О преобразовании эквивалентных по надежности «треугольник—звезда»

БЕЛОУСЕНКО И.В., КОВАЛЕВ А.П., СОВПЕЛЬ В.Б., ЯРМОЛЕНКО В.И.

Предложены точные формулы переходов от соединения в виде треугольника. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: *вероятность безотказной работы, система уравнений, треугольник, соединение в звезду, преобразование, расчет*

К невосстанавливающимся системам будем относить такие восстанавливаемые системы, восстановление которых по каким-либо причинам невозможно непосредственно в рассматриваемый период времени [1]. При их проектировании необходимо обеспечить максимальную надежность и заданные технические характеристики.

Предполагаем, что все элементы, составляющие систему, могут отказывать независимо друг от друга; элементы системы могут находиться только в двух состояниях: работоспособном и неработоспособном; потоки отказов и восстановлений элементов — это простейшие потоки событий; пропускная способность элементов неограниченна.

Вероятности безотказной работы R_n и R_m соответственно для *n* последовательно и *m* параллельно соединенных элементов определяются следующим образом [2]:

$$R_n = \prod_{i=1}^{n} p_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - q_i); \qquad (1)$$

$$R_m = 1 - \prod_{j=1}^{m} q_j = 1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - p_j), \qquad (2)$$

где p_i и p_j — вероятности безотказной работы *i*-го и *j*-го элементов; q_i и q_j - вероятности отказов *i*-го и *j*-го элементов.

Схемы технических систем не всегда состоят из последовательного, параллельного или смешанного соединений элементов. Существуют и более сложные схемы соединений. В них элементы соединены таким образом, что непосредственное определение эквивалентных вероятностей безотказной работы с использованием только формул (1) и (2) невозможно.

Под сложной схемой соединения элементов будем понимать такую схему, в состав которой входит хотя бы одна группа элементов, имеющих мостиковую структуру [3]. Для преобразования таких схем используется способ «треугольник звезда» (рис. 1,а, *б).* При переходе от соединения «треугольник» к эквивалентному по надежности соединению «звезда» применяются следующие формулы [4]

$$p_i = \sqrt{\frac{p_{AC}p_{BC}}{p_{AB}}};\quad p_j = \sqrt{\frac{p_{BC}p_{AB}}{p_{AC}}};\quad p_k = \sqrt{\frac{p_{AC}p_{BC}}{p_{AB}}}, \qquad (3)$$

где $p_{AB} = 1-(1-p_2)(1-p_1p_3)$; $p_{AC} = 1-(1-p_1)(1-p_2p_3)$; $p_{BC} = 1-(1-p_3)(1-p_1p_2)$.

Формулы (3) справедливы при выполнении следующих условий:

$$p_{AB}p_{AC} < p_{BC};\quad p_{BC}p_{AB} < p_{AC};\quad p_{AC}p_{BC} < p_{AB}.$$

При расчете надежности сложных по структуре схем необходимо знать точные формулы перехода от соединения элементов в виде «звезды» к эквивалентному по надежности соединению в виде «треугольника». Для этого необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений:

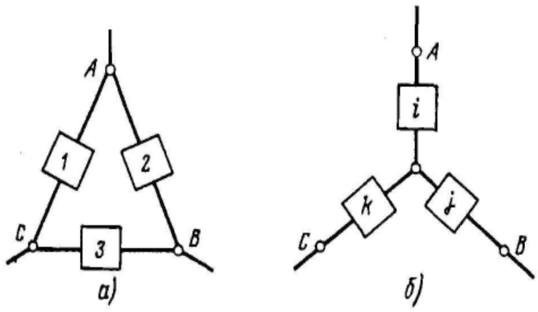

Рис. 1. Соединения элементов по схемам «треугольника» (о) и «звезды» *(б)*

$$\left.\begin{aligned} a &= q_1(q_2+q_3-q_2q_3);\\ b &= q_2(q_1+q_3-q_1q_3);\\ c &= q_3(q_1+q_2-q_1q_2),\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где $a=q_i+q_k-q_iq_k$; $b=q_i+q_j-q_iq_j$; $c=q_j+q_k-q_jq_k$.

Найдем вероятности отказа элементов «треугольника» q_1, q_2 и q_3, если известны вероятности отказа элементов «звезды» q_i, q_j и q_k.

Разделим правую и левую части системы уравнений (4) па произведения » $q_1\ q_2q_3$ и введем новые переменные:

$$\gamma = 1/q_1; \quad r = 1/q_2; \quad m = 1/q_3; \quad \gamma rm = t.$$

Система уравнений (4) примет вид

$$\left.\begin{aligned} at &= m+r-1;\\ bt &= m+\gamma-1;\\ ct &= -r+\gamma-1;\\ \gamma rm &= t.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Сложив правые и левые части трех первых уравнений системы (5) и разделив обе части полученного уравнения на два, получим следующее уравнение:

$$m+r+\gamma-1{,}5 = 0{,}5\,(a+b+c)\,t. \qquad (6)$$

Вычитая из уравнения (6) последовательно три первых уравнения системы (5), получаем

$$\left.\begin{aligned} \gamma-0{,}5 &= 0{,}5\,(b+c-a)\,t;\\ r-0{,}5 &= 0{,}5\,(a+c-b)\,t;\\ m-0{,}5 &= 0{,}5\,(a+b-c)\,t;\\ \gamma rm &= t.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Из системы уравнений (7) находим:

$$\gamma=\frac{(b+c-a)\,t+1}{2}; \quad r=\frac{(a+c-b)\,t+1}{2}; \quad m=\frac{(a+b-c)\,t+1}{2}. \quad (8)$$

Тогда

$$q_1=\frac{2}{(b+c-a)t+1};\ q_2=\frac{2}{(a+c-b)t+1};\ q_3=\frac{2}{(a+b-c)t+1}. \quad (9)$$

Подставляя значения γ, r, m из формул (8) в четвертое уравнение системы (7) и производя соответствующие преобразования, получаем кубическое уравнение вида

$$t^3+\alpha_1 t^2+\alpha_2 t+\alpha_3=0, \qquad (10)$$

где

$$\alpha_1=\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{b+c-a};$$

$$\alpha_2=\frac{a+b+c-8}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)};$$

$$\alpha_3=\frac{1}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Подстановка в уравнение (10) выражения

$$t=y-\alpha_1/3$$

приводит его к неполному виду:

$$y^3+py+q=0. \qquad (11)$$

Корни уравнения находятся известными способами [5].

Определив значения t, подставим их в формулу (9). При этом получим по три значения величин q_1, q_2 и q_3. Из каждой группы значений выбираем только те, которые удовлетворяют условию

$$0<q_i<1, \quad \text{где} \quad i=\overline{1,3}.$$

Находим вероятности безотказной работы эквивалентных по надежности элементов «треугольника»:

$$p_1=1-q_1;\quad p_2=1-q_2;\quad p_3=1-q_3. \quad (12)$$

В [6] даны приближенные формулы для прямого и обратного преобразования «треугольник-звезда» (рис. 1,а, *б):*

$$p_i\approx 1-q_1 q_2;\ p_j\approx 1-q_2 q_3;\ p_k\approx 1-q_1 q_3. \quad (13)$$

Формулы перехода от «звезды» к эквивалентному по надежности «треугольнику» имеют следующий вид:

Формулы (14) справедливы, когда

$$q_i q_k < q_j; \quad q_i q_j < q_k; \quad q_j q_k < q_i. \qquad (15)$$

В тех случаях, когда соотношения (15) не выполняются, тогда для перехода от соединения элементов в виде «звезды» к эквивалентному по надежности соединению «треугольник», следует решить уравнение (11).

Пример. Для схемы (рис. 2) определим вероятность безотказной работы, используя точные и приближенные формулы перехода от схемы «звёзды» к эквивалентному по надежности «треугольнику» (рис. 1,а, б). Интенсивности отказов элементов имеют следующие значения:

$$\lambda_1 = 2{,}45\cdot10^{-4}\ 1/ч; \quad \lambda_2 = 1{,}9\cdot10^{-4}\ 1/ч;$$

$$\lambda_3 = 2{,}01\cdot10^{-4}\ 1/ч; \quad \lambda_4 = 2{,}29\cdot10^{-4}\ 1/ч;$$

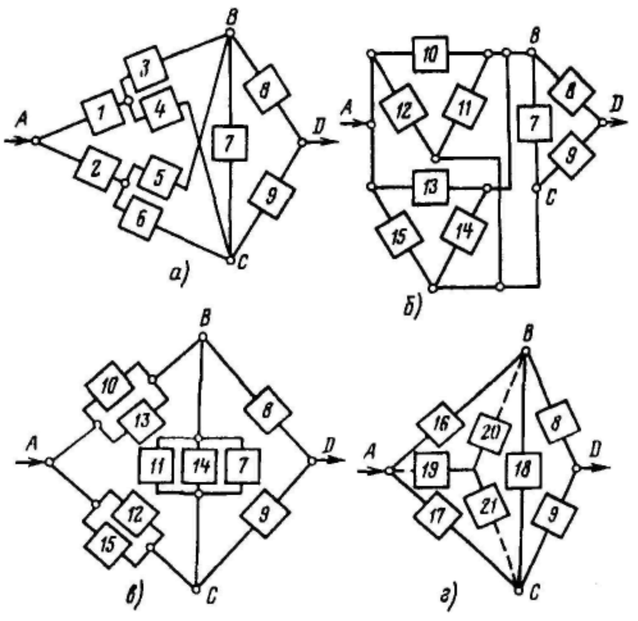

Рис. 2. Способ приведения сложной схемы к схеме, состоящей из смешанного соединения элементов

$$\lambda_5 = 2{,}5\cdot10^{-4}\ 1/ч; \quad \lambda_6 = 2{,}32\cdot10^{-4}\ 1/ч;$$

$$\lambda_7 = 2\cdot10^{-4}\ 1/ч; \quad \lambda_8 = 1{,}8\cdot10^{-4}\ 1/ч;$$

$$\lambda_9 = 2{,}09\cdot10^{-4}\ 1/ч; \quad p_i(t) = e^{-\lambda_i t}; \quad i=\overline{1,9}.$$

К схеме, показанной на рис. *2,а,* применим два раза преобразование «звезда— треугольник» (рис. 2,б), используя формулы (14). От схемы замещения, приведенной на рис. *2,б,* перейдем к схеме замещения, показанной на рис. *2,в* и, используя формулу (2), определим эквивалентные вероятности безотказной работы элементов, находящихся и плечах треугольника *ABC*. Преобразуя полученный треугольник *ABC* (рис. *2, г*) к эквивалентной по надежности «звезде», используя формулу (13), приходим к смешанному соединению элементов, а от нее, используя -формулы (1) и (2), — к одному эквивалентному элементу, вероятность безотказной работы которого соответствует надежности первоначальной схемы (рис. 2,а). График изменения вероятности безотказной работы схемы в зависимости от времени приведен на рис. 3 (кривая 2). Аналогичным образом определяется надежность схемы при использовании точной формулы перехода от соединений «звезда» к эквивалентному по надежности соединению «треугольник» [решая уравнение (11)].

Функция вероятности безотказной работы, полученная с помощью использования точного преобразования «звезда»— «треугольник» показана на рис. 3 (кривая *1).*

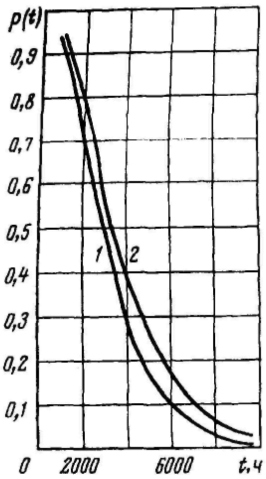

Рис. 3. Кривые вероятностей безотказной работы исходной схемы, полученные разными методами: *1 — с* использованием точных прямого и обратного преобразований «звезда-треугольник»; 2 - е помощью приближенных преобразований «звезда—треугольник»

Из графиков рис. 3 (кривые *1* и 2) видно, что при работе данной схемы менее 1000 ч рассмотренные методы расчета дают практически одинаковую оценку вероятности безотказной работы системы. С увеличением времени работы системы наблюдается значительное расхождение результатов расчетов на участке 2000 ч<t≤5000 ч, а при увеличении времени работы более 1000 ч результаты расчетов практически совпадают.

Точность рассматриваемой задачи была проверена с помощью логико-вероятностного метода рецензентом данной статьи И А. Рябининым. Получено, что при t = 2000 ч R (2000) = 0,707655. Аналогичный результат можно получить, пользуясь графиком (рис. 3); при t = 2000 ч *R* (2000) = 0,71. Согласно вычислениям предлагаемым методом R (2000) = 0,709974. Таким образом, точность метода расчета с использованием формул (1)—(3), (9) практически совпадает с логико-вероятностным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Козлов Б.А., Ушаков И.С.** Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. – М.: Советское радио, 1976.
2. **Зорин В.В.** и др. Надежность систем электроснабжения. – Киев: Высшая школа, 1984.
3. **Рябинин И.А.** Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. – Л.: Судостроение, 1971.
4. **Диллон Б., Сингх Ч.** Инженерные методы обеспечения надежности систем. – М.: Мир, 1984.
5. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1981.
6. **Голинкевич Т.А.** Прикладная теория надежности. – М.: Высшая школа, 1977.

Авторы:

Белоусенко Игорь Владимирович *окончил энергетический факультет Донецкого политехнического института (ДПИ) в 1981 г. В 1991 г. в ДПИ защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Энергетические системы и управление ими». Главный технолог РАО «Газпром», Россия.*

Ковалев Александр Петрович *окончил электротехнический факультет ДПИ в 1971 г. и математический факультет Донецкого государственного университета в 1977 г. В 1992 г. защитил докторскую диссертацию на тему «Основы теории и методы оценки безопасности применения электрической энергии в угольных шахтах» в ДПИ. Профессор кафедры электроснабжения промышленных предприятий и городов Донецкого государственного технического университета (ДГТУ), Украина.*

Совпель Валерий Борисович_ *окончил энергетический факультет Львовского политехнического института (ЛПИ) в 1961 г. В 1971 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Теоретическая электротехника» в ЛПИ. Скончался в 1997 г.*

Ярмоленко Валентин Иванович *окончил электротехнический факультет ДПИ в 1968 г. Доцент кафедры электроснабжения промышленных предприятий и городов ДГТУ, Украина.*