На правах рукописи

Дмитриев Станислав Сергеевич

Численное решение интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом, моделирующих некоторые прикладные задачи

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2009

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Московского авиационного института (государственного технического университета)

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Кузнецов Евгений Борисович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Исаев Вячеслав Константинович
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Филиппов Сергей Сергеевич
Ведущая организация	Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Защита состоится 18 декабря 2009 г. в 10.00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 в Московском авиационном институте по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., 4, Ученый совет МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (государственного технического университета).

Отзыв на автореферат, заверенный печатью организации, просьба направлять по указанному адресу в двух экземплярах.

Автореферат разослан “____” ____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.125.04,
кандидат физико-математических наук Ротанина М.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение многих процессов, происходящих в природных и технических системах, сводится к анализу свойств их математических моделей, что приводит к необходимости исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Часто в приложениях встречаются системы ОДУ, у которых матрица при производной является вырожденной. Такие системы называются системами сингулярных дифференциальных уравнений или дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). К решению систем ДАУ приводят многие из задач механики, кинетики химических реакций, теории управления, электрических цепей.

В случае, если процесс обладает последействием, математическая модель также может включать в себя запаздывание и интегральные уравнения. В этом случае мы получаем систему взаимосвязанных дифференциальных, алгебраических уравнений и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Такие системы уравнений возникают при моделировании многих прикладных задач, например, при исследовании электрических цепей.[1,2]

Подобные задачи возникают также и в механике. Например, процесс сверления с вибровозбудителем описывается при помощи систем ДАУ с запаздывающим аргументом.[3]

Диссертационная работа посвящена разработке численных методов решения систем ДАУ, а также систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом с использованием метода продолжения по наилучшему аргументу.

Сложность решения систем ДАУ определяется так называемым дифференциальным индексом системы, т.е. наименьшим числом аналитических дифференцирований, необходимых для того, чтобы посредством алгебраических преобразований записать систему ДАУ в нормальной форме Коши (т.е. свести к ОДУ).

Численное решение систем ДАУ впервые, по-видимому, исследовалось в работе Гира 1971 года (C.W. Gear). Рассматривалось решение системы разрешенных относительно производных уравнений, описывающих процессы, протекающие в электрических цепях. Для дискретизации данной системы использовались формулы дифференцирования назад (ФДН). Система нелинейных уравнений, возникающая на каждом шаге процедуры интегрирования,

[1] Ушаков Е.И. Статическая устойчивость электрических систем – Новосибирск: Наука, 1988. – 273 с.

[2] Jiang Y.L. Mathematical Modelling on RLCG Transmission Lines // Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2005, Vol. 10, No. 2, P. 137–149.

[3] Гуськов А.М., Воронов С.А., Квашнин А.С. Влияние крутильных колебаний на процесс вибросверления. – Вестник МГТУ им Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. № 1, Москва, 2007. – с. 3-19.

решалась при помощи метода Ньютона.

Первый результат по сходимости для методов ФДН был получен П. Лотстедом (P. Lotstedt) в 1985 году для систем индекса 1. Позже сходимость методов ФДН исследовалась в работах Л. Петзолд (L. Petzold), К. Бренана (K.E. Brenan) и Б. Энгквиста (B.E. Engquist).

Многошаговые методы, отличные от ФДН, рассматриваются, в частности, в работах Р. Марц (R. Marz), Г. Содерлинда (G. Soderlind). В монографии Е. Грипентрога (E. Griepentrog) проведено исследование сходимости общих многошаговых методов.

Первые результаты о сходимости неявных методов Рунге-Кутты для ДАУ индекса 1 были получены в работах П. Дефлхарда (P. Deuflhard), Э. Хайрера (E. Hairer), Дж. Зюка (J. Zugck), Е. Грипентрога. Исследованию сходимости методов Рунге-Кутты для ДАУ высших индексов посвящены работы К. Бренана и Л. Петзолд. В работе Э. Хайрера, Ч. Любиха (C. Libich), М. Роша (M. Roche) данные результаты были улучшены.

Серия работ Г.Ю. Куликова посвящена рассмотрению частного случая систем ДАУ индекса 1. Для таких систем предложен ряд комбинированных методов Рунге-Кутты-Ньютона и получены оценки глобальной погрешности, которая складывается из погрешности дискретизации и погрешности метода Ньютона.

В работе В.К. Горбунова в 1979 году был предложен метод параметризации задач оптимального управления, который позднее был применен для решения систем ДАУ. Согласно данному подходу приближенное решение представляется в виде сплайна с подвижными узлами, параметры которого определяются из условия минимизации невязки сингулярной части системы ДАУ. Такой сплайн назван вариационным.

Большое число работ посвящено исследованию линейных систем ДАУ. Здесь прежде всего следует отметить работы Ю.Е. Бояринцева, М.В. Булатова и В.Ф. Чистякова, а также Е. Грипентрога.

Необходимо отметить, что решение ДАУ является более сложной задачей по сравнению с решением ОДУ. Отмечаются следующие трудности:[4,5]

- начальные условия должны быть согласованы с недифференциальными соотношениями;
- система уравнений плохо обусловлена для мелких шагов интегрирования;
- ошибка метода чувствительна к несогласованности в начальных условиях и к резкому изменению решения;

[4]Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical Solution of initial-value problems in differential-algebraic equations.-N.Y.,Amsterdam, London: North-Holland, 1989. - 210 p.

[5]Gear C.W. Simultaneius numerical solution of differential-algebraic equations // IEEE Trans. Circuit Theory. - 1971. - CT. 18.- № 1. - Pp. 89-95.

- численное решение в большей степени зависит от точности аппроксимации, чем для ОДУ.

Несмотря на большое число работ, посвященных численному решению систем ДАУ, трудности их численного решения, перечисленные выше, актуальны и на сегодняшний день. В работах Е.Б. Кузнецова и В.И. Шалашилина решение систем ДАУ рассмотрено с позиции метода продолжения по наилучшему аргументу, которым является длина дуги интегральной кривой и предложен подход, названный непрерывным продолжением. Данный подход, основанный на дифференцировании недифференциальных соотношений и введении наилучшего аргумента, позволяет ослабить отмеченные выше трудности. Так, система уравнений продолжения, решаемая на каждом шаге процедуры интегрирования, получается наилучшим образом обусловленной, а в силу выбора аргумента, ошибка становится менее чувствительной к резкому изменению решения. Недостатком указанного подхода является необходимость дифференцирования недифференциальных соотношений, т.е. система ДАУ сначала сводится к системе ОДУ и лишь затем преобразуется к наилучшему аргументу.

В данной работе для решения систем ДАУ предлагается применить метод дискретного продолжения, в котором уравнения продолжения получаются без дифференцирования недифференциальных соотношений. Таким образом, метод может применяться непосредственно к ДАУ высших индексов.

В отличии от систем ДАУ, число работ, посвященных численному решению систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом, крайне невелико. Тем не менее к необходимости решения таких систем приводит рассмотрение многих прикладных задач, поэтому развитие численных методов решения данных систем является актуальной задачей.

Некоторые подходы к численному решению таких систем рассмотрены в работах У. Джианг (Y. Jiang) и У. Рен (Y. Ren).

В работах М.В. Булатова и Е.В. Чистяковой рассматривается численное решение систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной.

Следует отметить, что все трудности, присущие численному решению систем ДАУ, перечисленные выше, остаются справедливыми и для систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. Кроме того, добавляются трудности, связанные с наличием запаздывания и интеграла. Для преодоления этих трудностей в данной работе предлагается метод продолжения по наилучшему аргументу, которым является длина дуги интегральной кривой задачи.

Цель работы. Целью работы является разработка численных методов решения систем дифференциально-алгебраических уравнений и интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом.

В работе ставились следующие задачи:

1) Рассмотреть применение метода дискретного продолжения по наилучшему аргументу для численного решения систем ДАУ.
2) Получить необходимые и достаточные условия преобразования системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом к наилучшему аргументу. Построить численные методы на основе непрерывного и дискретного варианта метода продолжения. Реализовать данные методы в комплексе программ.
3) Применить указанные подходы к решению задач, моделирующих различные явления природы и техники.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории продолжения по параметру, методы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений типа Вольтерра, а также методы вычислительной математики, функционального анализа и линейной алгебры.

Достоверность результатов. Достоверность результатов обеспечивается строгостью постановок задач, строгостью доказательств, разнообразными тестовыми примерами, а также сравнением с результатами, полученными другими авторами.

Научная новизна. Все существенные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, являются новыми. Отметим основные из них.

На основе метода дискретного продолжения по наилучшему аргументу предложен соответствующий алгоритм для численного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений. Получена оценка погрешности метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений, получающейся после преобразования задачи к наилучшему аргументу.

Для систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом получены необходимые и достаточные условия преобразования к наилучшему аргументу. Показано, что таковым является длина дуги интегральной кривой задачи. Для численного решения указанной задачи предложены два подхода, основанные на методе продолжения по наилучшему аргументу: непрерывное и дискретное продолжение.

Разработан комплекс программ для численного решения соответствующих начальных задач, в котором реализованы разработанные в работе численные методы.

С использованием предложенных алгоритмов решена система уравнений, описывающая процесс вибросверления, а также системы уравнений, моделирующие линейные и нелинейные нестационарные электрические цепи.

Теоретическая и практическая значимость. С одной стороны, в работе получены теоретические результаты - доказано, что наилучшим, в некотором смысле, аргументом для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом является длина дуги интегральной кривой задачи. Получена оценка погрешности метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений, получающейся после преобразования системы ДАУ к наилучшему аргументу. С другой стороны, полученные результаты имеют и практическую ценность - подходы, предложенные в работе, могут использоваться при численном решении различных прикладных задач (из области механики, теории управления, кинетики химических реакций, теории электрических цепей). С использованием разработанного программного комплекса была решена система уравнений модели процесса вибросверления, а также системы уравнений, моделирующие нестационарные электрические цепи.

Апробация работы.Результаты, излагаемые в диссертации, докладывались и обсуждались на ряде научных семинаров и международных конференций:

1) XII международный симпозиум “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” (13-17 февраля 2006 г., Ярополец).
2) VIII Харитоновские чтения по проблемам физики высоких плотностей энергии (21-24 марта 2006 г., Саров).
3) VII Международная научная конференция “Дифференциальные уравнения и их приложения” (17-19 мая 2006 г., Саранск).
4) VI Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях NPNJ-2006 (26 июня – 1 июля 2006г., Санкт-Петербург).
5) General Linear methods and Differential Equations 2008 (GLADE’08) (Auckland, New Zealand, 14-25 July 2008).
6) XVI международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС’2009. (25-31 мая 2009 г., Алушта).
7) 12th Seminar NUMDIFF on Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations (Halle, Germany, 14-18 September 2009).
8) XX крымская осенняя математическая школа-симпозиум “Спектральные и эволюционные задачи” (18-29 сентября 2009 г., Севастополь, Украина).

9) Совместный семинар кафедр дифференциальных уравнений и теоретической механики Московского авиационного института (г. Москва, 8 октября 2009 г.).

Исследования выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-08-00371), а также программы министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009—2010 годы», регистрационный номер 2.1.1/5267.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ, в том числе 4 статьи и 8 тезисов; из них 2 статьи – в изданиях из перечня, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 119 страниц. Библиография содержит 81 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, приведен обзор современного состояния области исследования и дано краткое описание содержания диссертации.

В первой главе приводится обзор известных численных методов решения задачи Коши для систем дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y, x, t), \\ G(y, x, t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$y(0) = y_0, \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

$$y : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$
$$f : \mathbb{R}^{n+m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad G : \mathbb{R}^{n+m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

и вырожденных интегро-дифференциальных систем.

Во второй главе численное решение задачи (1), (2) рассматривается с позиции метода продолжения по наилучшему аргументу.

Наилучшим аргументом задачи (1), (2) называется аргумент, доставляющий системе уравнений продолжения наилучшую обусловленность.

Пусть интеграл задачи (1), (2)

$$\begin{gathered} f(y, x, t) = 0, \quad f(y_0, x_0, t_0) = 0, \\ f = (f_1, \ldots, f_{n+m})^T \end{gathered} \tag{3}$$

задает в $(n+m+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m+1}$ интегральную кривую K. Процесс построения этой кривой можно рассматривать как задачу построения множества решений системы нелинейных уравнений (3), содержащих параметр-аргумент t, для различных значений t. Для построения кривой множества решений системы (3) применим метод продолжения по параметру. Пусть, $x = x(t),\ y = y(t)$ являются функциями параметра t, тогда уравнения продолжения строятся дифференцированием (3) по параметру t

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Разрешим (4) относительно производных

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = -J^{-1}\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{5}$$

где $J = \left[\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial x}\right]$ - матрица Якоби.

Существенные вычислительные трудности будут возникать в тех точках кривой множества решений системы уравнений (3), где якобиан $\det(J)$ становится малым. В тех точках, в которых якобиан обращается в ноль, эти трудности становятся непреодолимыми. Встает вопрос о смене параметра продолжения и о выборе наилучшего параметра продолжения решения системы (3), а значит, и наилучшего аргумента системы (1), (2).

В работах Е.Б. Кузнецова, В.И. Шалашилина доказано, что наилучшим аргументом системы ДАУ является длина дуги интегральной кривой λ и предложен алгоритм непрерывного продолжения по наилучшему аргументу, согласно которому система (1) сводится к системе ОДУ путем дифференцирования недифференциальных соотношений, после чего преобразуется к наилучшему аргументу.

В данной главе рассматривается применение дискретного варианта метода продолжения по наилучшему аргументу к системе ДАУ. Согласно данному подходу решение $(x_{k+1}, y_{k+1}, t_{k+1}) = (x, y, t)$ на $(k{+}1)$-м шаге процедуры интегрирования в точке, соответствующей значению параметра $\lambda = \lambda_{k+1}$, ищется из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\lambda} - f(y, x, t)\dfrac{dt}{d\lambda} = 0, \\ G(y, x, t) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_{(i)} - y_{k(i)})^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{(j)} - x_{k(j)})^2 + (t - t_k)^2 - \Delta\lambda_k^2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $x_k = x(\lambda_k),\ y_k = y(\lambda_k),\ t_k = t(\lambda_k)$ — приближенное значение решения, соответствующее параметру $\lambda = \lambda_k$, $\Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ — длина шага по параметру λ.

Если аргумент λ отсчитывать от начальной точки задачи (1), (2), то начальные условия примут вид

$$y(0) = y_0, \quad x(0) = x_0, \quad t(0) = t_0. \tag{7}$$

Геометрически решение системы (6) означает, что решение на $(k+1)$-м шаге в точке, соответствующей значению параметра $\lambda = \lambda_{k+1}$ ищется как пересечение интегральной кривой задачи (1), (2) и сферы радиуса $\Delta\lambda_k$ с центром в k-й точке.

После замены производных в системе (6) конечными разностями требуемого порядка, получается система нелинейных уравнений, которую необходимо решать на каждом шаге процедуры интегрирования.

Серьезной проблемой при численном решении систем нелинейных уравнений является выбор начального приближения, которое, для того, чтобы метод сходился, должно быть выбрано достаточно близко к решению задачи. Хорошим начальным приближением для системы (6) являются значения:[6]

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x_k + \left(1 + \frac{\Delta\lambda_k}{\Delta\lambda_{k-1}}\right)(x_k - x_{k-1}), \\ y^{(0)} &= y_k + \left(1 + \frac{\Delta\lambda_k}{\Delta\lambda_{k-1}}\right)(y_k - y_{k-1}), \\ t^{(0)} &= t_k + \left(1 + \frac{\Delta\lambda_k}{\Delta\lambda_{k-1}}\right)(t_k - t_{k-1}). \end{aligned} \tag{8}$$

Геометрически начальное приближение (8) представляет собой точку пересечения сферы радиуса $\Delta\lambda_k$ с центром в точке (x_k, y_k, t_k) и прямой, проведенной через точки $(x_{k-1}, y_{k-1}, t_{k-1})$ и (x_k, y_k, t_k).

Важным преимуществом метода дискретного продолжения по сравнению с непрерывным является отсутствие необходимости дифференцирования недифференциальных соотношений, т.е. система ДАУ преобразуется к наилучшему аргументу сразу, без сведения к ОДУ.

Рассмотрим решение системы (6) с постоянным шагом $\Delta\lambda$. После замены производных конечными разностями первого порядка, система примет вид:

$$\begin{cases} y - y_k = f(y_k, x_k, t_k)(t - t_k), \\ G(y, x, t) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_{(i)} - y_{k(i)})^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{(j)} - x_{k(j)})^2 + (t - t_k)^2 - \Delta\lambda^2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

[6] Кузнецов Е.Б. Наилучшая параметризация при построении кривой итерационным методом // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 746-748.

С учетом обозначений

$$F_{k+1}(z)=\begin{cases} \left.\begin{array}{l} y-y_k-f(y_k,x_k,t_k)(t-t_k) \\ G(y,x,t) \end{array}\right\} = \Phi_{k+1}(z) \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(y_{(i)}-y_{k(i)})^2+\sum\limits_{j=1}^{m}(x_{(j)}-x_{k(j)})^2+(t-t_k)^2-\Delta\lambda^2, \end{cases} \tag{10}$$

система (9) может быть записана в виде

$$F_{k+1}(z)=0. \tag{11}$$

Итерации метода Ньютона для данной системы имеют вид

$$\begin{cases} z_{k+1}^{(i+1)}=z_{k+1}^{(i)}-\left[\dfrac{\partial F_{k+1}}{\partial z}(z_{k+1}^{(i)})\right]^{-1}F_{k+1}(z_{k+1}^{(i)}),\ i=0,1,... \\ z_{k+1}^{(0)}=2z_k-z_{k-1}. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь через z_k обозначено значение приближенного решения, найденное на k-м (предыдущем) шаге, i – номер итерации.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. В шаре $S(z_0,R)$ решение задачи (1), (2) существует и единственно;
2. Для невязки на последнем шаге по i выполняется условие $\|F_k(z_k)\|<\varepsilon$, $k=1,2,...p-1$;
3. Выполняется неравенство

$$\|F_k'(z_1)-F_k'(z_2)\|\le\gamma\|z_1-z_2\|,\ \forall z_1,z_2\in S(z_0,R);$$

4. $\exists\,[F_k'(z)]^{-1}:\|\,[F_k'(z)]^{-1}\,\|\le m,\forall z\in S(z_0,R)$;
5. $\|f(z)\|\le M,\|G'(z)\|\le K,\forall z\in S(z_0,R)$;

Пусть ε выбирается так, чтобы имело место неравенство $\varepsilon<\dfrac{1}{2\gamma m^2}$ и

$$R'=\frac{p(1-\sqrt{1-2\alpha})}{m\gamma}<R,$$

где $\alpha=m^2\gamma(\varepsilon+C\Delta\lambda)$, $\quad C=\max\{1+M,K\}$.

Тогда при выборе шага сетки из соотношения

$$\Delta\lambda\le\frac{1-2\varepsilon\gamma m^2}{2\gamma m^2C},$$

последовательные приближения $z_k^{(i)}$, вычисленные по итерационной схеме (12) сходятся к решению z_k. При этом имеет место оценка ошибки:

$$\|z_k^{(i)}-z_k\|\le\frac{(2\alpha)^{2^i}}{m\gamma2^i}. \tag{13}$$

Также в данной главе приведены различные примеры решения начальной и краевой задач для систем ДАУ, демонстрирующие эффективность предложенного подхода.

В третьей главе рассматривается численное решение системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, t), \\ G(y, y_\tau, x, x_\tau, z, z_\tau, t) = 0, \\ F_i\left(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, \dot{z}, z_\tau, \dot{z}_\tau, \int\limits_{t_0}^{t} K_i[x(\xi), y(\xi), z(\xi), \xi]d\xi\right) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = \overline{1, k} \end{cases} \tag{14}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y(t) = \widetilde{y}(t), \quad \dot{y}(t) = \widehat{y}(t), \\ x(t) = \widetilde{x}(t), \quad \dot{x}(t) = \widehat{x}(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0), \\ z(t) = \widetilde{z}(t), \quad \dot{z}(t) = \widehat{z}(t), \end{cases} \tag{15}$$
$$y(t_0) = \widetilde{y}(t_0) = y_0,\ x(t_0) = \widetilde{x}(t_0) = x_0,\ z(t_0) = \widetilde{z}(t_0) = z_0,$$

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \qquad z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k, \qquad t \in \mathbb{R},$$
$$f : \mathbb{R}^{3(n+m+k)+1} \to \mathbb{R}^n,\ G : \mathbb{R}^{2(n+m+k)+1} \to \mathbb{R}^m,\ F : \mathbb{R}^{3n+3m+4k+1} \to \mathbb{R}^k.$$

Здесь $\widetilde{y}(t)$, $\widehat{y}(t)$, $\widetilde{x}(t)$, $\widehat{x}(t)$, $\widetilde{z}(t)$, $\widehat{z}(t)$ – заданные непрерывные функции, индекс $\tau > 0$ определяет запаздывание аргумента функции, т.е. $y_\tau(t) = y(t - \tau)$, $x_\tau(t) = x(t - \tau)$, $z_\tau(t) = z(t - \tau)$, $\dot{y}_\tau(t) = \dot{y}(t - \tau)$, $\dot{x}_\tau(t) = \dot{x}(t - \tau)$, $\dot{z}_\tau(t) = \dot{z}(t - \tau)$.

Решение задачи (14), (15) рассматривается с позиции метода продолжения по наилучшему аргументу.

Получен следующий результат.

Теорема. *Для того, чтобы задачу Коши (14), (15) для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом преобразовать к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно выбрать в качестве такового длину дуги λ, отсчитываемую вдоль интегральной кривой задачи.*

Наилучший аргумент задается соотношением

$$d\lambda^2 = \sum_{i=1}^{n} dy_i^2 + \sum_{j=1}^{m} dx_j^2 + \sum_{l=1}^{k} dz_j^2 + dt^2. \tag{16}$$

Для системы уравнений, разрешенных относительно производной

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, t), \\ G(y, y_\tau, x, x_\tau, z, z_\tau, t) = 0, \\ \dfrac{dz_l}{dt} = F_l\left(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, \int\limits_{t_0}^{t} K_l[x(\xi), y(\xi), z(\xi), \xi]d\xi\right), \\ \hfill l = \overline{1, k} \end{cases} \tag{17}$$

с начальными условиями (15) предложены алгоритмы непрерывного и дискретного продолжения.

Метод непрерывного продолжения состоит в дифференцировании вектор-функции G по λ, после чего с учетом смысла наилучшего аргумента, система (17) записывается в виде

$$\begin{cases} Y_i - f_i T = 0, \qquad i = \overline{1, n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} G_{,y_i} Y_i + \sum\limits_{j=1}^{m} G_{,x_j} X_j + \sum\limits_{l=1}^{k} G_{,z_l} Z_l + \\ \qquad + (\sum\limits_{i=1}^{n} G_{,y_{i\tau}} \dot{y}_{i\tau} + \sum\limits_{j=1}^{m} G_{,x_{j\tau}} \dot{x}_{j\tau} + \sum\limits_{l=1}^{k} G_{,z_{l\tau}} \dot{z}_{l\tau} + G_{,t}) T = 0, \\ Z_l - F_l T = 0, \qquad l = \overline{1, k} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i Y_i + \sum\limits_{j=1}^{m} X_j X_j + \sum\limits_{l=1}^{k} Z_l Z_l + TT = 1, \end{cases} \tag{18}$$

Здесь использованы обозначения

$$\frac{dy}{d\lambda} = Y, \quad \frac{dx}{d\lambda} = X, \quad \frac{dz}{d\lambda} = Z, \quad \frac{dt}{d\lambda} = T. \tag{19}$$

Систему (18) следует разрешить относительно производных, после чего мы придем к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме (19), которая может быть решена каким-либо численным методом решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Соотношения метода Эйлера для системы (19) имеют вид

$$\begin{aligned} y_i^{(k+1)} &= y_i^{(k)} + h_{\lambda k} Y_i(y^{(k)}, y_\tau^{(k)}, \dot{y}_\tau^{(k)}, x^{(k)}, x_\tau^{(k)}, \dot{x}_\tau^{(k)}, z^{(k)}, z_\tau^{(k)}, \dot{z}_\tau^{(k)}, S^{(k)}, t^{(k)}), \\ x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + h_{\lambda k} X_i(y^{(k)}, y_\tau^{(k)}, \dot{y}_\tau^{(k)}, x^{(k)}, x_\tau^{(k)}, \dot{x}_\tau^{(k)}, z^{(k)}, z_\tau^{(k)}, \dot{z}_\tau^{(k)}, S^{(k)}, t^{(k)}), \\ z_i^{(k+1)} &= z_i^{(k)} + h_{\lambda k} Z_i(y^{(k)}, y_\tau^{(k)}, \dot{y}_\tau^{(k)}, x^{(k)}, x_\tau^{(k)}, \dot{x}_\tau^{(k)}, z^{(k)}, z_\tau^{(k)}, \dot{z}_\tau^{(k)}, S^{(k)}, t^{(k)}), \\ t^{(k+1)} &= t^{(k)} + h_{\lambda k} T(y^{(k)}, y_\tau^{(k)}, \dot{y}_\tau^{(k)}, x^{(k)}, x_\tau^{(k)}, \dot{x}_\tau^{(k)}, z^{(k)}, z_\tau^{(k)}, \dot{z}_\tau^{(k)}, S^{(k)}, t^{(k)}), \end{aligned} \tag{20}$$

где $y_\tau^{(k)} = y(t^{(k)} - \tau)$, $x_\tau^{(k)} = x(t^{(k)} - \tau)$, $z_\tau^{(k)} = z(t^{(k)} - \tau)$, $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + h_{\lambda k}$.

Здесь интеграл вычисляется по формуле трапеций

$$S_l^{(k)} = \int\limits_{t_0}^{t^{(k)}} K_l[x(\xi), y(\xi), z(\xi), \xi] d\xi \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (K_l^{(i-1)} + K_l^{(i)})(t^{(i)} - t^{(i-1)}), \qquad (21)$$

где $K_l^{(i)} = K_l(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t^{(i)})$.

Правые части соотношений (20) зависят от функций $y(t^{(k)} - \tau)$, $\dot{y}(t^{(k)} - \tau)$, $x(t^{(k)} - \tau)$, $\dot{x}(t^{(k)} - \tau)$, $z(t^{(k)} - \tau)$, $\dot{z}(t^{(k)} - \tau)$, причем, в общем случае, точки $\theta = t^{(k)} - \tau$ не входят в состав точек сетки интегрирования. Для нахождения значений $y(\theta)$, $\dot{y}(\theta)$, $x(\theta)$, $\dot{x}(\theta)$, $z(\theta)$, $\dot{z}(\theta)$ предлагается использовать интерполяционные полиномы Лагранжа второго порядка, которые имеют вид

$$L_f(t) = \sum_{i=s}^{s+2} f^{(i)} \prod_{j \neq i} \frac{(t - t^{(j)})}{(t^{(i)} - t^{(j)})}. \qquad (22)$$

Здесь $f^{(i)} = f(t^{(i)})$ — значение интерполируемой функции в точке $t^{(i)}$, $t^{(s)} \leq \theta \leq t^{(s+1)}$, $s \in \mathbb{N}$.

Также для систем вида (17) предложен метод дискретного продолжения по наилучшему аргументу. Согласно данному подходу, решение (y, x, z, t) на $(i+1)$-м шаге в точке, соответствующей параметру $\lambda = \lambda_{i+1}$, ищется из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\lambda} - f(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, t) \dfrac{dt}{d\lambda} = 0, \\ G(y, y_\tau, x, x_\tau, z, z_\tau, t) = 0, \\ \dfrac{dz_l}{d\lambda} - F_l\left(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, S_l(t)\right) \dfrac{dt}{d\lambda} = 0, \qquad l = \overline{1, k}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} (x_j - x_j^{(i)})^2 + \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - y_j^{(i)})^2 + \sum\limits_{j=1}^{k} (z_j - z_j^{(i)})^2 + \\ \qquad\qquad + (t - t^{(i)})^2 - \Delta\lambda_i^2 = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Как и в непрерывном продолжении, интеграл вычисляется по формуле трапеций (21).

После замены производных конечными разностями получаем систему из $(n+m+k+1)$-го нелинейного уравнения относительно неизвестных $(x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, z^{(i+1)}, t^{(i+1)})$, которую необходимо решать каким-либо итерационным методом решения систем нелинейных уравнений.

Приведен ряд примеров, демонстрирующих эффективность предложенного подхода. Рассмотрена модельная задача, которая не решается без преобразования к наилучшему аргументу. Численные результаты показали, что дискретное продолжение обладает большей точностью, чем непрерывное.

Четвертая глава посвящена численному решению различных прикладных задач с использованием предложенных методов.

Рассматривается решение системы уравнений, описывающей процесс вибросверления. Полная система уравнений модели процесса вибросверления состоит из уравнений движения инструмента и уравнений образования новых поверхностей. Уравнения движения инструмента в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{d\beta^2} + \left(2\zeta(2\pi f_{ax})\dfrac{d\xi}{d\beta} + (2\pi f_{ax})^2\xi\right)\dfrac{d\tau}{d\beta} = \\ \qquad\qquad = \left((2\pi p)^2 A_0 sin(2\pi p\tau) - (2\pi f_{ax})^2\dfrac{k}{q}\bar{\eta}^q\right)\dfrac{d\tau}{d\beta}, \\ \dfrac{d^2\psi}{d\beta^2} + \left(\mu_\zeta 2\zeta(2\pi f_{ax})\dfrac{d\psi}{d\beta} + (2\pi f_{rot})^2\psi\right)\dfrac{d\tau}{d\beta} = \left(-\mu_P(2\pi f_{ax})^2\dfrac{k}{q}\bar{\eta}^q\right)\dfrac{d\tau}{d\beta}, \\ \dfrac{d\tau}{d\beta} = 1 - \dfrac{d\psi}{d\beta}, \end{cases} \tag{24}$$

где $\bar{\eta} = \left[\frac{1}{2}(2(\eta_1 + \eta_2))^q\right]^{1/q}$ – приведенная толщина снимаемого слоя.

Здесь ξ – безразмерное осевое смещение инструмента, ψ – безразмерный угол поворота сверла вокруг оси, τ – безразмерное время, β – безразмерный угол поворота инструмента(правого сечения сверла) относительно детали, q – параметр нелинейности закона резания, f_{ax}, f_{rot} – безразмерные собственные частоты осевых и крутильных колебаний инструмента, k – безразмерная жесткость резания, ζ – безразмерный коэффициент демпфирования, μ_P, μ_ζ – некоторые масштабирующие множители.

Уравнения образования новых поверхностей для инструмента с двумя режущими кромками имеют вид

$$\begin{cases} \Delta_1(\beta) = [Z_0(\tau(\beta)) - Z_0(\tau(0))] + \xi(\beta) - H + \tau(\beta) - \Lambda_2(\beta - 0.5), \\ \Delta_2(\beta) = [Z_0(\tau(\beta)) - Z_0(\tau(0))] + \xi(\beta) - H + \tau(\beta) - \Lambda_1(\beta - 0.5), \\ \eta_1(\beta) = \max(0, \Delta_1(\beta)), \quad \eta_2(\beta) = \max(0, \Delta_2(\beta)), \\ \Lambda_1(\beta) = \Lambda_2(\beta - 0.5) + \eta_1(\beta), \\ \Lambda_2(\beta) = \Lambda_1(\beta - 0.5) + \eta_2(\beta). \end{cases} \tag{25}$$

Здесь $\Delta_j(\beta)$ - безразмерное расстояние от j-й режущей кромки до необработанной поверхности, $\Lambda_j(\beta)$ - поверхность, получаемая за счет снятия мгновенной толщины снимаемого слоя $\eta_j(\beta)$ с поверхности, сформированной "предыдущей" режущей кромкой, H - безразмерное расстояние от инструмента до средней поверхности торца детали в начальный момент времени, $Z_0(t) = A_0 sin(\omega_0 t)$ – закон, по которому вибратор задает движение левому сечению крепления инструмента.

Полная система уравнений модели процесса вибросверления представляет собой систему дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом (24), (25).

Данная система решалась с использованием непрерывного и дискретного продолжения по наилучшему аргументу. В ходе решения вычислялась невязка алгебраической части системы, которая для метода дискретного продолжения оказалось значительно меньше, чем для непрерывного.

Также в данной главе проведено исследование моделей нестационарных электрических цепей. Рассмотрена модель двухконтурной электрической цепи, описываемой системой интегродифференциально-алгебраических уравнений (вырожденных интегро-дифференциальных уравнений)[7]

$$\begin{pmatrix} BL \\ 0 \end{pmatrix} \frac{di}{dt} + \begin{pmatrix} BR \\ A \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} B\widetilde{C} \\ 0 \end{pmatrix} \int\limits_0^t i d\tau + \widetilde{j} = 0. \tag{26}$$

Здесь A – узловая матрица, B – контурная матрица, R, L, $\widetilde{C}$ – диагональные матрицы сопротивлений, индуктивностей и величин, обратных емкости соответственно, i – вектор распределения токов по ветвям цепи, $\widetilde{j} = (0, 0, j(t), 0, 0)^T$, $j(t)$ – ток источника.

Для решения данной задачи применялись два подхода: метод, основанный на формулах дифференцирования назад (предложенный в работе Е.В. Чистяковой) и метод дискретного продолжения по наилучшему аргументу. В первом случае для дискретизации дифференциальной части системы использовались формулы дифференцирования назад 2 порядка, а интегральный член аппроксимировался при помощи формулы трапеций. Во втором случае при решении преобразованной задачи использовались конечно-разностные аппроксимации второго порядка, а интеграл также вычислялся по формуле трапеций. Получающаяся система нелинейных уравнений решалась при помощи метода Ньютона.

Шаг преобразованной задачи выбирался так, чтобы задача была проинтегрирована за то-же число шагов, что и непреобразованная. При этом погрешность при решении задачи, преобразованной к наилучшему аргументу получилась значительно меньше, чем при решении непреобразованной задачи(для вычисления погрешности использовалось решение, полученное с меньшим шагом).

Также рассмотрен случай нелинейной цепи, состоящей из диода, катушки индуктивности, конденсатора и резистора.[8] Данная цепь описывается следу-

[7] Чистякова Е.В. Методы исследования и решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений и их приложения. - Дисс. ... к.ф.-м.н. Иркутск, 2007.

[8] Влах И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. // И. Влах, К Сингхал.- М.:Радио и связь, 1988.-560с.

ющей системой дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{cases} q_1' - i_C = 0, \\ q_2' - u_1 + u_2 = 0, \\ q_1 - Cu_2 = 0, \\ q_2 - Li_L = 0, \\ i_L + [\exp(ku_1) - 1] - j(t) = 0, \\ i_L - i_C - Gu_2 = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где q_1 – заряд на конденсаторе, q_2 – магнитный поток через катушку индуктивности, i_C, i_L – токи, текущие через конденсатор и катушку индуктивности соответственно, $j(t)$ – ток источника.

Задача также решалась при помощи двух подходов: без преобразования к наилучшему аргументу и с использованием дискретного продолжения по наилучшему аргументу. Для дискретизации непреобразованной задачи применялись формулы дифференцирования назад 2 порядка, при решении преобразованной задачи также использовались конечно-разностные аппроксимации 2 порядка. Система нелинейных уравнений в обоих случаях решалась при помощи метода Ньютона.

При одинаковом числе шагов погрешность, получаемая при решении задачи методом дискретного продолжения, получилась значительно меньше, чем при решении непреобразованной задачи.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1) На основе метода дискретного продолжения по наилучшему аргументу предложен подход для численного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений. Преимущество предлагаемого подхода продемонстрировано на тестовых примерах.

2) Получена оценка погрешности метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений после преобразования задачи к наилучшему аргументу.

3) Разработан численный метод решения задачи Коши для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом преобразованной к наилучшему аргументу. Получены необходимые и достаточные условия преобразования задачи к наилучшему аргументу и доказано, что таковым является длина дуги интегральной кривой задачи. Предложены алгоритмы непрерывного и дискретного продолжения по наилучшему аргументу. На численных примерах продемонстрировано преимущество предлагаемого подхода.

4) Разработан комплекс программных средств для численного решения соответствующих начальных задач, в котором реализованы разработанные в работе численные методы и выполнена визуализация результатов расчетов.

5) На основе методов и подходов, предложенных в работе, численно решена система уравнений, моделирующих процесс вибросверления. Решены системы уравнений, моделирующих линейную и нелинейную нестационарные электрические цепи. Погрешность, возникающая при решении данных задач с использованием предложенного в работе преобразования к наилучшему аргументу, получилась значительно меньше, чем при решении этих задач без использования наилучшей параметризации.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Численное решение систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 3. С. 430-444.

2) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Оптимальная параметризация систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т. 15. № 2. С. 36-44.

Публикации в других ихданиях

3) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Исследование больших перемещений математического маятника // Материалы XII международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". Тезисы докладов. М.: Изд-во МАИ, 2006. С. 124-126.

4) Кузнецов Е.Б., Дмитриев С.С. Параметризация решения задачи проектирования прямоточного реактора // Сборник тезисов докладов VIII Харитоновских научных чтений. Саров: Изд-во ИПК ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. С. 85-87.

5) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Дискретное продолжение при решении систем дифференциально-алгебраических уравнений // Труды Средне-волжского математического общества. 2006, Т.8, № 1. С. 60-69.

6) Кузнецов Е.Б., Дмитриев С.С. Параметризация решения задачи проектирования прямоточного реактора // Сборник докладов VIII Харитоновских чтений по проблемам физики высоких плотностей энергии. Саров: Изд-во ИПК ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. С. 277-281.

7) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Реализация метода дискретного продолжения для систем дифференциально-алгебраических уравнений в системе MAPLE // "Новые информационные технологии". Тезисы докладов XIV Международной студенческой школы-семинара - М.: Изд-во МГИЭМ, 2006. С. 110.

8) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Перенос тепла и массы в пористом катализаторе. // Материалы VI международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006). М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 159-160.

9) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Наилучшая параметризация при решении интегро-дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. // Материалы VII Международной научной школы-семинара "Импульсные процессы в механике сплошных сред". Николаев. 2007. С. 8-9.

10) Dmitriev S.S, Kuznetsov E.B. Numerical Solution to Systems of Delay Integrodifferential Algebraic Equations. Proceedings of GLADE-2008 conference and workshop, Auckland, New Zealand. 14-25 July 2008. P. 17-18.

11) Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Численное решение систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом, преобразованных к наилучшему аргументу. // Материалы XVI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009). М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. - С. 276-277.

12) Kuznetsov E.B, Dmitriev S.S. Numerical solution of DAE's using method of continuation with respect to a parameter. Book of Abstracts of 12-th Seminar NUMDIFF on Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations. Halle, Germany. September 14-18, 2009. P.52.