

С.Г. Антошук, д-р техн. наук,
А.А. Николенко, канд. техн. наук,
Е.В. Ткаченко

АНАЛИЗ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ МУЛЬТИМАСШТАБНОМ КОНТУРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Виконано аналіз базисних функцій вейвлет-перетворення при мультимасштабному контурному поданню зображень. У статті наведена порівняльна оцінка частотно-селективних властивостей деяких симетричних непарних базисних вейвлет-функцій. Виконано розрахунок раціональної частоти дискретизації при реалізації на дискретних фільтрах. Досліджена завадостійкість.

Выполнен анализ базисных функций вейвлет-преобразования при мультимасштабном контурном представлении изображений. В статье приведена сравнительная оценка частотно-избирательных свойств ряда симметричных нечетных базисных вейвлет-функций. Проведен расчет рациональной частоты дискретизации при реализации на дискретных фильтрах. Исследована помехоустойчивость.

The analysis of wavelet-transform base functions at multiscale contour representation of images is executed. The comparative estimation of frequency selected properties of some symmetric odd base wavelet functions is conducted in the article. The calculation of rational sample frequency is led during realization on discrete filters. The noise stability is investigational.

Одной из базовых процедур при распознавании объектов на изображении является контурная сегментация, которая позволяет существенно сократить объем обрабатываемой информации и обеспечить инвариантность к трансформациям интенсивности. Качество этой процедуры во многом определяет эффективность, оперативность и ресурсоемкость автоматизированной системы обработки и распознавания изображений в целом. Контурная сегментация, как правило, состоит из двух этапов: подчеркивание перепадов интенсивности и принятие решение о наличии границы объекта.

Следует отметить, что в ряде приложений для повышения эффективности распознавания целесообразно иерархическое представление объектов на изображении или представление с разной детализацией. В связи с этим, в последнее время возрос интерес к мультимасштабному представлению изображений объектов и методам контурного анализа с различной степенью детализации [1,2,5,6].

Для мультимасштабного контурного представления изображения применяется

непрерывное вейвлет-преобразование (ВП) [4,5]. Такое преобразование на этапе подчеркивания контуров благодаря свойству пространственно-частотной локализации позволяет регулировать степень детализации.

Однако вейвлет-анализ оставляет большую свободу в конкретном выборе базисных функций с учетом характера изображения и решаемой задачи. Анализ разных базисов вейвлет-преобразования (ВП) показал, что для рассматриваемой задачи могут применяться действительные вейвлеты, заданные в виде симметричных нечетных функций $\psi(x) = -\psi(x)$, имеющих компактный или эффективный носитель, в частности, вейвлеты Гаусса, базисные функции гиперболического вейвлет-преобразования (ГВП) и т.д. [3,4,5]. Выбор базисных функций осуществляется в соответствии с поставленной задачей и учетом их частотно-избирательных свойств.

В статье проведен анализ и сравнительная оценка частотно-избирательных свойств ряда базисных вейвлет-функций для мультимасштабного контурного представления объектов на изображении.

В качестве базисных рассмотрены следующие функции:

вейвлет Хаара

$$\psi(x, s) = \begin{cases} 0, & |x| > s \\ \text{sign}(x), & |x| \leq s \end{cases}; \quad (1)$$

вейвлет Гаусса

$$\psi(x, s) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{s} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right);$$

«расщепленная» функция Гаусса

$$\psi(x, s) = \frac{\text{sign}(x)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right); \quad (3)$$

– ограниченный синус

$$\psi(x, s) = \begin{cases} 0, & |x| > s\pi \\ \sin\left(\frac{x}{s}\right), & -s\pi \leq x \leq s\pi; \end{cases} \quad (4)$$

– функции ГВП:

$$\psi(x, s) = \begin{cases} 0, & |x| > \gamma s; \\ -\frac{1}{1 - \frac{x+1}{s}}, & -\gamma s \leq x \leq -\varepsilon; \\ 0, & -\varepsilon < x < \varepsilon; \\ \frac{1}{1 + \frac{x-1}{s}}, & \varepsilon \leq x \leq \gamma s, \end{cases} \quad (5)$$

где s – масштабный уровень, ε , γ – некоторые параметры преобразования.

Эти функции могут использоваться в качестве базисных вейвлет-преобразования, поскольку удовлетворяют необходимым требованиям (локализации, допустимости, осцилляции и ограниченности) [5].

Для оценки частотно-избирательных свойств базисных функций выполнен анализ их амплитудно-частотных характеристик.

Преобразование Фурье «расщепленной» функции Гаусса (3) с учетом ее нечетности определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega, s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign}(x)}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2s^2}\right)} \cdot e^{-j\omega x} dx = \\ &= -j \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} \sin(\omega x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом соотношения

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(\omega x) dx = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_0^{\frac{\omega}{2}} e^{-z^2} dz, \quad (7)$$

получено

$$\hat{\psi}(\omega, s) = -j \frac{2s}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(\omega s)^2}{2}} \int_0^{\frac{\omega s}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz. \quad (8)$$

Модуль АЧХ

$$|\hat{\psi}(\omega, s)| = \frac{2s}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(\omega s)^2}{2}} \int_0^{\frac{\omega s}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz, \quad (9)$$

имеет экстремум в точке $\omega_{extr} \approx \frac{1,31}{s}$.

Таким образом, значение частоты в точке экстремума уменьшается обратно пропорционально масштабному уровню ВП, что указывает на частотно-избирательные свойства вейвлета на основе «расщепленной» функции Гаусса.

Аналогично проведен анализ частотных свойств базисных функций (1), (2), (4), (5). Значение частоты в точке экстремума для всех функций определяется зависимостью

$$\omega_{extr} = \frac{k}{s}, \quad (10)$$

где s – масштабный уровень, k – некоторая константа, определяемая типом базисной функции (табл.1).

Таким образом, анализируемые базисные вейвлет-функции имеют различные частотно-избирательные свойства – значение частоты в точке экстремума на одинаковом масштабе отличается. Это необходимо учитывать при выборе базиса для мультимасштабного контурного представления изображений.

Вторым важным вопросом, связанным с непрерывным вейвлет-преобразованием, является его реализация при обработке изображений. При компьютерной обработке изображение рассматривается как двумерная матрица, заданная дискретными отсчетами. Причем двумерные операции могут быть заменены одномерными по строкам и по столбцам (строка либо столбец изображения может рассматриваться как дискретная последовательность $\{f_n\}$).

Непрерывное ВП некоторой дискретной последовательности определяется как свертка этой последовательности с базисной функцией ψ_0 , которая соответствующим образом переформируется с масштабом s и сдвигается по пространственной шкале на

интервал $n\Delta x$:

$$W(n, s) = \sum_{n'=0}^{N-1} f_{n'} \Psi^* \left(\frac{(n' - n)\Delta x}{s} \right). \quad (11)$$

1. Характеристики вейвлет-функций

Вейвлет	Модуль АЧХ	ω_{extr}
Хаара	$\frac{4 \sin^2 \frac{\omega s}{2}}{\omega}$	$\frac{2.33}{s}$
Гаусса	$\omega s^2 e^{-\frac{\omega^2 s^2}{2}}$	$\frac{1}{s}$
«Расщепленная» функция Гаусса	$\frac{2s}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(\omega s)^2}{2}} \int_0^{\frac{\omega s}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz$	$\frac{1.31}{s}$
Ограниченный синус	$\frac{2s}{1 - \omega^2 s^2} \cdot \sin(s\omega\pi)$	$\frac{0.838}{s}$
Функция ГВП	$2s \int_{\varepsilon}^{\gamma s} \frac{\sin(\omega x)}{s + x - 1} dx$	$\frac{2.84}{\gamma s}$

Таким образом, изменение масштабного уровня s непрерывного вейвлета с дискретизацией с шагом Δx_w эквивалентно дискретизации начального вейвлета с новым шагом $\Delta x_s = \frac{\Delta x_w}{s}$. Полученный в результате дискретный вейвлет является масштабированным начальным вейвлетом. При таком подходе к определению масштаба вейвлета дискретный вейвлет является аппроксимацией непрерывного вейвлета и совпадает с ним при $s \rightarrow \infty$ ($\Delta x_s \rightarrow 0$), а аналогом масштабного коэффициента s выступает изменяющееся количество отсчетов импульсной характеристики, т.е. длина дискретного вейвлет-фильтра.

Тогда, изменяя масштабный коэффициент s и величину сдвига вейвлетной функции, можно локализовать любые особенности изображения в пространстве масштабов.

При выборе шага дискретизации Δx_w стараются его максимизировать (или минимизировать частоту дискретизации), это обусловлено желанием снизить количе-

ство арифметических операций, требуемых для реализации алгоритма, которое пропорционально числу отсчетов, подвергаемых обработке. Таким образом, правильный выбор частоты дискретизации позволяет сохранить свойства непрерывного вейвлет-преобразования при дискретной реализации и определяет быстрдействие алгоритма преобразования. Непосредственно применить теорему Котельникова не представляется возможным, поскольку базисные функции ВП имеют конечный носитель (т.е. удовлетворяют условию локализации) и неограниченный спектр. Поэтому для определения максимальной частоты ω_{max} в спектре базисной функции найдем вклад частот от 0 до ω_{max} в энергию сигнала, т.е. положим

$$\frac{E_{max}}{E_{\infty}} = \beta, \quad (12)$$

где E_{max} – энергия сигнала в полосе частот $0 - \omega_{max}$, E_{∞} – полная энергия сигнала, $\beta < 1$. Имеем

$$E_{\infty}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega, s)|^2 d\omega = \quad (13)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, s)|^2 dx = 2 \int_0^{\infty} |\psi(x, s)|^2 dx,$$

$$E_{max}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} |\hat{\psi}(\omega, s)|^2 d\omega = \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{max}} |\hat{\psi}(\omega, s)|^2 d\omega.$$

Тогда уравнение для определения ω_{max} имеет вид:

$$\int_0^{\omega_{max}} |\hat{\psi}(\omega, s)|^2 d\omega = 2\pi\beta \int_0^{\infty} |\psi(x, s)|^2 dx. \quad (15)$$

Решая (15) для конкретной базисной функции, можно найти ω_{max} .

Например, если для ГВП

$$\int_0^{\infty} |\psi(x, s)|^2 dx = \int_{\varepsilon}^{\gamma} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x-1}{s}\right)^2} = \quad (16)$$

$$= \frac{s^2(\gamma s - \varepsilon)}{(s + \varepsilon - 1)(s + \gamma s - 1)},$$

уравнение (15) приобретает вид

$$\frac{4s^2}{\pi} \int_0^{\omega_{max}} \left| \int_{\varepsilon}^{\gamma s} \frac{\sin(\omega x)}{s+x-1} dx \right|^2 d\omega = \quad (17)$$

$$= 2\beta \frac{s^2(\gamma s - \varepsilon)}{(s + \varepsilon - 1)(s + \gamma s - 1)}.$$

или

$$\int_0^{\omega_{max}} \left| \int_{\varepsilon}^{\gamma s} \frac{\sin(\omega x)}{s+x-1} dx \right|^2 d\omega = \quad (18)$$

$$= \frac{\pi\beta(\gamma s - \varepsilon)}{2(s + \varepsilon - 1)(s + \gamma s - 1)}.$$

Численно решая (18) при $\beta = 0.95$, $\gamma = 8$ и $\varepsilon = 1$ находим значение $\omega_{max}s = 6.86 c^{-1}$.

Отсюда можно определить период дискретизации T , частоту дискретизации f_d и минимальное количество точек дискретизации базисной функции (порядок n дискретного фильтра (ДФ), реализующего ВП)

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{max}}, \quad n \geq \frac{2\gamma s}{T} \quad \text{и} \quad f_d = \frac{1}{T}. \quad (19)$$

Аналогичные расчеты проведены для остальных базисных функций (1) ... (4) (табл. 2).

При полученных значениях частота дискретизации f_d является рациональной, т.е. достаточно высокой для того, чтобы не возникло наложение спектров дискретизированных функций. Основные свойства непрерывных функций сохраняются.

Эксперименты показали, что амплитудно-частотные характеристики соответствующей непрерывной функции (1) ... (4) и ее дискретной реализации достаточно близки. Среднеквадратическая ошибка при этом (ошибка аппроксимации) не превышала 5%.

Уменьшение частоты дискретизации приводит к наложению спектров, что соответствует понижению разрешающей способности обработки. Это является важным свойством для мультимасштабного контурного представления изображений.

Проведено исследование помехоустойчивости и точности определения границы объектов для рассмотренных базисных функций.

В качестве тестовой была выбрана модель строки идеального (скачкообразного) перепада при наличии гауссовского шума. Получена зависимость значения ошибки оп-

ределения координаты перепада интенсивности от отношения сигнал/шум по мощности (от 1 до 50) для различных значений порядка дискретных фильтров на базе «расщепленной» функции Гаусса (рисунок). При увеличении порядка фильтра, что соответствует уменьшению частоты дискретизации, помехоустойчивость возрастает за счет фильтрации высокочастотных составляющих. Кроме того, при фиксированном уровне шума с увеличением порядка фильтра уменьшается ошибка определения координаты перепада.

2. Результаты расчета для базисных функций

Функция	Уравнение для нахождения ω_{max}	$\omega_{max}s, f_d, n$
Хаара	$\int_0^{\omega_{max}} \frac{\sin^4\left(\frac{\omega s}{2}\right)}{\omega^2} d\omega = 2\pi\beta s$	$\omega_{max}s = 20c^{-1}$ $n > 15$ $f_d > 0.07 Hz$
Гаусса	$\int_0^{\omega_{max}} \omega^2 e^{-(\omega s)^2} d\omega = \frac{\beta s \sqrt{\pi}}{4}$	$\omega_{max}s = 2.0c^{-1}$ $f_d > 0.16 Hz$ $n \geq 9$
«Расщепленная» функция Гаусса	$\int_0^{\omega_{max}} \left(\int_0^{\frac{\omega s}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz \right)^2 e^{-(\omega s)^2} d\omega = \frac{\beta\pi\sqrt{\pi}}{8s}$	$\omega_{max}s = 14c^{-1}$ $f_d > 0.21 Hz$ $n \geq 25$
Ограниченный синус	$\int_0^{\omega_{max}} \frac{\sin^2(s\omega\pi)}{(1 - (\omega s)^2)^2} d\omega = \frac{\beta\pi^2}{4s}$	$\omega_{max}s = 1.5c^{-1}$ $f_d > 0.08 Hz$ $n \geq 9$
Функция ГВП	$\int_0^{\omega_{max}} \left \int_{\varepsilon}^{\gamma s} \frac{\sin \omega x}{s+x-1} dx \right ^2 d\omega = \frac{\pi\beta(\gamma s - \varepsilon)}{2(s + \varepsilon - 1)(s + \gamma s - 1)}$	$\omega_{max}s = 6.9c^{-1}$ $\gamma = 8$ $\varepsilon = 1$ $f_d > 0.08 Hz$ $n \geq 16$

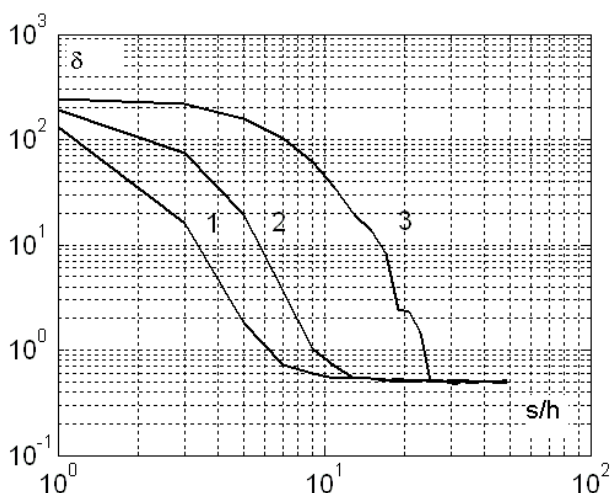


Рисунок. Ошибка δ определения координаты идеального перепада при разных отношениях сигнал/шум s/h (в пикселях) для дискретного фильтра на базе «расщепленной» функции Гаусса: 1 – $n=27$; 2 – $n=17$; 3 – $n=7$

При отношении сигнал/шум более 4 (по мощности) и порядке фильтра более 25 ошибка в определении координаты перепада не превышает 4 пикселя для дискретных фильтров на базе функций (1) - (3) и 3 пикселей для функций (4) - (5).

Выводы. Проведен анализ основных функций, которые применяются в качестве базовых вейвлет-преобразования, исследована АЧХ. Рассчитана рациональная частота дискретизации этих функций для реализации ВП на дискретных фильтрах. Применение рассмотренных функций позволяет получать требуемые помехоустойчивость и разрешающую способность, обеспечить пространственно-частотную локализацию и регулируемую детализацию изображения объекта распознавания, что особенно важно при мультимасштабном контурном представлении объектов на изображении.

Список использованной литературы

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р.Гонсалес, Р.Вудс – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Введение в контурный анализ; приложения к обработке изображений и сигналов / [Фурман Я.В., Кривецкий А.В., Передреву

А.К., и др.]; под ред. Я.А.Фурмана. — [2-е изд.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.— 592 с

3. Иерархический подход при контурном анализе изображений / [Антошук С.Г., Бабилунга О.Ю., Николенко А.А. Ткаченко Е.В.] // Искусственный интеллект — ПШШ “Наука і освіта”. – 2005. – № 34. – С. 605- 603.

4. Контурная сегментация полутоновых изображений методами вейвлет-анализа / [Антошук С.Г., Бабилунга О.Ю., Николенко А.А., Буряк Т.А.] // Искусственный интеллект – ПШШ “Наука і освіта”.– 2007.– № 42.– С.171-175.

5. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла.— М.:Мир, 2005. – 671 с.

6. Яне Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне. – М.: Техносфера, 2007. – 584 с.

Получено 30.03.2009



Антошук Светлана Григорьевна,
д-р.техн. наук, профессор,
директор ИКС, зав.каф.ИС
Одесск.нац.политехн.ун-та
8-048-7348-584
asg@ics.opu.ua



Николенко Анатолий Александрович,
канд. техн. наук, доцент
кафедры ИС
Одесск.нац.политехн.ун-та
тел. 8-048- 7348356



Ткаченко Елена Викторовна,
ассистент кафедры ИС
Одесск.нац.политехн.ун-та
тел. . 8-048-7348356