

УДК 621.86.063

И. В. Михайлов

Астраханский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ГРЕЙФЕРА

Для того чтобы рассчитать на прочность какой-нибудь элемент грейфера (например, челюсть или тягу), можно поступить следующим образом:

1. Проанализировать движение грейфера как механизма с абсолютно жёсткими звеньями. В результате этого будут определены все силы инерции и моменты сил инерции в любой момент процесса зачерпывания.

2. Выполнить силовой расчёт грейферного механизма, в результате чего будут определены реакции во всех кинематических парах.

3. Рассмотреть элемент грейфера отдельно от всех остальных звеньев под действием внешних сил, сил инерции и определённых на предыдущем шаге реакций, чтобы в дальнейшем определить напряжённое состояние рассматриваемого элемента. Здесь при использовании метода конечных элементов элемент грейфера (челюсть) придётся закрепить геометрически неизменяемым образом для того, чтобы его матрица жёсткости была неособенной [1].

Таким образом, анализ движения грейфера является важнейшим этапом его расчёта.

Рассмотрим движение штангового грейфера (рис. 1), когда он опущен на зачерпываемый материал и происходит смыкание челюстей за счёт работы замыкающей лебёдки. Считаем, что сопротивления на челюстях будут одинаковыми.

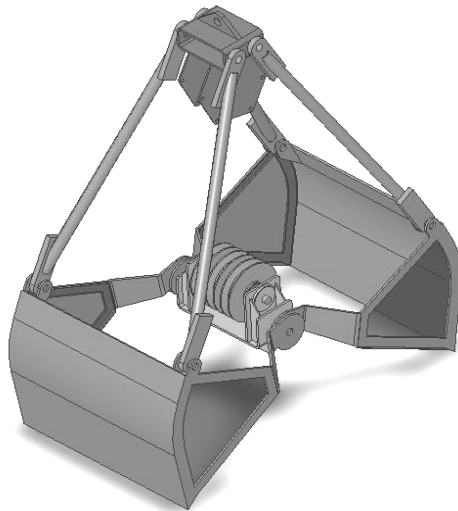


Рис. 1. Штанговый грейфер

Предположим, что:

- 1) верхняя и нижняя траверсы грейфера двигаются вертикально, вдоль неподвижной оси Oy_0 (рис. 2);
- 2) точки 2 челюстей грейфера всё время находятся в контакте с наперёд заданной кривой зачерпывания PQ [2];
- 3) все звенья грейфера совершают плоское движение в вертикальной плоскости (в так называемой плоскости зачерпывания [2]).

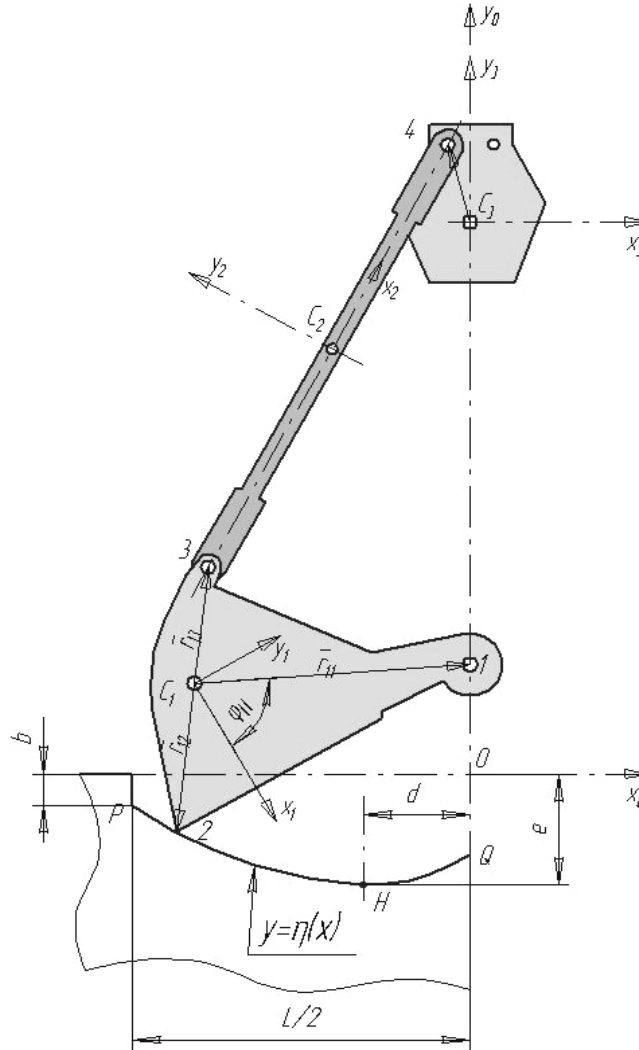


Рис. 2. Механизм, моделирующий движение грейфера

Рассмотрим механизм, состоящий из челюсти массой m_1 , верхней траверсы массой $m_3/2$ и тяги массой $2 \cdot m_2$ (рис. 2). По движению этого механизма будем судить о движении элементов грейфера.

Будем рассматривать движение этого механизма как набора несвободных твёрдых тел [3], считая, что для каждого из звеньев известны ко-

ординаты центра тяжести, масса m_i и центральный момент инерции J_i . Считаем, что для каждого тела задан также набор точек (будем называть их контактными), в которых это тело контактирует с любыми другими телами тем или иным способом.

Для каждого звена (рис. 2) введём связанную (с ним) систему отсчёта x_i, y_i , начало которой совместим с центром тяжести. Тогда положение связанных осей относительно неподвижной системы отсчёта x_0, y_0 будет задаваться набором $x_{i0}, y_{i0}, \varphi_{i0}$. В связанной системе отсчёта контактные точки удобно задавать полярными координатами r_{ij}, φ_{ij} , где индекс i соответствует номеру тела ($i = 1, 2, \dots, n$), j – номеру контактной точки ($j = 1, 2, \dots, m$).

Каждое звено может быть рассмотрено как свободное тело, находящееся под действием внешних сил (и моментов) и реакций связей [4, 5].

Введём обозначения:

– φ_{10} – угол поворота подвижной системы отсчёта $C_1x_1y_1$ (ПСО₁), связанной с челюстью 1, относительно неподвижной Ox_0y_0 ;

– (r_{11}, φ_{11}) – полярные координаты точки 1 в ПСО₁;

– (r_{12}, φ_{12}) – полярные координаты точки 2 в ПСО₁;

– (r_{13}, φ_{13}) – полярные координаты точки 3 в ПСО₁;

– (x_{10}, y_{10}) – координаты центра тяжести C_1 челюсти 1 в неподвижной системе отсчёта Ox_0y_0 ;

– F_{10}^x, F_{10}^y – проекции главного вектора внешних сил, действующих на челюсть, на оси Ox_0 и Oy_0 соответственно; M_{10} – главный момент внешних сил, приложенных к челюсти;

– φ_{20} – угол поворота подвижной системы отсчёта $C_2x_2y_2$ (ПСО₂), связанной с тягой 2, относительно неподвижной Ox_0y_0 ;

– (r_{23}, φ_{23}) – полярные координаты точки 3 в ПСО₂;

– (r_{24}, φ_{24}) – полярные координаты точки 4 в ПСО₂;

– (x_{20}, y_{20}) – координаты центра тяжести C_2 тяги в неподвижной системе отсчёта Ox_0y_0 ;

– F_{20}^x, F_{20}^y – проекции главного вектора внешних сил, действующих на тягу, на оси Ox_0 и Oy_0 соответственно; M_{20} – главный момент внешних сил, приложенных к тяге;

– φ_{30} – угол поворота подвижной системы отсчёта $C_3x_3y_3$ (ПСО₃), связанной с верхней траверсой, относительно неподвижной Ox_0y_0 ;

– (r_{34}, φ_{34}) – полярные координаты точки 4 в ПСО₃;

– (x_{30}, y_{30}) – координаты центра тяжести C_3 верхней траверсы в неподвижной системе отсчёта Ox_0y_0 ;

– F_{30}^y – проекция главного вектора внешних сил, действующих на верхнюю траверсу, на ось Oy_0 .

Точка 1 движется строго вдоль оси Oy_0 . Это накладывает следующее ограничение на движение этой точки:

$$x_{10} + r_{11} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}) = 0. \quad (1)$$

Пусть $\begin{cases} y = \eta(x) = -e + A \cdot (x + d)^2, \\ -\frac{L}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$ – уравнение кривой зачерпывания PQ

[2], где $A = \frac{e-b}{\left(\frac{L}{2}-d\right)^2}$; b – первоначальное заглубление грейфера,

$a(-d, -e)$ – координаты точки с наибольшим заглублением H в системе координат x_0Oy_0 (рис. 2); L – величина раскрытия челюстей.

Точка 2 челюсти скользит вдоль кривой зачерпывания, поэтому

$$y_{10} + r_{12} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{12}) = \eta[x_{10} + r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12})]. \quad (2)$$

В точке 3 – цилиндрический шарнир; эта точка – общая для челюсти и тяги. Это условие даёт два уравнения связи:

$$\begin{cases} x_{10} + r_{13} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{13}) = x_{20} + r_{23} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{23}), \\ y_{10} + r_{13} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{13}) = y_{20} + r_{23} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{23}). \end{cases} \quad (3)$$

Точка 4 – общая для тяги и верхней траверсы:

$$\begin{cases} x_{20} + r_{24} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{24}) = x_{30} + r_{34} \cdot \cos(\varphi_{30} + \varphi_{34}), \\ y_{20} + r_{24} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{24}) = y_{30} + r_{34} \cdot \sin(\varphi_{30} + \varphi_{34}). \end{cases} \quad (4)$$

Предполагаем, что точка C_3 движется вдоль оси Oy_0 . В этом случае $x_{30} = 0$. Будем считать также, что верхняя траверса движется поступательно: $\varphi_{30} = 0$, поэтому

$$\begin{cases} x_{20} + r_{24} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{24}) = r_{34} \cdot \cos(\varphi_{34}), \\ y_{20} + r_{24} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{24}) = y_{30} + r_{34} \cdot \sin(\varphi_{34}). \end{cases} \quad (5)$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases} \Phi_1 = x_{10} + r_{11} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}), \\ \Phi_2 = y_{10} + r_{12} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{12}) - \eta[x_{10} + r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12})], \\ \Phi_3 = x_{10} + r_{13} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{13}) - x_{20} - r_{23} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{23}), \\ \Phi_4 = y_{10} + r_{13} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{13}) - y_{20} - r_{23} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{23}), \\ \Phi_5 = x_{20} + r_{24} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{24}) - r_{34} \cdot \cos(\varphi_{34}), \\ \Phi_6 = y_{20} + r_{24} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{24}) - y_{30} - r_{34} \cdot \sin(\varphi_{34}). \end{cases} \quad (6)$$

Тогда уравнения связи (1), (2), (3) и (5) можно записать так:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = 0, \quad \Phi_5 = 0, \quad \Phi_6 = 0. \quad (7)$$

Матричное уравнение кинестатического равновесия грейфера будет выглядеть так:

$$\begin{bmatrix} [M]_{7 \times 7} & [T]_{7 \times 6} \\ [T]_{6 \times 7}^T & [0]_{6 \times 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{X}\}_{7 \times 1} \\ \{\lambda\}_{6 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q\}_{7 \times 1} \\ \{U\}_{6 \times 1} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$[M]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_3}{2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\{\ddot{X}\}_{7 \times 1} = [\ddot{x}_{10} \quad \ddot{y}_{10} \quad \ddot{\phi}_{10} \quad \ddot{x}_{20} \quad \ddot{y}_{20} \quad \ddot{\phi}_{20} \quad \ddot{y}_{30}]^T, \quad (10)$$

$$\{\lambda\}_{6 \times 1} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6 \quad \lambda_7]^T, \quad (11)$$

$$\{Q\}_{7 \times 1} = [F_{10}^x \quad F_{10}^y \quad M_{10} \quad F_{20}^x \quad F_{20}^y \quad M_{20} \quad F_{30}^y]^T, \quad (12)$$

$$\{U\}_{6 \times 1} = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6]^T, \quad (13)$$

$$[T]_{7 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \Phi_6}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{10}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{10}} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{10}} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial y_{10}} & \frac{\partial \Phi_5}{\partial y_{10}} & \frac{\partial \Phi_6}{\partial y_{10}} \\ \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \Phi_1} & \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \Phi_2} & \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \Phi_3} & \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \Phi_4} & \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \Phi_5} & \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \Phi_6} \\ \frac{\partial x_{20}}{\partial \Phi_1} & \frac{\partial x_{20}}{\partial \Phi_2} & \frac{\partial x_{20}}{\partial \Phi_3} & \frac{\partial x_{20}}{\partial \Phi_4} & \frac{\partial x_{20}}{\partial \Phi_5} & \frac{\partial x_{20}}{\partial \Phi_6} \\ \frac{\partial y_{20}}{\partial \Phi_1} & \frac{\partial y_{20}}{\partial \Phi_2} & \frac{\partial y_{20}}{\partial \Phi_3} & \frac{\partial y_{20}}{\partial \Phi_4} & \frac{\partial y_{20}}{\partial \Phi_5} & \frac{\partial y_{20}}{\partial \Phi_6} \\ \frac{\partial \phi_{20}}{\partial \Phi_1} & \frac{\partial \phi_{20}}{\partial \Phi_2} & \frac{\partial \phi_{20}}{\partial \Phi_3} & \frac{\partial \phi_{20}}{\partial \Phi_4} & \frac{\partial \phi_{20}}{\partial \Phi_5} & \frac{\partial \phi_{20}}{\partial \Phi_6} \\ \frac{\partial y_{30}}{\partial \Phi_1} & \frac{\partial y_{30}}{\partial \Phi_2} & \frac{\partial y_{30}}{\partial \Phi_3} & \frac{\partial y_{30}}{\partial \Phi_4} & \frac{\partial y_{30}}{\partial \Phi_5} & \frac{\partial y_{30}}{\partial \Phi_6} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Учитывая нулевые значения коэффициентов при неопределённых множителях, запишем:

$$[T]_{7 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{10}} & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial y_{10}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_{10}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_{10}} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_{10}} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi_{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{20}} & 0 & \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_{20}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial y_{20}} & 0 & \frac{\partial \Phi_6}{\partial y_{20}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_{20}} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi_{20}} & \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varphi_{20}} & \frac{\partial \Phi_6}{\partial \varphi_{20}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_6}{\partial y_{30}} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Каждый столбец матрицы $[T]$ коэффициентов при неопределённых множителях соответствует своей функции связи. Ненулевые элементы первых двух столбцов матрицы (15) равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{10}} = 1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{10}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_{10}} = -r_{11} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{11}), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{10}} = 1, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{10}} = -2 \cdot A \cdot [x_{10} + r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12}) + d], \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_{10}} = r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12}) + \frac{\partial \eta(u)}{\partial u} \cdot r_{12} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{12}) = r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12}) + \\ + 2 \cdot A \cdot [x_{10} + r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12}) + d] \cdot r_{12} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{12}). \end{array} \right. \quad (16)$$

Ненулевые элементы 3-го и 4-го столбцов матрицы (15):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{10}} = 1, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_{10}} = -r_{13} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{13}), \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{20}} = -1, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_{20}} = r_{23} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{23}), \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial y_{10}} = 1, \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi_{10}} = r_{13} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{13}), \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial y_{20}} = -1, \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi_{20}} = -r_{23} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{23}). \end{array} \right. \quad (17)$$

Ненулевые элементы 5-го и 6-го столбцов матрицы (15):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_{20}} = 1, & \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varphi_{20}} = -r_{24} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{24}), \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial y_{20}} = 1, & \frac{\partial \Phi_6}{\partial \varphi_{10}} = r_{24} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{24}), & \frac{\partial \Phi_6}{\partial y_{30}} = -1. \end{cases} \quad (18)$$

Элементы вектора $\{U\}_{6 \times 1}$ равны:

$$U_1 = r_{11} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{11}) \cdot \dot{\varphi}_{10}^2. \quad (19)$$

$$U_2 = 2 \cdot A \cdot [\dot{x}_{10} - r_{12} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{12}) \cdot \dot{\varphi}_{10}]^2 + r_{12} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{12}) \cdot \dot{\varphi}_{10}^2 - \\ - 2 \cdot A \cdot [x_{10} + r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12}) + d] \cdot r_{12} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{12}) \cdot \dot{\varphi}_{10}^2. \quad (20)$$

$$U_3 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_{10}} \right) \cdot \dot{\varphi}_{10} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_{20}} \right) \cdot \dot{\varphi}_{20} = \\ = r_{13} \cdot \cos(\varphi_{10} + \varphi_{13}) \cdot \dot{\varphi}_{10}^2 - r_{23} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{23}) \cdot \dot{\varphi}_{20}^2. \quad (21)$$

$$U_4 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi_{10}} \right) \cdot \dot{\varphi}_{10} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi_{20}} \right) \cdot \dot{\varphi}_{20} = \\ = r_{13} \cdot \sin(\varphi_{10} + \varphi_{13}) \cdot \dot{\varphi}_{10}^2 - r_{23} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{23}) \cdot \dot{\varphi}_{20}^2. \quad (22)$$

$$U_5 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_5}{\partial \varphi_{20}} \right) \cdot \dot{\varphi}_{20} = r_{24} \cdot \cos(\varphi_{20} + \varphi_{24}) \cdot \dot{\varphi}_{20}^2. \quad (23)$$

$$U_6 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_6}{\partial \varphi_{20}} \right) \cdot \dot{\varphi}_{20} = r_{24} \cdot \sin(\varphi_{20} + \varphi_{24}) \cdot \dot{\varphi}_{20}^2. \quad (24)$$

Заметим, что

$$\{U\}_{6 \times 1} = -[\dot{T}]_{6 \times 7}^T \cdot \{\dot{X}\}_{7 \times 1}, \quad (25)$$

где $[\dot{T}]_{7 \times 6}$ – матрица, полученная дифференцированием всех элементов матрицы (15) по времени.

Система (8) представляет собой систему из 13-ти обыкновенных дифференциальных уравнений с 13-ю неизвестными функциями времени. Задав начальные условия, можно проинтегрировать эту систему любым из подходящих численных методов [6]: линейного ускорения, центральных разностей, Хоболта, Ньюмарка и т. п. на любом отрезке времени.

Анализируя результаты настоящего исследования, можно отметить, что представленная математическая модель позволяет определять параметры движения звеньев механизма (в частности, грейферного) на любом отрезке времени. Основу методики составляет учёт ограничений (уравнений связи) с помощью неопределённых множителей Лагранжа. Матричный вид уравнений (8) позволяет формализовать процесс составления уравнений движения для ЭВМ, например, – на основе метода конечных элементов. Недостатком такого подхода, бесспорно, является объёмность решения задачи: для механизма с одной степенью свободы пришлось записать 13 дифференциальных уравнений. Но сегодня для ЭВМ это уже не является существенным ограничением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
2. *Таубер Б. А.* Грейферные механизмы. – М.: Машиностроение, 1967. – 430 с.
3. *Расчёт и проектирование строительных и дорожных машин на ЭВМ* / Под ред. Е. Ю. Малиновского. – М.: Машиностроение, 1980. – 216 с.
4. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
5. *Аппель П.* Теоретическая механика: Т. 2. Динамика системы, аналитическая механика / Пер. с франц. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1960. – 487 с.
6. *Бате К. Ю., Вилсон Э.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982.

Получено 17.01.06

MATHEMATICAL MODEL OF GRAB BUCKET MOTION

I. V. Mikhailov

Plane motion of grab bucket when scooping bulk cargo has been demonstrated using hypotheses about hardened excavation and parabolic shape of scooping curve. Differential equations for grab bucket motion have been made regarding equations of connection and Lagrange's indefinite multipliers, grab bucket being considered as a mechanism with absolutely rigid segments. The structure of defining system for differential equations is reduced to matrix form useful for computation. There has been shown formalized nature of the method which helps both to automate the solution of the system of differential equations of motion and to automate making the system itself.