

УДК 515.2

А.В. Павленко, А.С. Поливанчук, студенты;

В.И. Ахонин, канд. техн. наук, доц.; И.К. Юрченко, канд. техн. наук, доц.

Донецкий национальный технический университет

г. Донецк, Украина

ng_donntu@mail.ru

ЗАДАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ ОДНОГО ОТНОШЕНИЯ В ТОЧЕЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Особое место в технических приложениях занимают кривые одного отношения в точечном представлении [1,2]:

- эти кривые обладают управляемой гибкостью, что важно для конструктора криволинейных форм;
- они могут определяться системой линейных точечных уравнений, которые представляются простым геометрическим и вычислительным алгоритмом;
- исключением вспомогательных точек легко получить точечное их уравнение.

Среди таких кривых находятся кривые вида Безье, свойства которых достаточно полно изучены. Приведем геометрический и вычислительный алгоритмы некоторых из кривых вида Безье (второго и третьего порядка) для того, чтобы глубже уяснить существо предлагаемых нами к заданию и исследованию кривых.

Зададим их не традиционно, через ломаную Бернштейна с помощью векторов, а точно, как кривые одного отношения.

Кривая Безье второго порядка.

Эта кривая представляет собой дугу AB параболы второго порядка (рис.1). Определим ее параметром инвариантным относительно параллельного проецирования:

$$t = \frac{AP}{AC} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PM}{PQ}.$$

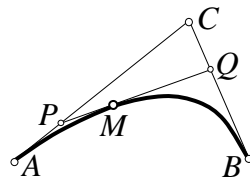


Рисунок 1- Парабола

Применяя алгебраические действия с точками:

$$t = \frac{A - P}{A - C} = \frac{C - Q}{C - B} = \frac{P - M}{P - Q},$$

получим кривую, заданную системой трех линейных точечных уравнений:

$$P = A\bar{t} + Ct, \quad Q = C\bar{t} + Bt, \quad M = P\bar{t} + Qt, \quad \text{где } \bar{t} = 1 - t.$$

Исключая промежуточные точки P, Q , получим точечное уравнение дуги AB параболы:

$$M = A\bar{t}^2 + 2C\bar{t}t + Bt^2, \quad \text{где } 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Кривая Безье третьего порядка.

Такая кривая традиционно называется просто кривой Безье без указания порядка. Ее определим точно, как кривую одного отношения в системе четырех точек AB_1B_2B (рис.2):

$$t = \frac{AK_1}{AB_1} = \frac{B_1K_2}{B_1B_2} = \frac{B_2K_3}{B_2B} = \frac{K_1P}{K_1K_2} = \frac{K_2Q}{K_2K_3} = \frac{PM}{PQ}.$$

Эта кривая алгеброй точек определяется системой шести линейных точечных уравнений:

$$K_1 = A\bar{t} + B_1t, \quad K_2 = B_1\bar{t} + B_2t,$$

$$K_3 = B_2\bar{t} + Bt, \quad P = K_1\bar{t} + K_2t,$$

$$Q = K_2\bar{t} + K_3t, \quad M = P\bar{t} + Qt.$$

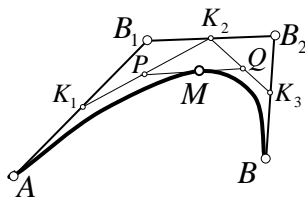


Рисунок 2 – Кривая Безье

Исключая вспомогательные точки K_1, K_2, K_3, P, Q , получим точечное уравнение дуги AB кривой Безье третьего порядка:

$$M = A\bar{t}^3 + 3B_1\bar{t}^2t + 3B_2\bar{t}t^2 + Bt^3, \quad \text{где } 0 \leq t \leq 1. \quad (2)$$

Легко видеть, что кривая (1) в симплексе ABC присутствует в алгоритме (рис.2) в симплексах AB_1B_2 и B_1B_2B с текущими точками P и Q . Можно сделать вывод, что точки P и Q движутся по параболам второго порядка расположенным в плоскостях AB_1B_2 и B_1B_2B , образуя точкой M параболу третьего порядка.

Дополнительная кривая 1.

Исключим из графического алгоритма (рис.2) звено K_2K_3 , получим новую кривую пяти звеньев (рис.3):

$$K_1 = A\bar{t} + B_1t, \quad K_2 = B_1\bar{t} + B_2t,$$

$$K_3 = B_2\bar{t} + Bt, \quad P = K_1\bar{t} + K_2t,$$

$$M = P\bar{t} + K_3t.$$

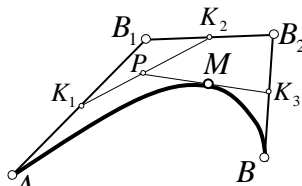


Рисунок 3 – Дополнительная кривая 1

Аналогично предыдущим алгебраическим преобразованиям для кривых парабол второго и третьего порядка, исключая промежуточные точки K_1, K_2, K_3, P , получим точечное уравнение **дополнительной кривой 1**:

$$M = A\bar{t}^3 + 2B_1\bar{t}t^2 + B_2\bar{t}t(t+1) + Bt^2. \quad (3)$$

Определим свойства предложенной кривой (3). Прежде всего, отметим, что это кривая третьего порядка (при точке A – параметр находится в третьей степени). При $t = 0 \rightarrow M \equiv A$, что означает, что кривая проходит через точку A при $t = 0$. Далее, при $t = 1 \rightarrow M \equiv B$, следовательно, мы имеем дугу AB при $0 \leq t \leq 1$. Если выделить подсимплекс AB_1B_2 (рис.3), то согласно предыдущему (рис.2), точка P движется по параболе:

$$P = A\bar{t}^2 + 2B_1\bar{t}t + B_2t^2, \text{ где } 0 \leq t \leq 1.$$

В кривой Безье (2) (рис.2) AB_1 и BB_2 являются касательными в точках A и B . Проверим эти свойства для нашей дуги (3) (рис.3) для чего определим производную ее:

$$M + \dot{M} = A(\bar{t}^3 - 3\bar{t}^2) + 2B_1(\bar{t}\bar{t}^2 + \bar{t}^2 - 2\bar{t}t) + \\ + B_2(\bar{t}t^2 + \bar{t}t - t^2 + 2t\bar{t} - t + \bar{t}) + B(t^2 + 2t).$$

При $t = 0$ получаем точку, не принадлежащую прямой AB_1 , а при $t = 1$ получаем точку на прямой BB_2 . Делаем вывод, что кривая имеет касательную BB_2 в точке B .

Утверждение. Предложенная нами кривая (3) одного отношения с графическим алгоритмом (рис.3) является, в общем случае, кривой третьего порядка, двоякой кривизны, проходит через точки A и B и имеет касательную BB_2 в точке B .

Если точки A, B, B_1, B_2 принадлежат плоскости, то кривая (3) будет плоской.

Дополнительная кривая 2.

Исключим из графического алгоритма (рис.3) звено K_1K_2 , переобозначим точки, получим новую кривую из трех звеньев (рис.4). В симплексе $ABCD$ определим кривую системой линейных точечных уравнений:

$$P = (B - A)t + A; Q = (D - C)t + C; M = (Q - P)t + P.$$

Подставим значения промежуточных точек P, Q в последнее линейное уравнение:

$$M = (Q - P)t + P = [(D - C)t + C - (B - A)t - A]t + (B - A)t + A = \\ = A(1 - 2t + t^2) + B(t - t^2) + C(t - t^2) + Dt^2 = A\bar{t}^2 + B\bar{t}t + C\bar{t}t + Dt^2.$$

Получили кривую с точечным уравнением:

$$M = A\bar{t}^2 + (B + C)\bar{t}t + Dt^2. \quad (4)$$

Исследуем кривую (4). При $t = 0 \rightarrow M \equiv A$, следовательно, кривая проходит через точку A . Далее, $t = 1 \rightarrow M \equiv D$, т.е. уравнение при $t \in [0,1]$ определяет дугу AD . Определим третью точку, через которую проходит кривая при $t = \frac{1}{2}$: $T = \frac{A+B+C+D}{4}$. Следовательно, кривая проходит через центр тяжести тетраэдра $ABCD$.

Рассмотрим определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} \bar{t}^2 & \bar{t}t & \bar{t} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\bar{t}}{4} \begin{vmatrix} \bar{t} & t & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

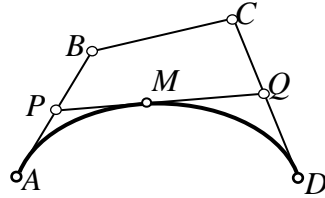


Рисунок 4 -
Дополнительная кривая 2

Отсюда следует, что исследуемая кривая плоская (принадлежит плоскости ADT).

Утверждение. *Скрещивающиеся отрезки AB и DC графическим алгоритмом (рис.4) порождают дугу плоской кривой AD второго порядка, проходящей через центр тяжести тетраэдра $ABCD$.*

Нами предложены две кривые (3), (4), определены их свойства, даны их точечные уравнения, что позволяет их использование в многопараметрическом пространстве.

Библиографический список

1. Балуба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П. Основи математичного апарату точкового числення. /Прикл. геом. та інж. графіка/ Праці ТДАТА Вип.4, т.29. – Мелітополь, 2005. -С. 22-30.
2. С.А. Савин, В.И. Ахонин. Точечное представление некоторых геометрических операций /Прикладные задачи математики в механике, экономике, экологии/. Материалы IV международной студенческой научной конференции, Севастополь, 17 – 21 апреля 2006г. – С. 37 – 41.