

УДК 539.3

С.В. Филипковский, К.В. Аврамов

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

КОЛЕБАНИЯ РОТОРОВ НА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПорах

Получена модель колебаний несимметричного однодискового ротора на двух подшипниках с кубической нелинейностью опор. Учтены гироскопические моменты диска, упругие свойства и распределенная масса вала. Математическая модель колебаний ротора сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для анализа полученной системы применяется метод нелинейных нормальных форм Шу-Пьерра. Получены формы колебаний вала с диском и фазовые траектории систем, построены скелетные кривые нелинейных колебаний ротора.

Ключевые слова: ротор, нелинейные опоры, метод нелинейных нормальных форм, фазовые траектории, скелетные кривые.

Введение

Многие приборы и агрегаты летательных аппаратов содержат быстровращающиеся роторы. Опоры этих роторов, как правило, являются нелинейными. Требование снижения веса и вибрации этих устройств приводит к необходимости повышения точности расчета амплитудно-частотных характеристик в различных режимах эксплуатации.

Поперечные колебания валов с дисками в линейной постановке с учетом гироскопических моментов, внешнего и внутреннего трения исследовано Ф.М. Диментбергом [1]. А.П. Филиппов анализировал нестационарные колебания на нелинейном упругом основании [2]. Различные модели вибрации роторов рассмотрены в книге [3]. Е.Г. Голоскоков исследовал квазипериодическое движение ротора [4]. Нелинейные нормальные формы колебаний вращающегося вала в подшипниках скольжения исследованы в статье [5]. К.В. Аврамовым и К. Пьерром применен метод нелинейных нормальных форм к исследованию колебаний систем с гироскопическими силами [6].

Целью настоящей работы является исследование динамики упругого ротора с диском на нелинейных опорах.

1. Уравнения движения системы

Расчетная схема ротора представлена на рис. 1. Начало координат помещаем в сечении опоры А. Длина вала — l , расстояние от опоры А до диска — l_1 . Перемещения сечений вала по направлениям координатных осей обозначим u_x, u_y . Углы поворота сечения вала обозначены $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Угловые скорости сечений вала представим так:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \\ \omega_y &= \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, \\ \omega_z &= \dot{\theta}_3 + \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые скорости относительно осей x, y, z .

Угловая скорость ротора равна

$$\omega = \omega_z. \quad (2)$$

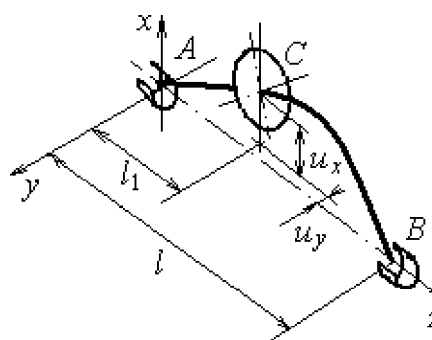


Рис. 1. Расчетная схема ротора

Зависимости углов поворота от прогибов вала представим так:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \theta_2 &= \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

Кинетическую энергию вала T_B представим так:

$$T_B = \frac{\rho I}{2} \left[\int_0^l (\dot{u}'_x)^2 dz + \int_0^l (\dot{u}'_y)^2 dz \right] + \rho I \omega^2 l - 2\rho I \omega \int_0^l \dot{u}'_x \dot{u}'_y dz + \frac{\rho S}{2} \int_0^l [(\dot{u}_x)^2 + (\dot{u}_y)^2] dz, \quad (4)$$

где ρ – плотность материала вала,
 I – момент инерции сечения вала,
 S – площадь сечения вала.

Кинетическая энергия диска T_D запишется так:

$$T_D = \frac{I_1}{2} \left[(\dot{u}'_x)_{z=l_1}^2 + (\dot{u}'_y)_{z=l_1}^2 \right] + \frac{I_0}{2} \omega^2 - I_0 \omega (\dot{u}'_x)_{z=l_1} (\dot{u}'_y)_{z=l_1} + \frac{m_0}{2} \left[(\dot{u}_x)_{z=l_1}^2 + (\dot{u}_y)_{z=l_1}^2 \right], \quad (5)$$

где I_1 – экваториальный момент инерции диска,
 I_0 – полярный момент инерции диска,
 m_0 – масса диска.

Потенциальная энергия вала Π_B запишется так:

$$\Pi_B = \frac{EI}{2} \int_0^l [(u''_x)^2 + (u''_y)^2] dz, \quad (6)$$

где E – модуль упругости материала вала.

Примем, что реакции опор имеют кубическую нелинейность:

$$\begin{aligned} R_{x1} &= K_1 u_{x1} + K_3 u_{x1}^3, \\ R_{y1} &= K_1 u_{y1} + K_3 u_{y1}^3, \\ R_{x2} &= K_1 u_{x2} + K_3 u_{x2}^3, \\ R_{y2} &= K_1 u_{y2} + K_3 u_{y2}^3, \end{aligned} \quad (7)$$

где R_{x1} , R_{y1} , R_{x2} , R_{y2} – проекции сил на оси x , y в первой и второй опорах,

K_1 , K_3 – коэффициенты жесткости опор. Тогда потенциальная энергия деформации подшипников Π_{Π} запишется так:

$$\Pi_{\Pi} = \frac{K_1}{2} (u_{x1}^2 + u_{y1}^2 + u_{x2}^2 + u_{y2}^2) + \frac{K_3}{4} (u_{x1}^4 + u_{y1}^4 + u_{x2}^4 + u_{y2}^4). \quad (8)$$

Демпфирование опор имеет кубическую нелинейность. Тогда диссипативная функция Φ запишется так:

$$\Phi = \frac{C_1}{2} (\dot{u}_{x1}^2 + \dot{u}_{y1}^2 + \dot{u}_{x2}^2 + \dot{u}_{y2}^2) + \frac{C_3}{4} (\dot{u}_{x1}^4 + \dot{u}_{y1}^4 + \dot{u}_{x2}^4 + \dot{u}_{y2}^4), \quad (9)$$

где C_1 , C_3 – коэффициенты демпфирования. Определим перемещения вала так [5]:

$$\begin{aligned} u_x(z, t) &= \sum_{n=1}^N U_{x,n}(t) \sin \frac{n\pi z}{l} + \\ &+ U_{x,N+1}(t) \frac{z}{l} + U_{x,N+2}(t) \frac{l-z}{l} \\ u_y(z, t) &= \sum_{n=1}^N U_{y,n}(t) \sin \frac{n\pi z}{l} + \\ U_{y,N+1}(t) \frac{z}{l} + U_{y,N+2}(t) \frac{l-z}{l}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $U_{x,n}(t)$, $U_{y,n}(t)$ – обобщенные координаты,
 N – количество координатных функций вала,

$N+1$, $N+2$ – номера функций, соответствующие перемещениям опор. Соотношения (10) вводим в кинетическую и потенциальную энергии. В результате кинетическая и потенциальная энергии станут функциями обобщенных координат и скоростей:

$$\begin{aligned} T &= T_B + T_D = T(\dot{U}_{x,1}, \dots, \dot{U}_{x,N+2}, \dot{U}_{y,1}, \dots, \dot{U}_{y,N+2}) \\ \Pi &= \Pi_B + \Pi_{\Pi} = \Pi(U_{x,1}, \dots, U_{x,N+2}, U_{y,1}, \dots, U_{y,N+2}). \end{aligned} \quad (11)$$

Составим уравнение движения в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате получим:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [\tilde{K}]\{U^3\} + [\tilde{C}]\{\dot{U}^3\} = 0, \quad (12)$$

где $[K]$ и $[\tilde{K}]$ – матрицы жесткости,

$[G]$ – гироскопическая матрица,

$[C]$ и $[\tilde{C}]$ – матрицы демпфирования,

$[M]$ – матрица масс,

$\{U\}$ – вектор перемещений.

Коэффициенты матриц имеют следующий вид (нечетные индексы относятся к перемещениям по оси x , четные – по оси y , $n = 1, \dots, N$; $m = 1, \dots, N$):

$$K_{2n-1,2n-1} = K_{2n,2n} = \frac{EIn^2\pi^4}{2l^3}, \quad (13a)$$

$$K_{2N+1,2N+1} = K_{2N+2,2N+2} = K_{2N+3,2N+3} = K_{2N+4,2N+4} = K_1, \quad (13б)$$

$$\tilde{K}_{2N+1,2N+1} = \tilde{K}_{2N+2,2N+2} = \tilde{K}_{2N+3,2N+3} = \tilde{K}_{2N+4,2N+4} = K_3, \quad (13в)$$

$$G_{2n,2m-1} = \frac{I_0\omega n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n\pi l_1}{l} \cos \frac{m\pi l_1}{l}, \quad n \neq m, \quad (13r)$$

$$G_{2n,2n-1} = \frac{\rho I \omega n^2 \pi^2}{l} + \frac{I_0 \omega n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n\pi l_1}{l}, \quad (13д)$$

$$G_{2n-1,2m} = -G_{2n,2m-1},$$

$$G_{2N+1,2m} = G_{2N+4,2m-1} = G_{2n-1,2N+2} = G_{2n,2N+3} = \frac{I_0 \omega m \pi}{l^2} \cos \frac{m\pi l_1}{l}, \quad (13e)$$

$$G_{2N+2,2m-1} = G_{2N+3,2m} = G_{2n,2N+1} = G_{2n-1,2N+4} = -G_{2N+1,2m},$$

$$G_{2N+1,2N+2} = G_{2N+2,2N+3} = G_{2N+4,2N+1} = G_{2N+3,2N+4} = \frac{2\rho I \omega}{l} + \frac{I_0 \omega}{l^2} \quad (13ж)$$

$$G_{2N+2,2N+1} = G_{2N+3,2N+1} = G_{2N+4,2N+3} = G_{2N+1,2N+4} = -G_{2N+1,2N+2},$$

$$C_{2N+1,2N+1} = C_{2N+2,2N+2} = C_{2N+3,2N+3} = C_{2N+4,2N+4} = C_1, \quad (13з)$$

$$\tilde{C}_{2N+1,2N+1} = \tilde{C}_{2N+2,2N+2} = \tilde{C}_{2N+3,2N+3} = \tilde{C}_{2N+4,2N+4} = \tilde{C}_3, \quad (13и)$$

$$M_{2n-1,2m-1} = M_{2n,2m} = m_0 \sin \frac{n\pi l_1}{l} \sin \frac{m\pi l_1}{l} + \frac{I_1 n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n\pi l_1}{l} \cos \frac{m\pi l_1}{l}, \quad n \neq m, \quad (13к)$$

$$M_{2n-1,2m-1} = M_{2n,2m} = \frac{\rho S l}{2} + \frac{n^2 \pi^2 \rho I}{2l} + \frac{I_1 n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n\pi l_1}{l}, \quad n = m, \quad (13л)$$

$$M_{2N+1,2m-1} = M_{2N+2,2m} = M_{2m-1,2N+1} = M_{2m,2N+2} = \frac{-\rho S l (-1)^m}{m\pi} + \frac{m_0 l_1}{l} \sin \frac{m\pi l_1}{l} + \frac{I_1 m \pi}{l^2} \cos \frac{m\pi l_1}{l}, \quad (13м)$$

$$M_{2N+1,2N+1} = M_{2N+2,2N+2} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{l} + \frac{m_0 l_1^2}{l^2} + \frac{I_1}{l^2}, \quad (13н)$$

$$M_{2N+1,2N+3} = M_{2N+2,2N+4} = M_{2N+3,2N+1} = M_{2N+4,2N+2} = \frac{\rho S l}{3} - \frac{\rho I}{l} + \frac{m_0 (l-l_1) l_1}{l^2} - \frac{I_1}{l^2}, \quad (13о)$$

$$M_{2N+3,2N+3} = M_{2N+4,2N+4} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{l} + \frac{m_0 (l-l_1)^2}{l^2} + \frac{I_1}{l^2}, \quad (13п)$$

Остальные коэффициенты матриц равны нулю.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[K] &= [\bar{K}] \\ [M]^{-1}[\tilde{K}] &= [\hat{K}] \\ [M]^{-1}([G]+[C]) &= [\bar{C}], \quad (14) \\ [M]^{-1}[\tilde{C}] &= [\hat{C}] \end{aligned}$$

тогда (12) примет вид:

$$\{\ddot{U}\} + [\bar{C}]\{\dot{U}\} + [\bar{K}]\{U\} + [\hat{K}]\{U^3\} + [\hat{C}]\{\dot{U}^3\} = 0. \quad (15)$$

2. Нелинейные формы колебаний

Нелинейные нормальные формы (ННФ) являются эффективным методом решения задач нелинейной динамики. Основа этого метода заключается в том, что система N нелинейных дифференциальных уравнений заменяется одним уравнением.

Принимаем, что при движении по ННФ обобщенные координаты изменяются синхронно. Тогда все фазовые координаты можно выразить через одну, выбранную произвольно, пару фазовых координат [7]: p – это перемещение и $q = \dot{p}$ – это скорость. ННФ представим так:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [\gamma] \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

где $V = \dot{U}$ – обобщенные скорости,

$[\gamma]$ – матрица коэффициентов разложения перемещений и скоростей в степенной ряд по фазовым координатам:

$$p_n(p, q) = \gamma_{n,1}p + \gamma_{n,2}q + \gamma_{n,3}p^2 + \gamma_{n,4}pq + \gamma_{n,5}q^2 + \gamma_{n,6}p^3 + \gamma_{n,7}p^2q + \gamma_{n,8}pq^2 + \gamma_{n,9}q^3, \quad (17a)$$

$$q_n(p, q) = \gamma_{2N+4+n,1}p + \gamma_{2N+4+n,2}q + \gamma_{2N+4+n,3}p^2 + \gamma_{2N+4+n,4}pq + \gamma_{2N+4+n,5}q^2 + \gamma_{2N+4+n,6}p^3 + \gamma_{2N+4+n,7}p^2q + \gamma_{2N+4+n,8}pq^2 + \gamma_{2N+4+n,9}q^3, \quad (17b)$$

где $n=1, \dots, 2N+4$ – номера степеней свободы.

Коэффициенты линейной части (15) определяются так [7]:

$$\gamma_{n,1} = \frac{\zeta_n \delta_{2N+5} - \varsigma_{2N+5} \delta_n}{\varsigma_1 \delta_{2N+5} - \varsigma_{2N+5} \delta_1}, \quad \gamma_{n,2} = \frac{\varsigma_1 \delta_n - \zeta_n \delta_1}{\varsigma_1 \delta_{2N+5} - \varsigma_{2N+5} \delta_1}, \quad (18)$$

где ζ и δ – действительная и мнимая части собственных векторов линейной части системы (15), $n = 1, \dots, 2N+4$. Продифференцировав (17) получим:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n(p, q) &= \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}, \\ \dot{q}_n(p, q) &= \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}, \end{aligned} \quad (19)$$

обозначим

$$\begin{aligned} \{\dot{q}_j\} &= -[\bar{C}]\{q_j\} - [\hat{C}]\{q_j^3\} - [\bar{K}]\{p_j\} - [\hat{K}]\{p_j^3\} = \\ &= \{W_j(\{p_j\}, \{q_j\})\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где j – номер формы. Подставив (20) в (19) получим:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{j,n} &= q_{j,n} = \frac{\partial p_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,1} + \frac{\partial p_{j,n}}{\partial q_{j,1}} W_{j,1}(p_{j,1}, q_{j,1}) \\ \dot{q}_{j,n} &= W_{j,n}(p_{j,1}, q_{j,1}) = \frac{\partial q_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,1} + \\ &+ \frac{\partial q_{j,n}}{\partial q_{j,1}} W_{j,1}(p_{j,1}, q_{j,1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $p^u q^v$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов матрицы $[\gamma]$. В результате решения этой системы получаем ННФ.

Полученную ННФ (17) вводим в первое уравнение системы (20). В результате получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее движение по ННФ:

$$\dot{q} + B_1 q + B_2 p + B_3 p^3 + B_4 p^2 q + B_5 p q^2 + B_6 q^3 = 0, \quad (22)$$

$$B_1 = \bar{C}_{11} + \sum_{n=2}^J \bar{C}_{1n} \gamma_{J+n,2} + \sum_{n=2}^J \bar{K}_{1n} \gamma_{J,2},$$

$$B_2 = \bar{K}_{11} + \sum_{n=2}^J \bar{C}_{1n} \gamma_{J+n,1} + \sum_{n=2}^J \bar{K}_{1n} \gamma_{J,1},$$

$$B_3 = \hat{K}_{11} + \sum_{n=2}^J \hat{K}_{1n} \gamma_{n,1}^3 + \sum_{n=2}^J \bar{K}_{1n} \gamma_{n,6} + \sum_{n=2}^J \hat{C}_{1n} \gamma_{N+n,1}^3 + \sum_{n=2}^J \bar{C}_{1n} \gamma_{J+n,6},$$

$$B_4 = \sum_{n=2}^J 3 \hat{K}_{1n} \gamma_{n,1}^2 \gamma_{n,2} + \sum_{n=2}^J \bar{K}_{1n} \gamma_{n,7} + \sum_{n=2}^J 3 \hat{C}_{1n} \gamma_{J+n,1}^2 \gamma_{J+n,2} + \sum_{n=2}^J \bar{C}_{1n} \gamma_{J+n,7},$$

$$B_5 = \sum_{n=2}^J 3 \hat{K}_{1n} \gamma_{n,1} \gamma_{n,2}^2 + \sum_{n=2}^J \bar{K}_{1n} \gamma_{n,8} + \sum_{n=2}^J 3 \hat{C}_{1n} \gamma_{J+n,1} \gamma_{J+n,2}^2 + \sum_{n=2}^J \bar{C}_{1n} \gamma_{J+n,8},$$

$$B_6 = \hat{C}_{11} + \sum_{n=2}^J \hat{K}_{1n} \gamma_{n,2}^3 + \sum_{n=2}^J \bar{K}_{1n} \gamma_{n,9} + \sum_{n=2}^J \hat{C}_{1n} \gamma_{N+n,2}^3 + \sum_{n=2}^J \bar{C}_{1n} \gamma_{J+n,9}. \quad (23)$$

Поскольку мы приняли кубическую нелинейность квадратичные члены в (22) отсутствуют.

2. Численный анализ колебаний

На рис. 2 и 3 показаны ННФ колебаний ротора на нелинейных опорах со следующими параметрами $l = 1$ м, $l_1 = 0,25$ м, диаметр вала $d = 0,02$ м, $m_0 = 10$ кг, $I_1 = 0,1$ кг·м², $I_0 = 0,2$ кг·м², $\omega = 628,3$ рад/с. Коэффициенты жесткости и демпфирования опор: $K_1 = 100$ Н/м, $K_3 = 10$ Н/м³, $C_1 = 10$ Н·с/м, $C_3 = 1$ Н·с³/м³.

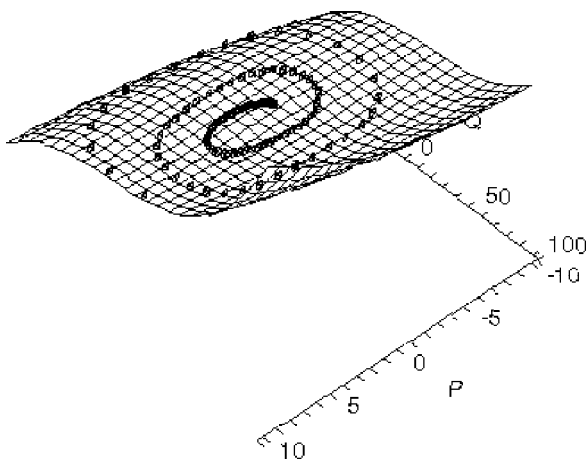


Рис. 2. ННФ с линейным демпфированием

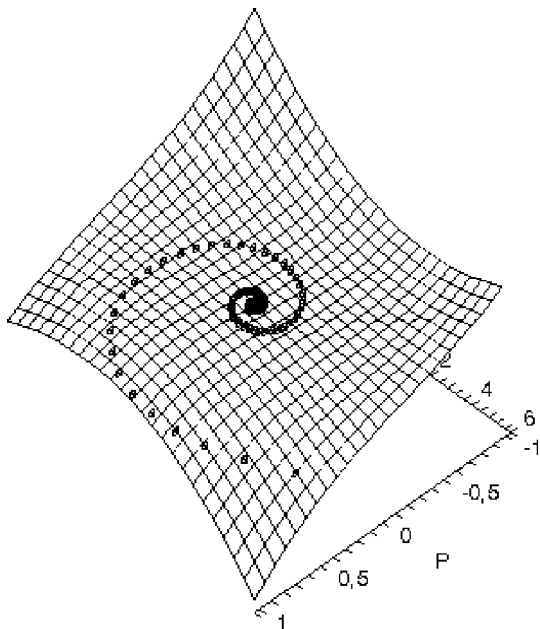


Рис. 3. ННФ с нелинейным демпфированием

Проверка правильности построения ННФ выполнена численным интегрированием полной системы уравнений движения (19) при задании начальной точки фазой траектории на поверхности нормальной моды. Фазовые траектории на ННФ показаны точечными линиями на рис. 2 и 3.

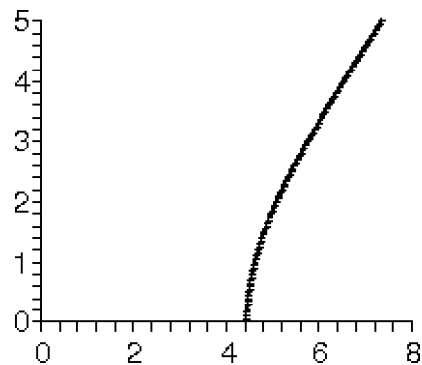


Рис. 4. Скелетная кривая жесткого вала

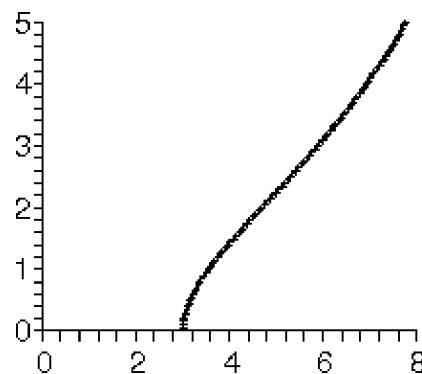


Рис. 5. Скелетная кривая упругого вала

Для исследования амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) этих колебаний применен метод гармонического баланса [8]. На рис. 5 и рис. 6 показаны скелетные кривые, соответственно, без учета и с учетом жесткости и распределенной массы вала.

Влияние вала заключается в снижении жесткости и резонансных частот системы.

Заключение

Разработана методика исследования нелинейных колебаний упругого ротора с распределенной массой и диском на нелинейных опорах. Построены нелинейные нормальные формы и фазовые траектории системы при линейном и нелинейном демпфировании. Исследовано влияние демпфирования на динамическое поведение системы. Исследованы скелетные кривые системы с учетом распределенной массы вала и построены скелетные кривые систем с жестким и с упругим ротором на нелинейных опорах.

Литература

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М.Диментберг. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.

2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П.Филиппов. – М.: Машиностроение. – 1970. – 734 с.

3. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов / А.Тондл. – Л.: Энергия. – 1971. – 388 с.

4. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г.Голоскоков, А.П.Филиппов. – Киев: Наук. думка. – 1977. – 340 с.

5. Nonlinear Normal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method / M.Legrand, D.Jiang, C.Pierre, S.W.Shaw // International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – Vol.10, №4. – P. 319–335.

6. Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами /

К.В.Аврамов, К.Пьерр, Н.С.Ширяева // Доповіди Національної Академії Наук України. – 2006. – №1. – С. 7 - 10.

7. Normal modes for nonlinear vibratory systems / S.W.Shaw, C.Pierre // J. Sound and Vibr. – 1993. – №164. – P. 85–124.

8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т.Хаяси. – М.: Мир. – 1968. – 432 с.

Поступила в редакцию 31.05.2009 г.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., декан инженерно-физического факультета Д.В. Бреславский, Харьковский национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

Отримано модель коливань несиметричного однодискового ротора на двох підшипниках з кубічною нелінійністю опор. Враховано гіроскопічні моменти диска, пружні властивості й розподілена маса вала. Математична модель коливань ротора зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для аналізу отриманої системи застосовується метод нелінійних нормальних форм Шоу-П'єра. Отримано форми коливань вала з диском і фазові траєкторії систем, побудовано кістякові криві нелінійних коливань ротора.

Ключові слова: ротор, нелінійні опори, метод нелінійних нормальних форм, фазові траєкторії, кістякові криві.

The model of oscillations of an asymmetrical single-disk rotor on two bearings with cubic nonlinearity of a rigidity and damping is obtained. Gyroscopic torques, elasticity and the allocated mass of the shaft are taken into account. This model is reduced to a system of ordinary differential second-kind equations. To research of a system the method of nonlinear normal modes of Shaw and Pierre is applied. The modes of road with disk oscillations and phase paths are obtained. The skeletal curves of nonlinear oscillations of a rotor are constructed.

Key words: rotor, nonlinear bearings, nonlinear normal modes method, phase pathes, skeletal curves.