УДК 515.2

А.С. Поливанчук, А.В. Павленко, студенты;
В.И. Ахонин, канд. техн. наук, доц.; И.К. Юрченко, канд. техн.наук, доц.
Донецкий национальный технический университет
г. Донецк, Украина
ng_donntu@mail.ru

ЗАДАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ ОДНОГО ОТНОШЕНИЯ В ТОЧЕЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Особое место в технических приложениях занимают кривые одного отношения в точечном представлении [1,2]:

— эти кривые обладают управляемой гибкостю, что важно для конструктора криволинейных форм;
— они могут определяться системой линейных точечных уравнений, которые представляются простым геометрическим и вычислительным алгоритмом;
— исключением вспомогательных точек легко получить точечное их уравнение.

Среди таких кривых находятся кривые вида Безье, свойства которых достаточно полно изучены. Приведем геометрический и вычислительный алгоритмы некоторых из кривых вида Безье (второго и третьего порядка) для того, чтобы глубже уяснить существо предлагаемых нами к заданию и исследованию кривых.

Зададим их не традиционно, через ломаную Бернштейна с помощью векторов, а точечно, как кривые одного отношения.

Кривая Безье второго порядка.

Эта кривая представляет собой дугу AB параболы второго порядка (рис.1). Определим ее параметром инвариантным относительно параллельного проецирования:

$$t = \frac{AP}{AC} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PM}{PQ}.$$

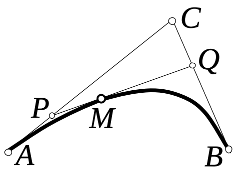

Рисунок 1- Парабола

Применяя алгебраические действия с точками:

$$t = \frac{A-P}{A-C} = \frac{C-Q}{C-B} = \frac{P-M}{P-Q},$$

получим кривую, заданную системой трех линейных точечных уравнений:

$$P = A\overline{t} + Ct, \quad Q = C\overline{t} + Bt, \quad M = P\overline{t} + Qt, \quad \text{где } \overline{t} = 1 - t.$$

Исключая промежуточные точки P, Q, получим точечное уравнение дуги AB параболы:

$$M = A\overline{t}^2 + 2C\overline{t}t + Bt^2, \qquad \text{где } 0 \le t \le 1. \tag{1}$$

Кривая Безье третьего порядка.

Такая кривая традиционно называется просто криваой Безье без указания порядка. Ее определим точечно, как кривую одного отношения в системе четырех точек AB_1B_2B (рис.2):

$$t = \frac{AK_1}{AB_1} = \frac{B_1K_2}{B_1B_2} = \frac{B_2K_3}{B_2B} = \frac{K_1P}{K_1K_2} = \frac{K_2Q}{K_2K_3} = \frac{PM}{PQ}.$$

Эта кривая алгеброй точек определяется системой шести линейных точечных уравнений:

$$K_1 = A\overline{t} + B_1t, \qquad K_2 = B_1\overline{t} + B_2t,$$
$$K_3 = B_2\overline{t} + Bt, \qquad P = K_1\overline{t} + K_2t,$$
$$Q = K_2\overline{t} + K_3t, \quad M = P\overline{t} + Qt.$$

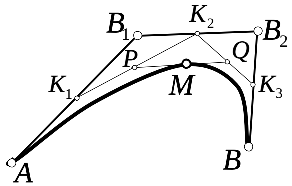

Рисунок 2 – Кривая Безье

Исключая вспомогательные точки K_1, K_2, K_3, P, Q, получим точечное уравнение дуги AB кривой Безье третьего порядка:

$$M = A\overline{t}^3 + 3B_1\overline{t}^2t + 3\overline{t}t^2 + Bt^3, \qquad \text{где } 0 \le t \le 1. \tag{2}$$

Легко видеть, что кривая (1) в симплексе ABC присутствует в алгоритме (рис.2) в симплексах AB_1B_2 и B_1B_2B с текущими точками P и Q. Можно сделать вывод, что точки P и Q движутся по параболам второго порядка расположенным в плоскостях AB_1B_2 и B_1B_2B, образуя точкой M параболу третьего порядка.

Дополнительная кривая 1.

Исключим из графического алгоритма (рис.2) звено K_2K_3, получим новую кривую пяти звеньев (рис.3):

$$K_1 = A\overline{t} + B_1t, \qquad K_2 = B_1\overline{t} + B_2t,$$
$$K_3 = B_2\overline{t} + Bt, \qquad P = K_1\overline{t} + K_2t,$$
$$M = P\overline{t} + K_3t.$$

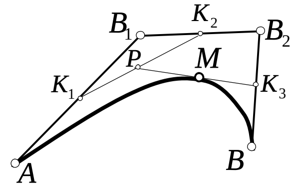

Рисунок 3 – Дополнительная кривая 1

Аналогично предыдущим алгебраическим преобразованиям для кривых парабол второго и третьего порядка, исключая промежуточные точки K_1, K_2, K_3, P, получим точечное уравнение **дополнительной кривой 1**:

$$M = A\overline{t}^3 + 2B_1t\overline{t}^2 + B_2\overline{t}t(t+1) + Bt^2. \tag{3}$$

Опрелим свойства предложенной кривой (3). Прежде всего, отметим, что это кривая третьего порядка (при точке A – параметр находится в третьей степени). При $t=0 \to M \equiv A$, что означает, что кривая проходит через точку A при $t=0$. Далее, при $t=1 \to M \equiv B$, следовательно, мы имеем дугу AB при $0 \le t \le 1$. Если выделить подсимплекс AB_1B_2 (рис.3), то согласно предыдущему (рис.2) , точка P движется по параболе:

$$P = A\bar{t}^2 + 2B_1\bar{t}t + B_2t^2, \quad \text{где } 0 \le t \le 1.$$

В кривой Безье (2) (рис.2) AB_1 и BB_2 являются касательными в точках A и B. Проверим эти свойства для нашей дуги (3) (рис.3) для чего определим производную ее:

$$M + \mathring{M} = A(\bar{t}^3 - 3\bar{t}^2) + 2B_1(t\bar{t}^2 + \bar{t}^2 - 2\bar{t}t) +$$

$$+B_2(\bar{t}t^2 + \bar{t}t - t^2 + 2t\bar{t} - t + \bar{t}) + B(t^2 + 2t).$$

При $t=0$ получаем точку, не принадлежащую прямой AB_1, а при $t=1$ получаем точку на прямой BB_2. Делаем вывод, что кривая имеет касательную BB_2 в точке B.

Утверждение. *Предложенная нами кривая (3) одного отношения с графическим алгоритмом (рис.3) является, в общем случае, кривой третьего порядка, двоякой кривизны, проходит через точки* A *и* B *и имеет касательную* BB_2 *в точке* B.

Если точки A, B, B_1, B_2 принадлежат плоскости, то кривая (3) будет плоской.

Дополнительная кривая 2.

Исключим из графического алгоритма (рис.3) звено K_1K_2, переобозначим точки, получим новую кривую из трех звеньев (рис.4). В симплексе $ABCD$ определим кривую системой линейных точечных уравнений:

$$P = (B-A)t + A; Q = (D-C)t + C; \ M = (Q-P)t + P.$$

Подставим значения промежуточных точек P, Q в последнее линейное уравнение:

$$M = (Q-P)t + P = \left[(D-C)t + C - (B-A)t - A\right]t + (B-A)t + A =$$

$$= A(1-2t+t^2) + B(t-t^2) + C(t-t^2) + Dt^2 = A\bar{t}^2 + B\bar{t}t + C\bar{t}t + Dt^2.$$

Получили кривую с точечным уравнением:

$$M = A\bar{t}^2 + (B+C)\bar{t}t + Dt^2. \qquad (4)$$

Исследуем кривую (4). При $t=0 \to M \equiv A$, следовательно, кривая проходит через точку A. Далее, $t=1 \to M \equiv D$, т.е. уравнение при $t \in [0,1]$ определяет дугу AD. Определим третью точку, через которую проходит кривая при $t = \frac{1}{2}$: $T = \frac{A+B+C+D}{4}$. Следовательно, кривая проходит через центр тяжести тетраэдра $ABCD$.

Рассмотрим определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} \bar{t}^2 & \bar{t}t & \bar{t}t & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{t}{4}\begin{vmatrix} \bar{t} & t & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

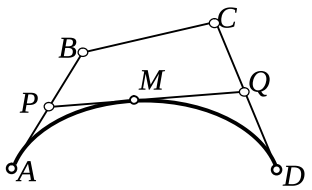

Рисунок 4 - Дополнительная кривая 2

Отсюда следует, что исследуемая кривая плоская (принадлежит плоскости ADT).

Утверждение. *Скрещивающиеся отрезки* AB *и* DC *графическим алгоритмом (рис.4) порождают дугу плоской кривой* AD *второго порядка, проходящей через центр тяжести тетраэдра* $ABCD$.

Нами предложены две кривые (3), (4), определены их свойства, даны их точечные уравнения, что позволяет их использование в многопараметрическом пространстве.

Библиографический список

1. Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П. Основи математичного апарату точкового числення. /Прикл. геом. та інж. графіка/ Праці ТДАТА Вип.4, т.29. – Мелітополь, 2005. -С. 22-30.
2. С.А. Савин, В.И. Ахонин. Точечное представление некоторых геометрических операций /Прикладные задачи математики в механике, экономике, экологии/. Материалы IV международной студенческой научной конференции, Севастополь, 17 – 21 апреля 2006г. – С. 37 – 41.