УДК 622

А.С. Поливанчук, А.В.Павленко, студ. 3-го курса
В.И. Ахонин, И.К. Юрченко, доц. канд. техн. наук
Донецкий национальный технический университет

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ КОНСТРУИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВЫДЕЛЕНИЕМ ИЗ КОНГРУЭНЦИИ Кг(2,2)

Метод выделения поверхностей из конгруэнций линий с учетом заданных геометрических условий представляет широкие возможности для конструирования технических и архитектурных форм [1]. В настоящее время разработаны приемы графического и в ряде случаев аналитического задания поверхностей выделяемых из различных конгруэнций.

Конгруэнцией прямых трехмерного пространства называется двухпараметрическое множество прямых. Конгруэнция задается двумя фокальными линиями, которые пересекают все прямые (лучи) конгруэнции. Порядок конгруэнции определяется числом лучей, проходящих через произвольную точку пространства, класс – числом лучей, лежащих в произвольной плоскости пространства. Порядок и класс указываем в скобках.

В данной работе показан способ получения уравнений прямолинейной дуальной конгруэнции Кг (2,2), фокальными фигурами которой являются прямая o и кривая s^2 2-го порядка, а также поверхностей, выделяемых из этой конгруэнции погружением в нее линии[2]. Определителями конгруэнции и выделяемых из неё поверхностей являются линии o, s^2 и погружаемая линия.

Пусть заданы уравнения фокальной прямой o

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

и фокальной кривой s^2

$$\begin{cases} F_3(x,y,z)=0 \\ F_4(x,y,z)=0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$, $F_4(x,y,z)=0$ - полиномы 1-й степени, определяющие плоскости; $F_3(x,y,z)=0$ - полином 2-й степени, определяющий поверхность 2-гопорядка.

Лучи конгруэнции Кг (2, 2) можно получить как ∞^2 прямых пересечений ∞^2 плоскостей t, касательных к фокальной кривой s^2 и ∞^1 плоскостей s пучка o.

Уравнение двухпараметрического множества плоскостей t:

$$F_5(x,y,z,k,c)=0, \qquad (3)$$

где k и c - параметры, определяющие положение плоскости t.

Уравнение однопараметрического множества плоскостей s с осью o:

$$F_1(x,y,z)+kF_2(x,y,z)=0, \qquad (4)$$

где k – параметр, определяющий положение плоскости s в этом множестве, равный параметру k предыдущего множества.

Система уравнений (3) и (4) относительно трех текущих координат x,y,z и двух параметров k и c задает эту конгруэнцию:

$$\begin{cases} F_5(x,y,z,k,c)=0 \\ F_1(x,y,z)+kF_2(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Связывая параметры k и c зависимостью

$$f(k,\ c)=0, \qquad (6)$$

выделим из конгруэнции определённую линейчатую поверхность. Эту зависимость можно определить, погружая в заданную конгруэнцию какую-либо линию m, заданную уравнением:

$$\begin{cases} F_6(x,y,z)=0 \\ F_7(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

Рассматривая совместно уравнения (5) и (7), исключим из них текущие координаты x,y,z, получим зависимость (6). С помощью этой зависимости, исключив из уравнения (5) конгруэнции параметры k и c, находим уравнение

$$\Phi(x,y,z)=0 \qquad (8)$$

линейчатой поверхности, выделенной из конгруэнции, погружением линии m.

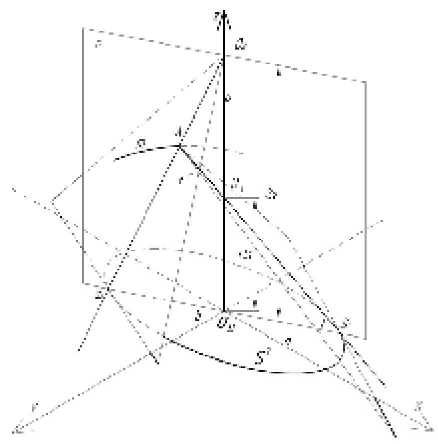

Рисунок 1 – Получение лучей конгруэнции, проходящей через точку А.

Рассмотрим вывод конгруэнции Кг (2,2, когда фокальной кривой s^2 является эллипс, а фокальная прямая o проходит через центр эллипса перпендикулярно его плоскости (рис.1). Расположим прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось z совпала с фокальной прямой o, а оси x и y - с осями эллипса. Тогда уравнение (1) фокальной прямой o будет иметь вид:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases} \qquad (1^*)$$

а уравнение (2) фокальной кривой s^2:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases} \qquad (2^*)$$

Находим уравнении однопараметрического множества касательных к эллипсу (2*):

$$b^2x - ka^2y - ab\sqrt{b^2 + k^2a^2} = 0. \qquad (9^*)$$

Плоскости t , проходящие через это множество касательных, отсекают на фокальной прямой (1*) отрезки $c = O_{12}O.$ Уравнения двухпараметрического множества таких плоскостей:

$$(b^2x - ka^2y)c + ab(z-c)\sqrt{b^2 + k^2a^2} = 0. \qquad (3^*)$$

Уравнение (4) однопараметрического множества плоскостей s с осью (1*):

$$y + kx = 0. \qquad (4^*)$$

Прямолинейная конгруэнция Кг (2,2), заданная фокальными линиями (1*) и (2*), аналитически выражается системой уравнений (3*) и (4*):

$$\begin{cases} (b^2x - ka^2y)c + ab(z-c)\sqrt{b^2 + k^2a^2} = 0 \\ y + kx = 0. \end{cases} \qquad (5^*)$$

Погрузим в эту конгруэнцию линию m (см. рис. 1). Каждая точка A этой линии выделяет из множества плоскостей (4*) одну плоскость s, а из множества плоскостей (3*) две плоскости t' и t''.

При пересечении плоскости s с плоскостями t' и t'' получаем два луча O_1S_1 и O_2S_2 конгруэнции, проходящие через точку A.

Пусть линия m является прямой заданной уравнением

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (7^*)$$

Тогда, решив систему уравнений (5*) и (7*), находим зависимость (6):

$$ce\sqrt{b^2 + k^2a^2} + ab[(qk - p) - c(g - dk)] = 0, \qquad (6^*)$$

где

$$e = \begin{vmatrix} C_1D_1 \\ C_2D_2 \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} B_1D_1 \\ B_2D_2 \end{vmatrix}, \quad p = \begin{vmatrix} A_1D_1 \\ A_2D_2 \end{vmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} A_1C_1 \\ A_2C_2 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}. \qquad (10^*)$$

Исключив с помощью зависимости (6*) параметры k и c из уравнений (5*), получим уравнение линейчатой поверхности

$$\Phi(x, y, z) = 0. \qquad (8^*)$$

Пример. В конгруэнцию заданную фокальной прямой o $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ и фокальной кривой s^2 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ погружена прямая m'' $\begin{cases} x = -5 \\ z = 9{,}05. \end{cases}$

Составить уравнение поверхности Ф(o, s^2, m'') и изобразить её на чертеже.

Согласно (10*) определим коэффициенты $e = -5$; $q = 0$; $p = -9{,}05$; $g = 1$; $d = 0$; поставим их в уравнение (6*) ($a = b = 2$), найдем зависимость между параметрами k и c:

$$c(1 + 2{,}5\sqrt{1 + k^2}) - 9{,}05 = 0$$

Исключив с помощью этой зависимости параметры k и c получаем:

$$x^4 + 1{,}11x^3z + 0{,}26x^2z^2 + x^2y^2 + 0{,}88x^2z - 4x^2 + 1{,}11xy^2z + 0{,}31y^2z^2 = 0.$$

Отметим, что сечение этой поверхности плоскостью, параллельной плоскости координат xOy - конхоида Никомеда. Например, при сечении поверхности плоскостью $z = -3$ получим конхоиду Никомеда (m_1'', m_2''):

$$x^4 - 3{,}33x^3 - 4{,}34x^2 + x^2y^2 - 3{,}33xy^2 + 2{,}79y^2 = 0,$$

с расстоянием от базиса до полюса O_{12}, равным 1,67 и параметром $l = 2{,}67$.

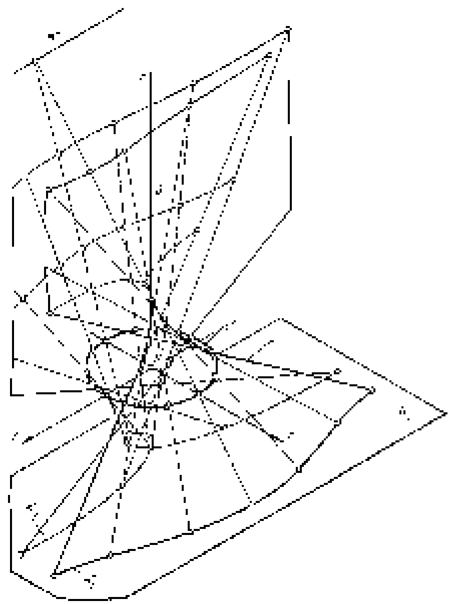

Рисунок 2 – Выделение поверхности из конгруэнции.

Аппарат задания конгруэнции Кг(2,2) определителем o, s^2 и выделение из неё поверхности погружением линии m позволяет конструировать и исследовать линейчатые поверхности различных порядков.

Библиографический список

1.Подгорный А.Л. Конструирование поверхностей оболочек по заданным условиям на основе выделения их из конгруэнции прямых. Сб. “Прикладная геометрия и инженерная графика”. Вып. VIII, К.: Будівельник, 1969. – 216с.

2. Ахонин В. И. Аналитическое выражение поверхности, выделяемой из прямолинейной конгруэнции Кг(2,2). Сб. “Прикладная геометрия и инженерная графика”. Вып. XII, К.: Будівельник, 1971. – 168с.