступени, и т.д. С учётом (7) и (12) получим выражение

$$Y_{ск} = \sum_{l=1}^n y_{lск} \quad (24)$$

для конечной ординаты искомой реакции.

Для моделей с $m \geq n$ к (24) добавляется конечная ордината реакции системы с передаточной функцией $R(p)$:

$$Y_{sk} = \sum_{l=1}^n y_{lsk} + z_{sk}. \quad (25)$$

Если $m = n$, то согласно (12)

$$z_{sk} = a_{\phi} d_0 X_s.$$

В случае $m = n + 1$ реакция форсирующего звена пропорциональна сумме самого процесса и его производной, взятой с множителем J_{R1} . При ступенчатом задании помехи производные отличны от нуля лишь на границах интервала и равны отношению разности ординат ступеней к Δ . В результате для s -ой ступени реакция

$$Z_s(t) = \begin{cases} a_{\phi} [X_s + d_1 (X_s - X_{s-1}) J_{R1} / \Delta] & \text{при } t = 0, \\ a_{\phi} X_s & \text{при } 0 < t < \Delta, \\ a_{\phi} [X_s + d_1 (X_{s+1} - X_s) J_{R1} / \Delta] & \text{при } t = \Delta, \end{cases}$$

причем для нулевой ступени $X_{s-1} = 0$.

В проектировании помеха задается в виде кусочно-линейной функции. На s -м участке длительностью t_s ординаты возрастают линейно от начальной X_{sH} до конечной X_{sK} ординаты с угловым коэффициентом ρ_s . В этом случае справедливо выражение

$$y_{lsk} = e_{ls} y_{lsH} + a_{\phi} \rho_s t_s + a_{\phi} (X_{sH} - \rho_s J_l) (1 - e_{ls}),$$

где $e_{ls} = \exp(-\gamma_l t_s)$. Вместе с тем, для единообразия вычислений целесообразно всё же использовать формулы (23) – (25), заменяя прямую последовательностью ординат с шагом Δ .

Если график помехи является реализацией стационарного случайного процесса, то на выходе фильтра вначале протекает переходный случайный процесс, длительность которого зависит от параметров фильтра. Эту длительность можно определить по переходной функции (18) – когда она с заданной погрешностью достигает своего установившегося значения. Для получения установив-

шегося режима реакции необходимо из её графика исключить переходный процесс.

Периодические помехи. При сложной форме периодических графиков (например, от прокатных станков) расчёт выполняется так же, как и для непериодических – интервальным методом. Вычисления заканчиваются тогда, когда периодический график реакции начинает повторяться от цикла к циклу.

Для помех простой формы стационарное решение в пределах длительности цикла $t_{ц}$ можно получить сразу, без вычисления переходного процесса. С этой целью для каждого участка графика помехи записываются выражения для реакций, в которые входят неизвестные ординаты на границах участков. С учётом того, что начальная ордината последующего участка равна конечной ординате предыдущего участка и ординаты в начале и конце цикла совпадают, получается система уравнений для определения неизвестных граничных ординат.

Проиллюстрируем такой подход на примере периодической помехи со следующими величинами и длительностями участков: B и t_I , 0 и t_{II} , $-B$ и t_{III} , 0 и t_{IV} . Обозначим (индекс l опущен):

$$e_I = e^{-\gamma t_I}, \dots, e_{IV} = e^{-\gamma t_{IV}}, e_{ц} = e_I \cdot \dots \cdot e_{IV} = e^{-\gamma t_{ц}}$$

и по аналогии с (23) запишем выражения для конечных ординат участков:

$$\begin{aligned} y_{Ik} &= y_{In} e_I + a(1 - e_I)B, & y_{IIk} &= y_{IIн} e_{II}, \\ y_{IIIк} &= y_{IIIн} e_{III} - a(1 - e_{III})B, & y_{IVк} &= y_{IVн} e_{IV}. \end{aligned}$$

Доопределим эти выражения граничными условиями:

$$y_{Ik} = y_{IIн}, \quad y_{IIк} = y_{IIIн}, \quad y_{IIIк} = y_{IVн}, \quad y_{IVк} = y_{In}.$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений, получим искомые неизвестные:

$$\begin{aligned} y_{In} = y_{IVк} &= a e_{IV} B \frac{(1 - e_I) e_{II} e_{IV} - 1 + e_{III}}{1 - e_{ц}}, \\ y_{IIн} = y_{Ik} &= a B \frac{1 - e_I - e_I(1 - e_{III}) e_{IV}}{1 - e_{ц}}, \\ y_{IIIн} = y_{IIк} &= a e_{II} B \frac{1 - e_I - e_I(1 - e_{III}) e_{IV}}{1 - e_{ц}}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$y_{IVH} = y_{IIIK} = aB \frac{e_{III} - 1}{1 - e_{II}}.$$

Следует отметить, что теоретически решение может быть получено частотными методами, если разложить периодическую помеху в ряд Фурье. Однако при этом возникают трудности с выбором количества учитываемых гармоник и погрешностями воспроизведения помехи на границах участков (явление Гиббса), поскольку в практических приложениях графики помех обычно являются недифференцируемыми.

Случайные помехи. Рассмотрим стационарную случайную помеху, которая характеризуется средним значением X_c и корреляционной функцией (КФ) $K(\tau)$. Среднее значение реакции в стационарном состоянии может быть найдено с использованием частотной или переходной характеристик:

$$Y_c = X_c A(0) = X_c h(\infty),$$

а трудности возникают в определении дисперсии DY реакции.

Используемые в практике выражения для КФ в большинстве случаев сводятся к сумме экспонент вида

$$K(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (27)$$

с комплексным параметром α и вещественным стандартом σ_X . В связи с этим достаточно рассмотреть только экспоненциальную КФ.

При $m \leq n$ в преобразованной модели фильтра отсутствует форсирующее звено, поэтому в качестве аппроксимирующих можно выбирать как дифференцируемые, так и недифференцируемые выражения. К последним относится экспоненциально-косинусоидальная КФ

$$K(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2} \sigma_X^2 \left[e^{-(\alpha - j\omega_0)|\tau|} + e^{-(\alpha + j\omega_0)|\tau|} \right], \quad (28)$$

где ω_0 – параметр.

При $m \leq n + 1$ наличие форсирующего звена приводит к реакции с бесконечной дисперсией, поэтому целесообразно использовать дифференцируемую КФ [5]

$$\begin{aligned}
K(\tau) &= \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \left[(1 - j\alpha/\omega_0) e^{-(\alpha - j\omega_0)|\tau|} + (1 + j\alpha/\omega_0) e^{-(\alpha + j\omega_0)|\tau|} \right] \quad (29)
\end{aligned}$$

Рассмотрим вначале инерционные звенья. В стационарном режиме дисперсия реакции на выходе l -го звена определяется известным выражением

$$Dy_l = \sigma_X^2 \frac{a_l^2}{1 + \alpha/\gamma_l}. \quad (30)$$

Так как на вход всех инерционных звеньев поступает одна и та же помеха, парциальные реакции оказываются коррелированными. В связи с этим дополнительно к (30) необходимо найти корреляционные моменты связи k_{lr} между парно взятыми l -й и r -й парциальными реакциями. Для этого используем общую формулу (6.10.2) из [6], вывод которой сделан для центрированных случайных процессов, но она применима и для нецентрированных процессов, так как прибавление средних значений не изменяет дисперсии и КФ. По этой формуле для КФ (27) получим

$$k_{lr} = \sigma_x^2 a_l a_r \gamma_l \gamma_r \frac{\gamma_l + \gamma_r + 2\alpha}{(\gamma_l + \gamma_r)(\alpha + \gamma_l)(\alpha + \gamma_r)}. \quad (31)$$

Формулы (30) и (31) позволяют найти дисперсии реакций и корреляционные моменты для процессов с КФ в виде суммы экспонент. Так, для КФ (28) после несложных преобразований найдём

$$D_{y_l} = \sigma_x^2 a_l^2 \frac{\gamma_l (\gamma_l + \alpha)}{(\gamma_l + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad (32)$$

$$k_{lr} = \sigma_x^2 a_l a_r \frac{\gamma_l \gamma_r}{\gamma_l + \gamma_r} \left[\frac{\gamma_l + \alpha}{(\gamma_l + \alpha)^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma_r + \alpha}{(\gamma_r + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right], \quad (33)$$

а для КФ (29)

$$D_{y_l} = \sigma_x^2 a_l^2 \frac{\gamma_l (\gamma_l + 2\alpha)}{(\gamma_l + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad (34)$$

$$k_{lr} = \sigma_x^2 a_l a_r \frac{\gamma_l \gamma_r}{\gamma_l + \gamma_r} \left[\frac{\gamma_l + 2\alpha}{(\gamma_l + \alpha)^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma_r + 2\alpha}{(\gamma_r + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right]. \quad (35)$$

По общей формуле для дисперсии суммы коррелированных случайных процессов получим

$$DY = \sum_{l=1}^n Dy_l + \sum_{l \neq r} k_{lr} + \sum_{l \neq r} k_{rl} \quad \text{при } m < n. \quad (36)$$

Перейдем к случаю $m = n$. Здесь пропорциональное звено имеет нулевую весовую функцию, а потому корреляционные моменты связи между реакцией на выходе этого звена и любой парциальной реакцией равны нулю. В связи с этим к (36) добавляется лишь дисперсия реакции (12):

$$DY = \sum_{l=1}^n Dy_l + \sum_{l \neq r} k_{lr} + \sum_{l \neq r} k_{rl} + a_{\Phi}^2 d_0^2 \sigma_X^2 \quad \text{при } m = n. \quad (37)$$

Иначе обстоит дело в случае $m = n + 1$, когда между реакцией форсирующего звена и парциальными реакциями существует корреляционная связь. Так как в выражении (21) для весовой функции имеется дельта-функция и её производная, двойное интегрирование в общих формулах теории вероятностей для дисперсии и корреляционного момента с использованием свёрток осуществляется очень просто. В результате получим дисперсию реакции

$$Dz = a_{\Phi}^2 d_1^2 [\sigma_X^2 - J_{R1}^2 K''(0)] \quad (38)$$

и корреляционный момент связи

$$k_{zl} = a_{\Phi} \gamma_l d_1 \left\{ \int_0^{\infty} [K(\xi) + J_{R1} K'(\xi)] e^{-\gamma_l \xi} d\xi \right\}, \quad (39)$$

где ξ – переменная интегрирования и учтено, что $K'(0) = 0$.

В этих формулах КФ должна быть дифференцируемой. Для КФ вида (29) дифференцирование даёт

$$K'(\tau) = -\sigma_X^2 \frac{1}{\omega_0} (\alpha^2 + \omega_0^2) e^{-\alpha|\tau|} \sin \omega_0 |\tau|,$$

$$K''(\tau) = \sigma_X^2 \frac{1}{\omega_0} (\alpha^2 + \omega_0^2) e^{-\alpha|\tau|} (\alpha \sin \omega_0 |\tau| - \omega_0 \cos \omega_0 \tau).$$

Подстановка этих выражений в (38) и (39) позволяет получить конечные формулы:

$$Dz = \sigma_X^2 a_{\Phi}^2 d_1^2 [1 + (\alpha^2 + \omega_0^2) J_{R1}^2], \quad (40)$$

$$k_{zl} = \sigma_X^2 a_\Phi^2 \gamma_l d_1 \frac{2\alpha + \gamma_l + J_R(\alpha^2 + \omega_0^2)}{(\alpha + \gamma_l)^2 + \omega_0^2}. \quad (41)$$

В отличие от (37) в формуле для дисперсии реакции

$$DY = \sum_{l=1}^n Dy_l + \sum_{l \neq r} k_{lr} + \sum_{l \neq r} k_{rl} + Dz + 2 \sum_{l=1}^n k_{zl} \quad (42)$$

добавляется сумма корреляционных моментов (41) с учетом того, что $k_{zl} = k_{lz}$.

Эффективное значение реакции

$$Y_3 = \sqrt{X_c^2 + DY}. \quad (43)$$

Его квадрат пропорционален средней мощности реакции, что позволяет, например, вычислить среднюю температуру допустимого нагрева, а, следовательно, и сокращение срока службы изоляции. Если по условиям задачи этих данных недостаточно, то аналогичным образом определяется КФ реакции фильтра.

Модификация метода. В тех случаях, когда нет необходимости анализировать переходный случайный процесс при включении фильтра на стационарную помеху, можно добиться унификации расчётов характеристик парциальных реакций. Для этого используем представление стационарной помехи как результата воздействия белого шума с интенсивностью N на гипотетическую систему, передаточная функция $G(p)$ которой зависит от вида КФ помехи. Так, для КФ вида (27) – (29):

$$G(p) = \sigma_X \sqrt{\frac{2T_\alpha}{\pi N}} \frac{1}{T_\alpha p + 1}, \quad T_\alpha = 1/\alpha,$$

$$G(p) = \sigma_X \frac{1}{T_0} \sqrt{\frac{2T_\alpha}{\pi N}} \frac{T_0 p + 1}{T_0^2 p^2 + 2\alpha T_0^2 p + 1}, \quad T_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}, \quad (44)$$

$$G(p) = \sigma_X \frac{2}{\sqrt{\pi N / T_\alpha}} \frac{1}{T_0^2 p^2 + 2\alpha T_0^2 p + 1}.$$

МПР применяется к составной линейной системе, передаточная функция которой при $m < n$ равна произведению (1) на $G(p)$. Для белого шума формулы упрощаются:

$$Dy_l = \frac{1}{2} \pi a_l^2 \gamma_l N, \quad k_{lr} = \pi a_l a_r N \frac{\gamma_l \gamma_r}{\gamma_l + \gamma_r}. \quad (45)$$

В коэффициенты передачи a входит множитель $N^{-1/2}$, поэтому в формулах (45) интенсивность белого шума сокращается. В связи с этим она может быть любой: например, равной единице, но для соблюдения размерности в явном виде величину N целесообразно сохранить.

Несмотря на увеличение количества инерционных звеньев, решение упрощается вследствие простоты и универсальности выражений (45), так как они едины для КФ любого вида – изменяются лишь параметры звеньев. Такая модификация МПР применима только для стационарных состояний, поэтому её можно назвать методом стационарных парциальных реакций (МСПР).

При $m \geq n$ возможны два способа применения МСПР. Во-первых, можно вместо передаточной функции $R(p)$ использовать составную систему с передаточной функцией $R(p)G(p)$. Такой подход удобен в случаях, когда порядок числителя многочлена в передаточной функции составной системы меньше порядка знаменателя. Например, при $m = n$ второе и третье выражения в (44) дают такой результат, а при $m = n + 1$ – только третье. В этом случае к составной системе применяется МСПР, а потому все звенья в преобразованной модели фильтра оказываются инерционными.

Во-вторых, для сохранения второго слагаемого в (6) следует принять модель с двумя входами. На первый вход подаётся белый шум, который воздействует на составную систему с передаточной функцией, равной произведению первого слагаемого в (6) на $G(p)$. К этой системе применяется МСПР. На второй вход подаётся помеха, которая воздействует на систему с передаточной функцией $R(p)$. При этом дисперсия реакции $z(t)$ в (42) остаётся той же, а величины k_{z_l} изменяются. Они зависят от вида весовой функции системы с передаточной функцией $G(p)$, а, следовательно, и от вида КФ. В связи с этим унификация расчётов не достигается, поэтому МСПР при $m \geq n + 1$ применять нецелесообразно.

Пример расчета. Конденсатор³ ёмкостью $C = 6 \cdot 10^{-4}$ Ф и номинальным сопротивлением $x_H = 9$ Ом подключен к сети с активным сопротивлением $r = 0,1$ Ом и индуктивностью $L = 0,0002$ Гн. Оценить перегрузку конденсатора от непериодической помехи $u_H(t)$ (рис. 2, а) при $\Delta = 1,98 \cdot 10^{-4}$ с и длительностью цикла $t_{ц} = 0,02$ с.

Для схемы с последовательным включением r , L и C передаточная функция по току i имеет вид:

$$W_i(p) = a_{\phi i} \frac{T_1 p}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где $T_1 = rC$, $T_2^2 = LC$, а в коэффициенте $a_{\phi i} = x_H / r$ множитель x_H переводит размерность тока в проценты от номинального тока конденсатора. Вычисления дают $T_1 = 6 \cdot 10^{-5}$ с, $T_2^2 = 1,2 \cdot 10^{-7}$ с², $a_{\phi i} = 60$.

Рассчитаем слагаемые:

$$\lambda = \frac{T_1}{2T_2^2} = 250 \text{ с}^{-1}, \quad \beta = \frac{1}{2T_2^2} \sqrt{4T_2^2 - T_1^2} = 2876 \text{ с}^{-1}$$

полюсов знаменателя

$$\tilde{p}_{1,2} = -\lambda \pm j\beta,$$

разность которых равна $2j\beta = j5752 \text{ с}^{-1}$.

В передаточной функции $m = 1 < n = 2$, поэтому преобразованная структурная схема фильтра будет содержать только два инерционных звена⁴ с параметрами $\gamma_{1,2} = -\tilde{p}_{1,2}$ и коэффициентами передачи (4):

$$a_1 = -\frac{a_{\phi i} T_1 \tilde{p}_1}{T_2^2 \tilde{p}_1 (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_1) (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)} (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_1) = -\frac{a_{\phi i} T_1}{2j\beta T_2^2} = j5,215,$$

$$a_2 = -\frac{a_{\phi i} T_1}{T_2^2 (\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1)} = \frac{a_{\phi i} T_1}{2j\beta T_2^2} = -a_1 = -j5,215.$$

Рассчитаем значения

³ Для простоты конденсатор представлен идеальной ёмкостью. Полные схемы замещения приведены в [7]. Их использование увеличивает количество инерционных звеньев, но порядок расчёта остаётся тем же.

⁴ При расчёте потерь напряжения порядки числителя и знаменателя будут одинаковыми, что требует применения формулы (25), а не (24).

$$e_{1,2} = \exp\left[(-250 \pm j2876)1,98 \cdot 10^{-4}\right] = 0,80152 \pm j0,5131.$$

Подставив их в (23) и выполнив расчёты, получим график тока, представленный на рис. 2, б. Постоянная времени цепи составляет

$$2T_2^2/T_1 = 1/\lambda = 0,004 \text{ с},$$

поэтому можно считать, что переходный процесс заканчивается примерно через 0,015 с. Отбрасывая начальный участок тока от 0 до 0,015 с, по оставшейся части графика рассчитаем эффективное значение несинусоидальной составляющей тока $I_{\text{пэ}} = 7,09 \%$. Перегрузка не превышает допустимое в [8] значение 30 %.

Выводы. 1. Для нахождения реакций линейных фильтров на помехи целесообразно использовать представление фильтра в виде параллельно включенных элементарных звеньев, что позволяет свести задачу к суммированию реакций звеньев или их характеристик.

2. В случае непериодической помехи, заданной графически, ординаты графика реакции фильтра рекомендуется вычислять пошагово, начиная с нулевых начальных условий. Для непериодических помех стационарное решение целесообразно находить без расчета переходного процесса, используя условия равенства ординат реакций на границах участков графика помехи.

3. Для случайных помех метод парциальных реакций даёт аналитическое решение как для стационарных, так и для нестационарных процессов. Для анализа стационарных случайных реакций помеху целесообразно представлять как результат прохождения белого шума через линейную систему, чем достигается унификация расчётов при любых видах помех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Flickermeter. Functional and design specification. – Geneva: IEC Report. – 1986. – Publication 868. – 31 p.

2. Куренный Э.Г., Дмитриева Е.Н., Куренный Д., Цыганкова Н.В. Совершенствование модели фликера. – Электричество. – 2003. – № 2. – С. 17-23.

3. Абу Сиам Сами. Методы расчета динамических показателей электромагнитной совместимости электрооборудования с периодической нагрузкой и систем электроснабжения: Автореферат дис...канд. техн. наук: 05.09.03 / ДПИ. – Донецк, 1992. – 19 с.

4. Eduard G. Kourennyi, Victor A. Petrosov, Lidiya V. Chernikova Linear Filtration of random processes in EMC models: the “partial reactions” method// Electromagnetic Compatibility 2000, part II, Fifteenth International Wroclaw Symposium on Electromagnetic Compatibility. – 2000. – P. 587 – 589.

5. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.

6. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, 1970. – 392с.

7. Ермуратский В.В., Ермуратский П.В. Конденсаторы переменного тока в тиристорных преобразователях. – М.: Энергия, 1979. – 224 с.

8. Правила устройства электроустановок: Минэнерго СССР. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1986.

Авторы: Куренный Эдуард Григорьевич в 1961 г. окончил электромеханический факультет Новочеркасского политехнического института (НПИ). В 1974 г. защитил докторскую диссертацию «Основы общей теории вероятностных процессов в заводских электрических сетях» в НПИ. Профессор кафедры электроснабжения промышленных предприятий и городов (ЭПГ) Донецкого национального технического университета (ДонНТУ).

Лютый Александр Павлович в 1978 г. окончил электротехнический факультет Запорожского машиностроительного института. В 2003 г. защитил кандидатскую диссертацию «Методы оценивания параметров несимметрии и несинусоидальности режимов в системах электроснабжения с резкопеременной нагрузкой» в Институте электродинамики НАН Украины. Директор по энергетике ОАО «Днепропецсталь».

Черникова Лидия Вячеславовна в 1998 г. окончила электротехнический факультет ДонНТУ. В 2001 г. защитила кандидатскую диссертацию «Методы расчета характеристик случайных процессов в линейных фильтрах моделей оценки электромагнитной совместимости в системах электроснабжения общего назначения» в ДонНТУ. Доцент кафедры ЭПГ ДонНТУ.

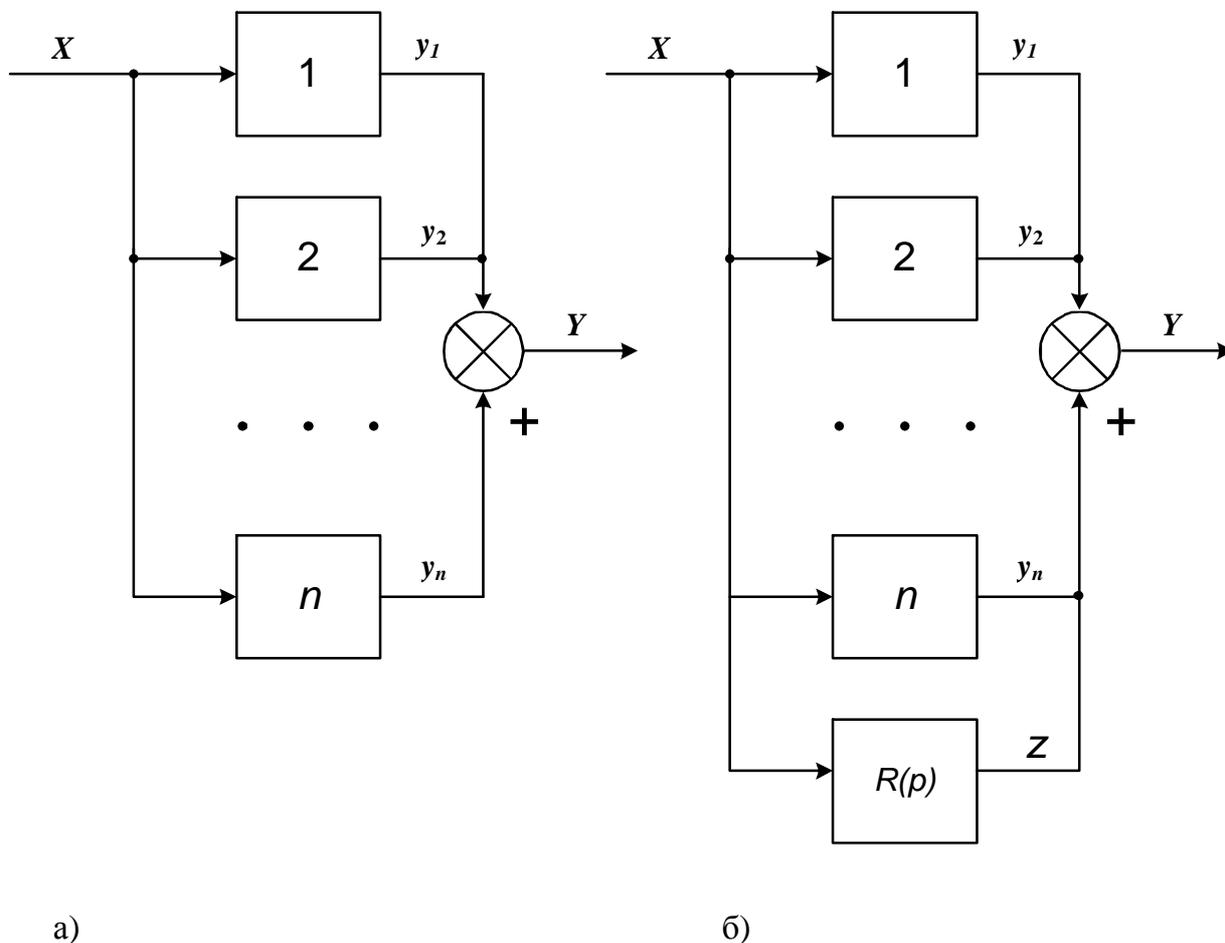


Рис. 1. Преобразованные структурные схемы фильтров:

а) при $m < n$; б) при $m \geq n$

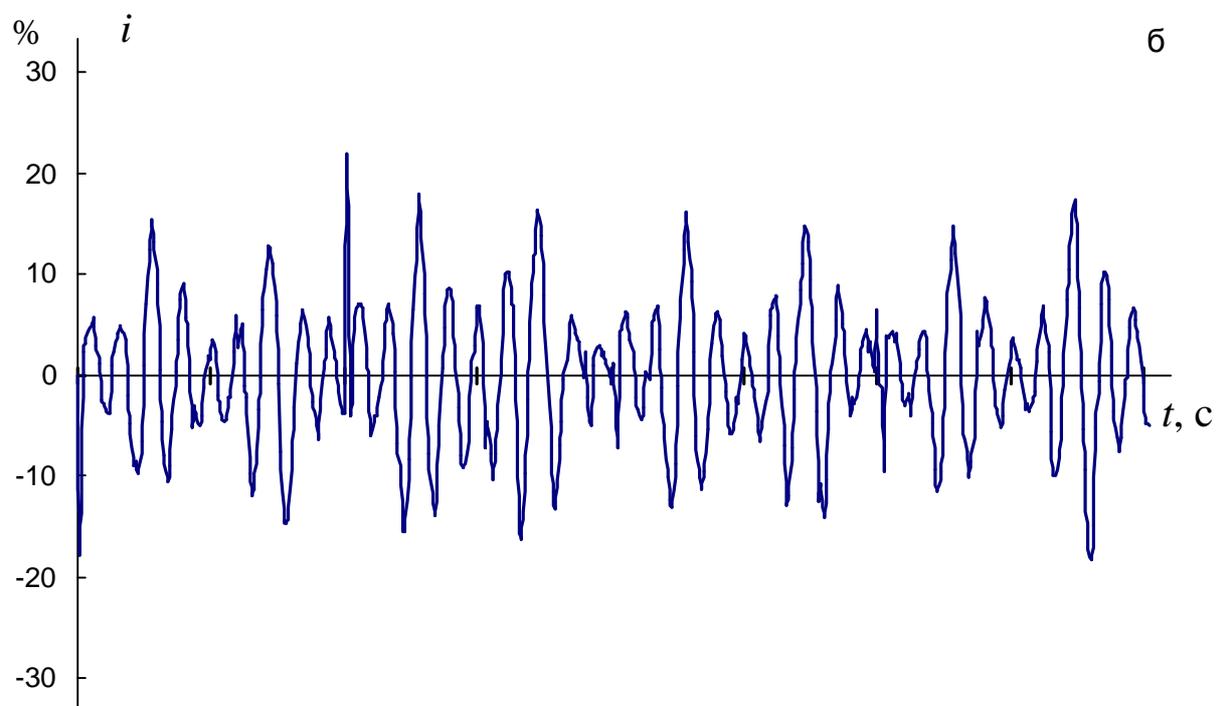
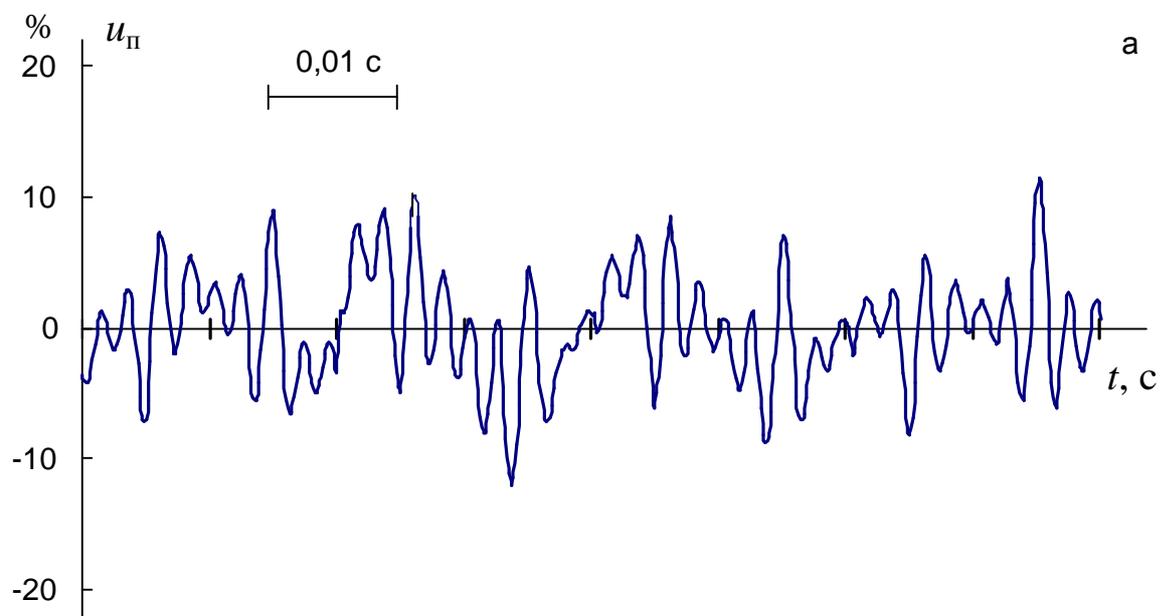


Рис. 2. Непериодические несинусоидальные составляющие напряжения сети и тока конденсатора