

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ПРУЖНОЇ ОСІ БАЛКИ

І.В. Павленко, асистент,
Сумський державний університет

У статті подано спосіб розв'язання нелінійного рівняння пружної осі балки, на базі якого отримані залежності для розрахунку балок на згинальну жорсткість для значних прогинів. Запропонований альтернативний спосіб розрахунку, який ґрунтується на застосуванні ряду Маклорена. Введені кількісні показники, що розмежовують сферу застосування нелінійного і лінеаризованого рівнянь.

Ключові слова: прогин, девіація, жорсткість, балка, рівняння.

В статтє представлен способ решения нелинейного уравнения упругой оси балки, на основе которого получены зависимости для расчёта балок на изгибную жёсткость для существенных прогибов. Предложен альтернативный способ расчёта, который основан на использовании ряда Маклорена. Введены количественные показатели, разделяющие сферу применения нелинейного и линеаризованного уравнений.

Ключевые слова: прогиб, девиация, жёсткость, балка, уравнение.

ВСТУП

При проектних розрахунках машинобудівельних споруд суттєву роль відіграє розрахунок на жорсткість, завданням якого є обмеження переміщень елементів конструкцій залежно від умов їх роботи [1, с. 475]. Оскільки велику кількість споруд, які застосовуються у машинобудівній галузі, займають прямолінійні та криволінійні стрижні, що працюють на згин, то проблема їх точного розрахунку на жорсткість є актуальною.

При чистому вигині прямого бруса в площині головної жорсткості кривизна $1/\rho$ зігнутої осі балки – пружної лінії – пов'язана зі згинальним моментом таким співвідношенням [2, с. 216 – 217] (рис. 1):

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI(x)}, \quad (1)$$

де $\rho(x)$ – радіус кривизни осі у нормальному перерізі з координатою x ;

$M(x)$ – згинальний момент як внутрішній інтегральний силовий фактор;

$EI(x)$ – жорсткість балки на згин як добуток модуля пружності першого роду матеріалу балки E і моменту інерції I поперечного перерізу щодо головної центральної осі z перерізу, перпендикулярної до площини дії згинального моменту [1, с. 476].

Радіус кривизни плоскої кривої – осі балки – визначається як

$$\rho(x) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2}, \quad (2)$$

де $y(x)$ – функція прогину осі. Відповідно до залежностей (1) і (2) задача про вигин зводиться до розв’язання нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (3)$$

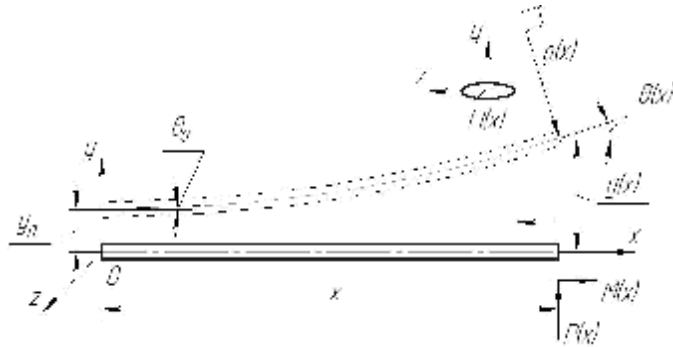


Рисунок 1 – Розрахункова схема задачі про вигин балки

У випадку малих деформацій, коли максимальний прогин у 100-1000 разів менший за довжину балки, а максимальний кут оберту не перевищує 1° , останнє рівняння потрібно розв’язувати у лінеаризованому вигляді [2, с. 230], тобто для незначних значень девіацій $dy/dx \ll 1$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (4)$$

В історії розвитку технічних прийомів розрахунку переміщень шляхом застосування спрощеного диференціального рівняння пружної лінії гідне місце зайняли праці багатьох вчених. Так, Глушков Г.С. запропонував теорію моментів високого порядку; Подольський І.С. докладно виклав властивості загального рівняння пружної лінії; Снітко Н.К. запропонував застосовувати ряди Тейлора і Маклорена до розв’язання лінеаризованого рівняння (4) у загальному вигляді; Попов А.А. застосував метод трьох переміщень; Уманський А.А. запропонував застосовувати метод початкових параметрів [1, с. 479]; у роботі [3] запропоновано метод визначення переміщень у балках постійного перерізу шляхом безпосереднього інтегрування уточненого диференціального рівняння пружної лінії.

1. ТЕОРЕТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1. Розв’язання нелінійної задачі про вигин балки

Розглянемо загальний випадок нелінійного рівняння (3). Для його розв’язання введемо нову змінну – девіацію u як похідну від функції прогину за координатою x :

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (5)$$

Рівняння (3), таким чином, знижує порядок:

$$\frac{d\theta/dx}{(1+\theta^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (6)$$

Для його розв'язання введемо нову функцію $\varphi(x)$, пов'язану з девіацією:

$$\theta(x) = \operatorname{tg}\varphi(x). \quad (7)$$

Кут φ відображає геометричний зміст похідної dy/dx , оскільки є кутом між дотичною до зігнутої осі балки і додатним напрямом осі x . Так, рівняння (6) після тотожних перетворень набирає такого вигляду:

$$\cos\varphi \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (8)$$

Після розділення змінних проінтегруємо останнє рівняння, враховуючи початкову умову задачі (при $x = 0$: $\varphi = \varphi_0$ і $\theta = \theta_0$):

$$\sin\varphi(x) - \sin\varphi_0 = \int_0^x \frac{M(x)}{EI(x)} dx. \quad (9)$$

З урахуванням рівності (7) останнє рівняння запишемо у такому вигляді:

$$\frac{\theta(x)}{\sqrt{1+\theta^2(x)}} - \frac{\theta_0}{\sqrt{1+\theta_0^2}} = \int_0^x \frac{M(x)}{EI(x)} dx. \quad (10)$$

Введемо нове позначення

$$\bar{\theta}(x) = \int_0^x \frac{M(x)}{EI(x)} dx. \quad (11)$$

Функція $\bar{\theta}(x)$ є функцією девіації задачі про вигин консольної балки у лінійній постановці (рис. 3а). Виразимо функцію $\theta(x)$ з рівняння (10):

$$\theta(x) = \left[\bar{\theta}(x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{1+\theta_0^2}} \right] \left\{ 1 - \left[\bar{\theta}(x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{1+\theta_0^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2}. \quad (12)$$

Останнє рівняння дозволяє у загальному вигляді визначити девіацію осі балки за заданими навантаженням і геометрією нормального перерізу. У випадку вигину консольної балки ($\theta_0 = 0$) зі сталою по довжині жорсткістю на згин ($EI = \text{const}$), значення девіації у перерізі з координатою x

$$\theta(x) = \frac{\bar{\theta}(x)}{\sqrt{1 - \bar{\theta}^2(x)}}. \quad (13)$$

Аналіз двох останніх формул дає змогу стверджувати, що розгляд лінеаризованого рівняння (4) дає занижені значення девіації: $\bar{\theta} / \bar{\theta} < 1$. Функцію $\theta(x)$ (12) розкладемо у ряд Маклорена, утримуючи члени високого порядку малості:

$$\theta(x) = \tilde{\theta}(x) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^3(x), \quad (14)$$

де $\tilde{\theta}(x) = \theta_0 + \theta(x)$ – девіація, отримана шляхом розв’язання лінійного рівняння (4).

Для знаходження функції прогину проінтегруємо останнє рівняння з урахуванням граничної умови (при $x = 0$: $y = y_0$):

$$y(x) = y_0 + \int_0^x \theta(x) dx. \quad (15)$$

У загальному випадку, не вдаючись до розкладення в ряд Маклорена, функція прогину набирає такого вигляду:

$$y(x) = y_0 + \int_0^x \left[\bar{\theta}(x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{1 + \theta_0^2}} \right] \left\{ 1 - \left[\bar{\theta}(x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{1 + \theta_0^2}} \right]^2 \right\}^{-1/2} dx. \quad (16)$$

Остання залежність є загальним розв’язком нелінійного диференціального рівняння пружної осі й дозволяє визначати функцію прогину балки з довільним способом закріплення і силового навантаження.

1.2. Приклади розрахунків

Для консолі сталого поперечного перерізу при дії зосередженої сили P на вільному кінці згинальний момент M дорівнює [2, с. 231 – 232] (рис. 2 а):

$$M(x) = P \cdot (l - x), \quad (17)$$

де l – довжина балки.

Функція прогину і девіація для даного типу закріплення і навантаження при розв’язанні лінеаризованого рівняння (4) мають такий вигляд:

$$\tilde{y}(x) = \frac{Px^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right); \quad (18)$$

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{Px}{EI} \left(l - \frac{x}{2} \right). \quad (19)$$

Максимальні прогин і девіація у перерізі $x = l$ становлять:

$$\tilde{y}_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}; \quad (20)$$

$$\tilde{\theta}_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI}. \quad (21)$$

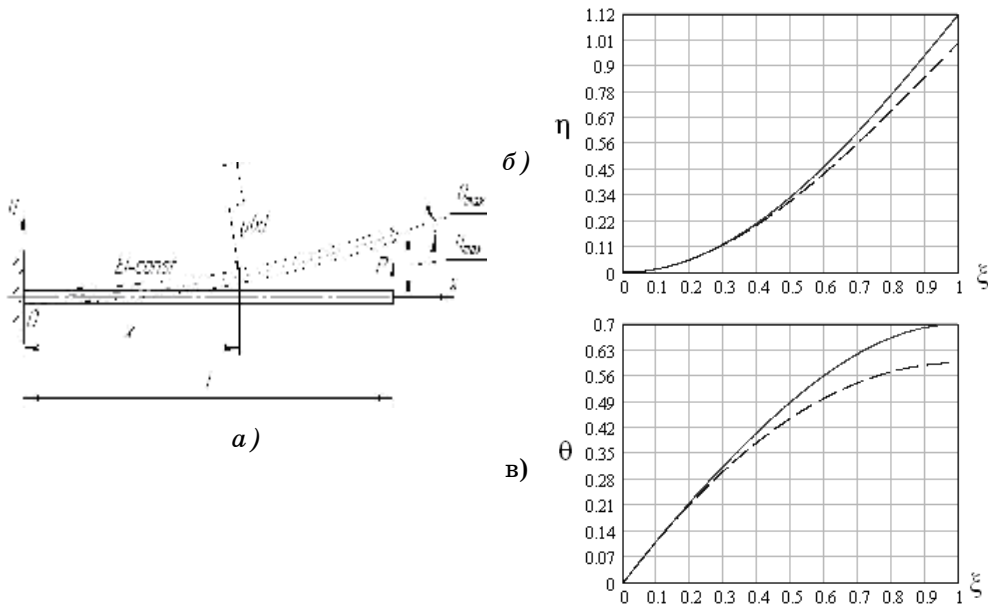


Рисунок 2 – Консольна балка, навантажена зосередженою силою:
 а) розрахункова схема; б) графіки переміщень; в) графіки девіацій:
 - - - - - наближений розв'язок ————— точний розв'язок

У разі розв'язання нелінійного рівняння пружної лінії (3) у результаті розкладання у ряд Маклорена (14) – (15) функція прогину і девіація з точністю до членів третього порядку малості мають такий вигляд:

$$y(x) = \frac{Px^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{Px}{EI} \left(l - \frac{x}{2} \right) \right]^3 dx; \quad (22)$$

$$\theta(x) = \frac{Px}{EI} \left(l - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{Px}{EI} \left(l - \frac{x}{2} \right) \right]^3; \quad (23)$$

їх максимальні значення при цьому становлять:

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{P^3 l^7}{35 (EI)^3}; \quad (24)$$

$$\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{P^3 l^6}{16 (EI)^3}. \quad (25)$$

Відносні відхилення отриманих значень y_{\max} і θ_{\max}

$$\delta_y = \frac{y_{\max} - \tilde{y}_{\max}}{\tilde{y}_{\max}}; \quad (26)$$

$$\delta_\theta = \frac{\theta_{\max} - \tilde{\theta}_{\max}}{\tilde{\theta}_{\max}} \quad (27)$$

за різними методиками становлять: $\delta_y = 0,34\tilde{\theta}_{\max}^2$; $\delta_\theta = 0,5\tilde{\theta}_{\max}^2$. Графіки переміщень і девіацій зручно будувати у безрозмірному вигляді, вводячи такі параметри: ξ – безрозмірна осьова координата, η , $\tilde{\eta}$ – безрозмірні прогини для точного і наближеного розв’язків, λ – безрозмірна стріла прогину. Формули переходу до введених безрозмірних параметрів такі:

$$\xi = x / l; \quad (28)$$

$$\eta = y / \tilde{y}_{\max}; \quad (29)$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{y} / \tilde{y}_{\max}; \quad (30)$$

$$\lambda = \tilde{y}_{\max} / l. \quad (31)$$

Функція прогину і девіація розраховуються за формулами (рис. 2 б-в):

$$\eta = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi) + \frac{27}{2}\lambda^2 \int_0^\xi \xi^3 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^3 d\xi; \quad (32)$$

$$\theta = \frac{3}{2}\lambda\xi(2-\xi) + \frac{27}{2}\lambda^3 \xi^3 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^3; \quad (33)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi); \quad (34)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{3}{2}\lambda\xi(2-\xi). \quad (35)$$

Для консолі сталого поперечного перерізу при дії на вільному кінці пари сил із моментом M_0 згинальний момент M дорівнює (рис. 3 а):

$$M(x) = M_0. \quad (36)$$

Функція прогину і девіація для даного навантаження при розв’язанні лінеаризованого рівняння (4) мають такий вигляд:

$$\tilde{y}(x) = \frac{M_0 x^2}{2EI}; \quad (37)$$

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{M_0 x}{EI}; \quad (38)$$

їх максимальні значення у перерізі $x = l$

$$\tilde{y}_{\max} = \frac{M_0 l^2}{2EI}; \quad (39)$$

$$\tilde{\theta}_{\max} = \frac{M_0 l}{EI}. \quad (40)$$

У разі розв'язання нелінійного рівняння пружної лінії (3) у результаті розкладання у ряд Маклорена (14) – (15) функція прогину і девіація з точністю до членів третього порядку малості

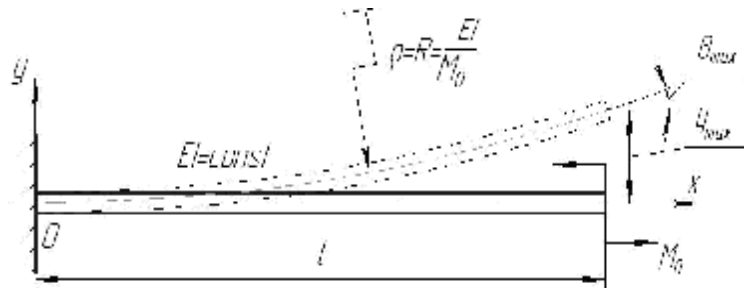
$$y(x) = \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{x}{8} \left(\frac{M_0 x}{EI} \right)^3; \quad (41)$$

$$\theta(x) = \frac{M_0 x}{EI} + \frac{1}{2} \left(\frac{M_0 x}{EI} \right)^3; \quad (42)$$

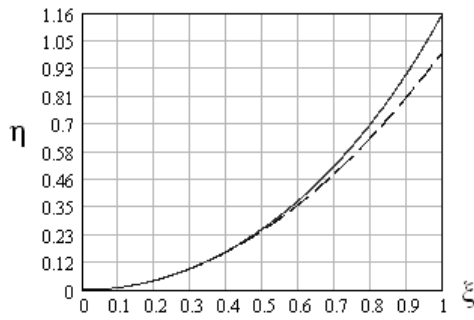
їх максимальні значення

$$y_{\max} = \frac{M_0 l^2}{2EI} + \frac{M_0^3 l^4}{8 (EI)^3}; \quad (43)$$

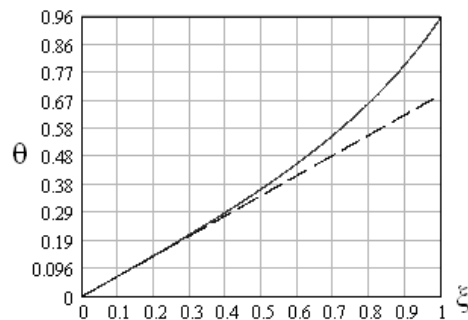
$$\theta_{\max} = \frac{M_0 l}{EI} + \frac{M_0^3 l^3}{2 (EI)^3}. \quad (44)$$



а)



б)



в)

Рисунок 3 – Консольна балка, навантажена парою сил:
а) розрахункова схема; б) графіки переміщень; в) графіки девіацій

----- наближений розв'язок

————— точний розв'язок

Відносні відхилення отриманих значень y_{max} і θ_{max} за різними методиками становлять: $\delta_y = 0,25\tilde{\theta}_{max}^2$; $\delta_\theta = 0,5\tilde{\theta}_{max}^2$. В результаті переходу до безрозмірних параметрів (28) – (31) отримуємо формули для прогину і девіації (рис. 3б-в):

$$\eta = \xi^2 + \lambda^2 \xi^4; \quad (45)$$

$$\theta = 2\lambda\xi + 4\lambda^3 \xi^3; \quad (46)$$

$$\tilde{\eta} = \xi^2; \quad (47)$$

$$\tilde{\theta} = 2\lambda\xi. \quad (48)$$

Для урахування дії на консоль сталого поперечного перерізу власної ваги згинальний момент (рис 4а)

$$M(x) = \frac{1}{2}q (l-x)^2, \quad (49)$$

де q – інтенсивність розподіленого навантаження від дії власної ваги балки.

Функція прогину і девіація для даного навантаження при розв’язанні лінеаризованого рівняння (4) мають такий вигляд:

$$\tilde{y}(x) = \frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2); \quad (50)$$

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{qx}{6EI} (x^2 - 3lx + 3l^2). \quad (51)$$

Максимальні значення у перерізі $x = l$ становлять

$$\tilde{y}_{max} = \frac{ql^4}{8EI}; \quad (52)$$

$$\tilde{\theta}_{max} = \frac{ql^3}{6EI}. \quad (53)$$

У разі розв’язання нелінійного рівняння пружної лінії (3) у результаті розкладання у ряд Маклорена (14) – (15) функція прогину і девіація з точністю до членів третього порядку малості

$$y(x) = \frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{qx}{6EI} (x^2 - 3lx + 3l^2) \right]^3 dx; \quad (54)$$

$$\theta(x) = \frac{qx}{6EI} (x^2 - 3lx + 3l^2) + \frac{1}{2} \left[\frac{qx}{6EI} (x^2 - 3lx + 3l^2) \right]^3; \quad (55)$$

їх максимальні значення

$$y_{max} = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{3q^3 l^{10}}{2240 (EI)^3}; \quad (56)$$

$$\theta_{max} = \frac{ql^3}{6EI} + \frac{q^3 l^9}{432 (EI)^3}. \quad (57)$$

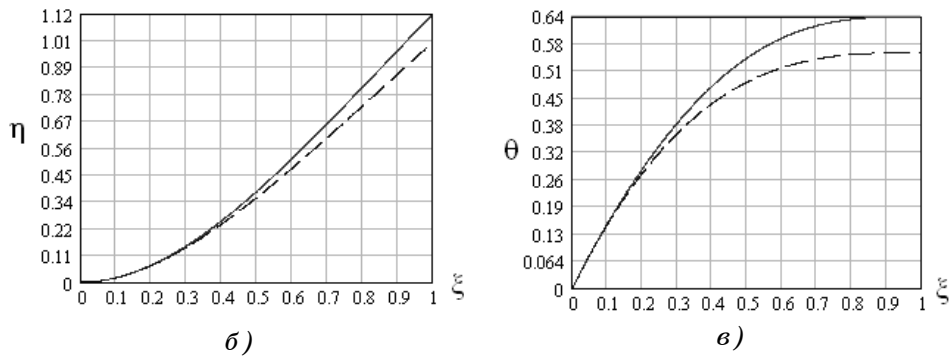
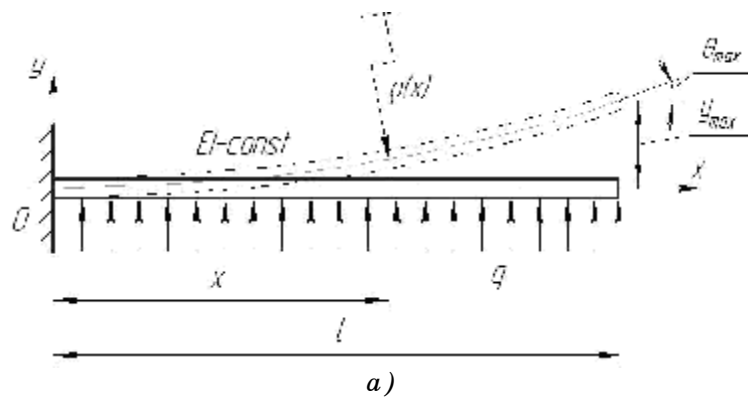


Рисунок 4 – Консольна балка, навантажена власною вагою:
 а) розрахункова схема; б) графіки переміщень; в) графіки девіацій

----- наближений розв'язок ————— точний розв'язок

Відносні відхилення отриманих значень y_{max} і θ_{max} за різними методиками становлять: $\delta_y = 0,39\tilde{\theta}_{max}^2$; $\delta_\theta = 0,5\tilde{\theta}_{max}^2$. В результаті переходу до безрозмірних параметрів (28) – (31) отримуємо такі формули для функції прогину і девіації (рис. 4 б-в):

$$\eta = \frac{1}{3}\xi^2(\xi^2 - 4\xi + 6) + \frac{32}{27}\lambda^2 \int_0^\xi \xi^3 (\xi^2 - 3\xi + 3)^3 d\xi; \quad (58)$$

$$\theta = \frac{4}{3}\lambda\xi(\xi^2 - 3\xi + 3) + \frac{32}{27}\lambda^3\xi^3(\xi^2 - 3\xi + 3)^3; \quad (59)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{3}\xi^2(\xi^2 - 4\xi + 6); \quad (60)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{4}{3}\lambda\xi(\xi^2 - 3\xi + 3). \quad (61)$$

1.3. Точне інтегрування нелінійного диференціального рівняння пружної осі

Для розрахункової схеми, наведеної на рис. 3 а, девіація (12) і прогин (16) мають вигляд

$$\theta(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{M_0}{EI}\right)^2 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}; \quad (62)$$

$$y(x) = \frac{EI}{M_0} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{M_0 x}{EI}\right)^2} \right] = R \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right], \quad (63)$$

де R – радіус кола з центром $(0, R)$ як точної форми прогину пружної лінії консольної балки. У безрозмірному вигляді останні дві формули набирають вигляду (рис. 3 б-в):

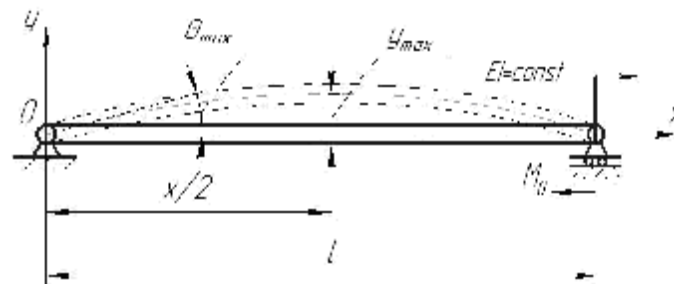
$$\theta = \frac{2\lambda\xi}{\sqrt{1 - 4\lambda^2\xi^2}}; \quad (64)$$

$$\eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda^2\xi^2}}{2\lambda^2}. \quad (65)$$

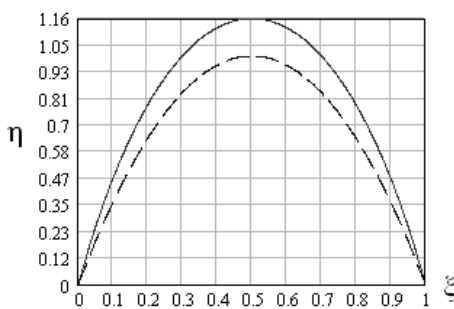
Необхідно зауважити, що знайти точний розв'язок для прогину осі балки у випадку розрахункових схем, наведених на рис. 2а і рис. 4а, неможливо, оскільки інтеграл (16) у цих випадках не інтегрується у квадратурах.

Розглянемо однопрогонову балку сталого поперечного перерізу (рис. 5а). При дії на вільному кінці пари сил із моментом M_0 згинальний момент

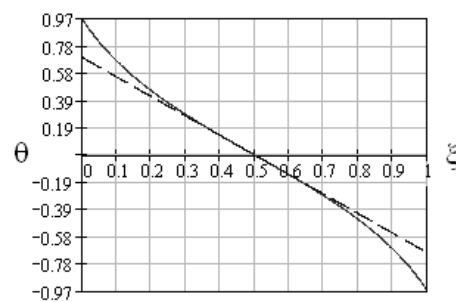
$$M(x) = -M_0. \quad (66)$$



а)



б)



в)

Рисунок 5 – Однопрогонова балка, навантажена парою сил:

а) розрахункова схема; б) графіки переміщень; в) графіки девіацій

— — — — — наближений розв'язок ————— точний розв'язок

Функція прогину і девіація для даного навантаження при розв'язанні нелінійного диференціального рівняння (3) у результаті застосування формул (12) і (16), а також із урахуванням граничних умов задачі й умови симетрії ($\theta(0) = -\theta(l)$; $\theta(l/2) = 0$; $y(0) = y(l) = 0$) мають такий вигляд:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{2EI}{M_0}\right)^2 - (l-2x)^2} - \sqrt{\left(\frac{2EI}{M_0}\right)^2 - l^2} \right]; \quad (67)$$

$$\theta(x) = \frac{M_0}{2EI} \cdot \frac{l-2x}{\sqrt{1 - \left(\frac{M_0}{2EI}\right)^2 (l-2x)^2}}. \quad (68)$$

Наближений розв'язок лінійного диференціального рівняння (4)

$$\tilde{y}(x) = \frac{M_0 x(l-x)}{2EI}; \quad (69)$$

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{M_0(l-2x)}{2EI}. \quad (70)$$

Максимальні значення наближених прогину і девіації у перерізах $x = l/2$ і $x = 0$ відповідно становлять:

$$\tilde{y}_{\max} = \frac{M_0 l^2}{8EI}; \quad (71)$$

$$\tilde{\theta}_{\max} = \frac{M_0 l}{2EI}. \quad (72)$$

Після переходу до безрозмірних параметрів (28) – (31) отримаємо (рис. 5 б-в):

$$\eta = \frac{\sqrt{1 - 16\lambda^2(1-2\xi)^2} - \sqrt{1 - 16\lambda^2}}{8\lambda^2}; \quad (73)$$

$$\theta = \frac{4\lambda(1-2\xi)}{\sqrt{1 - 16\lambda^2(1-2\xi)^2}}; \quad (74)$$

$$\tilde{\eta} = 4\xi(1-\xi); \quad (75)$$

$$\tilde{\theta} = 4\lambda(1-2\xi). \quad (76)$$

Відносні відхилення отриманих значень y_{\max} і θ_{\max} із застосування альтернативної до (26) формули

$$\delta_y = \eta_{\max} - 1 \quad (77)$$

становлять:

$$\delta_y = \frac{1 - \sqrt{1 - 16\lambda^2}}{8\lambda^2} - 1; \quad (78)$$

$$\delta_\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - 16\lambda^2}} - 1. \quad (79)$$

Після розкладання δ_y і δ_θ у ряд Маклоренна щодо параметра λ і утримання ненульового члена другого порядку малості отримаємо: $\delta_y = 4\lambda^2 = 0,25\hat{\theta}_{\max}^2$; $\delta_\theta = 8\lambda^2 = 0,5\hat{\theta}_{\max}^2$.

Від дії власної ваги на однопрогонову балку сталого поперечного перерізу утворюється внутрішній згинальний момент (рис. 6 а) [2, с. 232-233]

$$M(x) = -\frac{1}{2}q \cdot x(l-x). \quad (80)$$

Функція прогину і девіація для даного навантаження при розв'язанні лінеаризованого рівняння (4) мають такий вигляд (рис. 6 б-в):

$$\tilde{y}(x) = \frac{qx(l-x)}{24EI} (l^3 + lx - x^2); \quad (81)$$

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{q(l-2x)}{24EI} (l^2 + 2lx - 2x^2). \quad (82)$$

Максимальний прогин у перерізі $x = l/2$ і девіація у перерізі $x = 0$ становлять:

$$\tilde{y}_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}; \quad (83)$$

$$\tilde{\theta}_{\max} = \frac{ql^3}{24EI}. \quad (84)$$

У разі точного розв'язання нелінійного рівняння пружної осі (3), з урахуванням граничних умов задачі ($\theta(0) = -\theta(l)$; $\theta(l/2) = 0$) девіація

$$\theta(x) = \left[\frac{q(l-2x)}{24EI} (l^2 + 2lx - 2x^2) \right] \left[1 - \frac{q^2(l-2x)^2}{576EI} (l^2 + 2lx - 2x^2)^2 \right]^{-1/2}. \quad (85)$$

Подальші дослідження зручно здійснювати, розклавши функцію $\theta(x)$ у ряд Маклорена з точністю до членів третього порядку малості (15):

$$\theta(x) = \frac{q(l-2x)}{24EI} (l^2 + 2lx - 2x^2) + \frac{1}{2} \left[\frac{q(l-2x)}{24EI} (l^2 + 2lx - 2x^2) \right]^3. \quad (86)$$

$$y(x) = \frac{qx(l-x)}{24EI}(l^2 + lx - x^2) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{q(l-2x)}{24EI}(l^2 + 2lx - 2x^2) \right]^3 dx. \quad (87)$$

Максимальний прогин і девіація становлять:

$$y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} + 6,55l \left(\frac{ql^3}{96EI} \right)^3; \quad (88)$$

$$\theta_{\max} = \frac{ql^3}{24EI} + \frac{1}{2} \left(\frac{ql^3}{24EI} \right)^3. \quad (89)$$

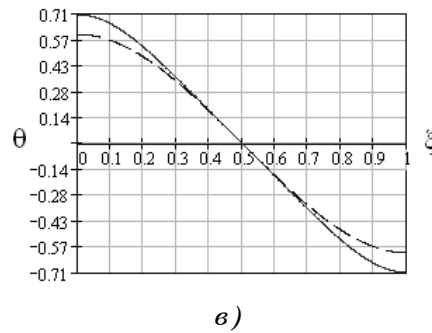
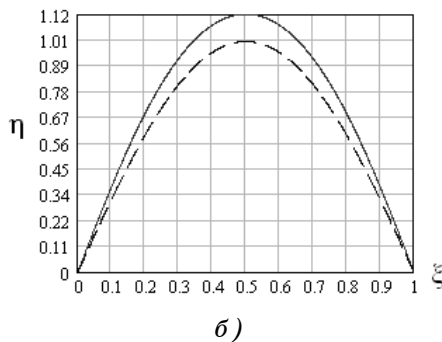
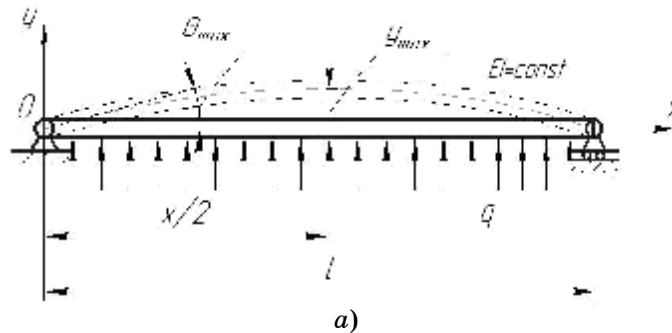


Рисунок 6 – Однопрогонова балка, навантажена власною вагою:

а) розрахункова схема; б) графіки переміщень; в) графіки девіацій

--- --- наближений розв'язок ————— точний розв'язок

Відносні відхилення отриманих значень y_{\max} і θ_{\max} за різними методиками становлять: $\delta_y = 0,33\tilde{\theta}_{\max}^2$; $\delta_\theta = 0,5\tilde{\theta}_{\max}^2$. В результаті переходу до безрозмірних параметрів (28) – (31) отримуємо такі формули для функції прогину і девіації (рис. 6 б – в):

$$\eta = \frac{16}{5} \xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2) + \frac{2048}{125} \lambda^2 \int_0^\xi (1-2\xi)^3 (1+2\xi-2\xi^2)^3 d\xi; \quad (90)$$

$$\theta = \frac{16}{5} \lambda(1-2\xi)(1+2\xi-2\xi^2) + \frac{2048}{125} \lambda^3 (1-2\xi)^3 (1+2\xi-2\xi^2)^3; \quad (91)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{16}{5} \xi (1 - \xi) (1 + \xi - \xi^2); \quad (92)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{16}{5} \lambda (1 - 2\xi) (1 + 2\xi - 2\xi^2). \quad (93)$$

РЕЗУЛЬТАТИ

Підсумовуючи вищевикладене, уточнення розрахунків на жорсткість можна проводити із використанням коефіцієнтів уточнення

$$k_y = \delta_y / \tilde{\theta}_{\max}^2; \quad (94)$$

$$k_\theta = \delta_\theta / \tilde{\theta}_{\max}^2 \quad (95)$$

за такими формулами:

$$y_{\max} = (1 + k_y \tilde{\theta}_{\max}^2) \cdot \tilde{y}_{\max}; \quad (96)$$

$$\theta_{\max} = (1 + k_\theta \tilde{\theta}_{\max}^2) \cdot \tilde{\theta}_{\max}. \quad (97)$$

Числові значення коефіцієнтів уточнення наведені в таблиці 1.

Визначимо границю, після переходу через яку необхідно застосовувати лише нелінійне диференціальне рівняння (3) для розв'язання задачі про вигин балки. Будемо вимагати, щоб відносні похибки визначення максимальних значень прогину і деформації за лінеаризованою формулою (4) не перевищували тривідсоткового бар'єра: $\delta_y \leq 0,03$; $\delta_\theta \leq 0,03$, тобто $\tilde{\theta}_{\max} \leq \tilde{\theta}_{\max}^{кр}$, де критичне значення кута оберту нормального перерізу

$$\tilde{\theta}_{\max}^{кр} = \sqrt{\frac{0,03}{\min\{k_y; k_\theta\}}}. \quad (98)$$

За допомогою значення $\tilde{\theta}_{кр}^{max}$ можна отримати критичне значення $\lambda_{кр}$ безрозмірного параметра λ , при перевищенні якого необхідно застосовувати рівняння (3) замість спрощеного рівняння (4):

$$\lambda_{кр} = \frac{\tilde{y}_{\max}}{l \tilde{\theta}_{\max}^{кр}} \tilde{\theta}_{\max}^{кр}. \quad (99)$$

Результати розрахунків для різних способів закріплення і навантаження балки зведені до таблиці 1.

Таблиця 1 – Коефіцієнти уточнення і граничні параметри

Розрахункова схема	\tilde{y}_{\max}	$\tilde{\theta}_{\max}$	k_y	k_θ	$\tilde{\theta}_{\max}^{\text{кр}}$	$\lambda_{\text{кр}}$
Рис. 2а	$\frac{Pl^3}{3EI}$	$\frac{Pl^2}{2EI}$	0,34	0,5	17°1'	0,198
Рис. 3а	$\frac{M_0l^2}{2EI}$	$\frac{M_0l}{EI}$	0,25		19°51'	0,173
Рис. 4а	$\frac{ql^4}{8EI}$	$\frac{ql^3}{6EI}$	0,39		15°53'	0,208
Рис. 5а	$\frac{M_0l^2}{8EI}$	$\frac{M_0l}{2EI}$	0,25		19°51'	0,087
Рис. 6а	$\frac{5ql^4}{384EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$	0,33		17°17'	0,094
Рис. 7а	$\frac{M_0l^2}{27EI}$	$\frac{M_0l}{12EI}$	0,04		50°55'	0,132

ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГИНУ ПРУЖНОЇ ЛІНІЇ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ СИСТЕМИ

Вищеописаний спосіб інтегрування нелінійного рівняння (3) поширюється як на статично визначувані, так і на статично невизначувані системи.

Розглянемо однопрогонову балку постійного поперечного перерізу (рис. 7а), жорстко защемлену на одному кінці та шарнірно оперту на іншому. При дії на правому кінці пари сил із моментом M_0 згинальний момент

$$M(x) = -M_0. \quad (100)$$

Функція прогину і девіація для даного навантаження при розв'язанні лінійного диференціального рівняння (4) з урахуванням граничних умов задачі ($\theta(0) = 0$; $y(0) = y(l) = 0$) мають такий вигляд [4]:

$$\tilde{y}(x) = \frac{M_0x^2(l-x)}{4lEI}; \quad (101)$$

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{M_0x(2l-3x)}{4lEI}. \quad (102)$$

Максимальні значення наближених прогину і девіації у перерізах $x = 2l/3$ і $x = l$ відповідно становлять

$$\tilde{y}_{\max} = \frac{M_0l^2}{27EI}; \quad (103)$$

$$|\tilde{\theta}_{\max}| = \frac{M_0l}{4EI}. \quad (104)$$

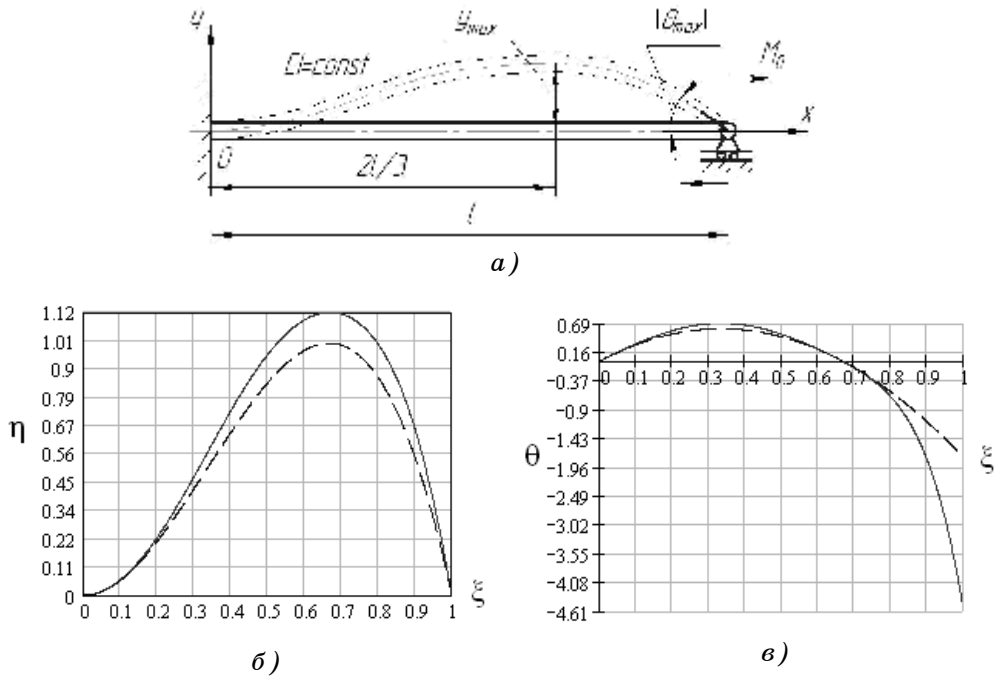


Рисунок 7 – Один раз статично невизначувана балка, навантажена парою сил:
 а) розрахункова схема; б) графіки переміщень; в) графіки девіацій
 - - - - - наближений розв'язок ————— точний розв'язок

Відповідно до формул (14) – (15) розв'язок нелінійного рівняння пружної осі (3) з точністю до членів третього порядку малості дає

$$y(x) = \frac{M_0 x^2 (l-x)}{4lEI} + \frac{M_0^3}{128l^3 (EI)^3} \int_0^x x^3 (2l-3x)^3 dx; \quad (105)$$

$$\theta(x) = \frac{M_0 x (2l-3x)}{4lEI} + \frac{M_0^3 x^6 (l-x)^3}{128l^3 (EI)^3}. \quad (106)$$

Після переходу до безрозмірних параметрів (28) – (31) отримаємо (рис. 7б-в)

$$\eta = \frac{27}{4} \xi^2 (1-\xi) + \frac{27^3}{128} \lambda^2 \int_0^\xi \xi^3 (2-3\xi)^3 d\xi; \quad (107)$$

$$\theta = \frac{27}{4} \lambda \xi (2-3\xi) + \frac{27^3}{128} \lambda^3 \xi^3 (2-3\xi)^3; \quad (108)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{27}{4} \xi^2 (1-\xi); \quad (109)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{27}{4} \lambda \xi (2-3\xi). \quad (110)$$

Відносні відхилення значень y_{max} і θ_{max} становлять: $\delta_y = 0,04\tilde{\theta}_{max}^2$;
 $\delta_\theta = 0,5\tilde{\theta}_{max}^2$.

4. АНАЛІЗ КОЕФІЦІЄНТІВ УТОЧНЕННЯ

Проаналізуємо значення коефіцієнтів уточнення k_y і k_θ (95), (27) і (14):

$$k_\theta = \frac{(\tilde{\theta}_{max} + 0,5\tilde{\theta}_{max}^3) - \tilde{\theta}_{max}}{\tilde{\theta}_{max} \cdot \tilde{\theta}_{max}^2} \equiv 0,5. \quad (111)$$

Таким чином, коефіцієнт k_θ є практично незмінним незалежно від типу закріплення чи навантаження балки: $k_\theta = 0,5$. Відповідно до формул (94), (26), (14) і (15) коефіцієнт k_y можна записати у такому вигляді:

$$k_y = \frac{\int_0^{x_m} \tilde{\theta}^3(x) dx}{2\tilde{\theta}_{max}^2} \left[y_0 + \int_0^{x_m} \tilde{\theta}(x) dx \right]^{-1}, \quad (112)$$

де x_m – значення осьової координати x , що надає максимуму функції прогину. Подамо функцію $\tilde{\theta}(x)$ у вигляді степеневого ряду:

$$\tilde{\theta}(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i, \quad (113)$$

де n – найвища степінь полінома; α_i – алгебраїчні коефіцієнти ряду ($i = \overline{1, n}$).

Остання формула дає змогу розраховувати складові частини формули (112) у вигляді одинарних, подвійних і потрійних рядів [5]:

$$\int_0^{x_m} \tilde{\theta}(x) dx = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{i+1} x^{i+1}; \quad (114)$$

$$\tilde{\theta}_{max}^2 = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha_j x_m^{i+j}; \quad (115)$$

$$\tilde{\theta}_{max}^3 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha_j \alpha_k x_m^{i+j+k}; \quad (116)$$

$$\int_0^{x_m} \tilde{\theta}_{max}^3 dx = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i \alpha_j \alpha_k}{i+j+k+1} x_m^{i+j+k+1}; \quad (117)$$

$$\tilde{\theta}_{\max}^2 \int_0^{x_m} \tilde{\theta}(x) dx = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i \alpha_j a_k}{k+1} x_m^{i+j+k+1}. \quad (118)$$

Враховуючи формули (114) – (118), коефіцієнт

$$k_y = \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i \alpha_j a_k}{i+j+k+1} x_m^{i+j+k+1}}{2 \left(y_0 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha_j x_m^{i+j} + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i \alpha_j a_k}{k+1} x_m^{i+j+k+1} \right)} \leq 0,5. \quad (119)$$

Вочевидь, коефіцієнти потрійного ряду в чисельнику не перевищують відповідні коефіцієнти для потрійного ряду в знаменнику. Крім того, подвійна сума в останній формулі не може бути від'ємною. Таким чином, коефіцієнт k_y не може перевищувати значення 0,5. Також можна стверджувати, що $k_y \leq k_0$. В результаті проведеного аналізу для розрахунку параметрів $\tilde{\theta}_{\max}^{kp}$ і λ_{kp} можна замість формули (98) застосовувати таку формулу:

$$\tilde{\theta}_{\max}^{kp} = \sqrt{\frac{0,03}{k_y}}. \quad (120)$$

ВИСНОВКИ

На підставі розгляду нелінійного диференціального рівняння пружної осі балки отримано формули для розрахунків на жорсткість стрижнів, які працюють на згин. Запропоновано альтернативний спосіб розрахунків, який ґрунтується на застосуванні ряду Маклорена.

Отримані залежності дозволяють проводити розрахунки на жорсткість конструкцій зі значними прогинами, що не перевищують 10-20 % від довжини балки.

Порівняння точних та наближених (як лінеаризованих, так і поліноміальних) розв'язків нелінійного диференціального рівняння пружної осі балки вказують на те, що найбільша відносна похибка розрахунків пропорційна квадрату максимального кута оберту нормального перерізу балки. Цей факт дав змогу розмежувати сфери застосування нелінійного і лінеаризованого рівнянь пружної осі за допомогою введення кількісних показників.

SUMMARY

SOLVING THE NONLINEAR BEAM'S FLEXIBILITY EQUATION

*I.V. Pavlenko,
Sumy State University*

Based on the nonlinear differential equation of beam axis flexure, formulas for flexibility calculations are received. The alternative method, which is based on Macloren's row application is offered. Mathematical dependences allow to make calculations of inflexibility of beam constructions with high flexures, which are less than 10 ... 20 % of beam length. Comparison of the results shows, that the most relative error of calculation is proportional to the square of the maximal deviation.

This fact enabled to delimit the nonlinear and linearized equations applications in scores.

Key words: *flexure, deviation, flexibility, beam, equation.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пономарёв С.Д., Бидерман В.Л., Лихарёв К.К. и др. Расчёты на прочность в машиностроении / под ред. С.Д. Пономарёва. – Т. 1 Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчёты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке. – М.: Машгиз, 1956. – 884 с.
2. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1975. – 704 с.
3. Ткач П.Ю., Жигилий Д.А. Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования уточненного дифференциального уравнения упругой линии// Матеріали науково-технічної конференції викладачів, співробітників, аспірантів і студентів факультету технічних систем та енергоефективних технологій.– Суми: Вид-во СумДУ, 2009.– Ч. 2.– С. 104.
4. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів: підручник.– 2-е вид., допов. і перероб.– К.: Вища школа, 2004.– 655 с.
5. *Математика. Poradnik encyklopedyczny / Pod redakcją I.N. Bronszteina i K.A. Siemiendajewa.*– Warszawa: Wydawnictwo naukowe PWN, 2004.

Надійшла до редакції 23 березня 2010 р.