УДК 622
А.С. Поливанчук, студент;
В.И. Ахонин, И.К. Юрченко, канд. техн. наук, доц.
Донецкий национальный технический университет,
г. Донецк, Украина
nq_donntu@mail.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ, ВЫДЕЛЯЕМОЙ ИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ Кг(2, 2)

Для конструирования различных поверхностей технических деталей и архитектурных сооружений широко применяется метод выделения поверхностей из конгруэнций прямых [1]. Интерес представляет не только изображение полученных поверхностей, но и их аналитическое определение, что позволяет наиболее полно исследовать эти поверхности.

Конгруэнцией прямых трехмерного пространства называется двухпараметрическое множество прямых. Конгруэнция задается двумя фокальными линиями, которые пересекают все прямые (лучи) конгруэнции. Порядок конгруэнции определяется числом лучей, проходящих через произвольную точку пространства, класс – числом лучей, лежащих в произвольной плоскости пространства. Порядок и класс указываем в скобках.

В работе поставлена задача аналитически задать прямолинейную дуальную конгруэнцию **Кг** (2, 2) и получить аналитическую интерпретацию поверхности, выделенной из этой конгруэнции погружением заданной линии [2]. Уравнения фокальных и погружаемых линий будем задавать в параметрической форме, что во многих случаях упрощает решение поставленной задачи.

Пусть заданы уравнения фокальных линий:

$$x = x(c), \quad y = y(c), \quad z = z(c) \tag{1}$$

и

$$x = x(a), \quad y = y(a), \quad z = z(a), \tag{2}$$

где c и a - параметры, определяющие положение любой точки этих линий. Совокупность прямых, соединяющих точки фокальных линий, представляют собой прямолинейную конгруэнцию. Следовательно, аналитическое выражение прямолинейной конгруэнции относительно текущих координат x, y, z и параметров c и a будет иметь вид:

$$\frac{x - x(c)}{x(a) - x(c)} = \frac{y - y(c)}{y(a) - y(c)} = \frac{z - z(c)}{z(a) - z(c)}. \tag{3}$$

Погрузим в эту конгруэнцию линию m

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{4}$$

Решив систему уравнений (3) и (4) найдем зависимость

$$f(c, a) = 0. \tag{5}$$

Исключив с помощью этой зависимости параметры c и a из уравнения (3) конгруэнции, получим уравнение

$$\Phi(x, y, z) = 0 \qquad (6)$$

линейчатой поверхности, выделенной из конгруэнции (3) погружением линии m.

Рассмотрим вывод уравнения конгруэнции **Кг** (2, 2), фокальной прямой o, которой является прямая

$$x = o, \quad y = o, \quad z = c, \qquad (1^*)$$

а фокальной кривой s^2 - эллипс

$$x = a\cos a, \quad y = b\sin a, \quad z = 0. \qquad (2^*)$$

Находим уравнения (3) этой конгруэнции

$$\frac{x}{a \cdot \cos a} = \frac{y}{b \cdot \sin a} = \frac{z - c}{-c}. \qquad (3^*)$$

Погрузим в заданную конгруэнцию произвольную прямую m

$$x = x_0 + l_1 t, \quad y = y_0 + l_2 t, \quad z = z_0 + l_3 t, \qquad (4^*)$$

где x_0, y_0, z_0 - координаты данной точки прямой;

l_1, l_2, l_3 - координаты направляющего вектора прямой.

Подставив значения (4*) в уравнение (3*), исключим из них параметр t. Зависимость (5*) при этом выразится уравнением

$$ce_0 + b(q_0 + l_1 c)\sin a - a(p_0 + l_2 c)\cos a = 0, \qquad (5^*)$$

где

$$e_0 = \begin{vmatrix} x_0 & l_1 \\ y_0 & l_2 \end{vmatrix}, \quad q_0 = \begin{vmatrix} x_0 & l_1 \\ z_0 & l_3 \end{vmatrix}, \quad p_0 = \begin{vmatrix} y_0 & l_2 \\ z_0 & l_3 \end{vmatrix}. \qquad (6^*)$$

Пример. В конгруэнцию (рисунок 1), заданную фокальной прямой o

$$x = o, \quad y = o, \quad z = c$$

и фокальной кривой s^2

$$x = 2\cos a, \quad y = 2\sin a, \quad z = 0,$$

погружена прямая m:

$$x = 1 + 4{,}87t; \quad y = -2{,}76; \quad z = 6{,}21 - 5{,}21t.$$

Составим уравнение линейчатой поверхности, определителем которой являются o, s^2, m. Определив коэффициенты $e_0 = 13{,}44$; $q_0 = -35{,}44$; $p_0 = 14{,}38$ согласно (6*), найдем зависимость (5*) между параметрами c и a:

$$1{,}38c + c\sin a - 7{,}28\sin a - 2{,}95\cos a = 0.$$

Используя эту зависимость, исключим параметры c и a из уравнений (3*) конгруэнции. Получим уравнение линейчатой поверхности Φ 4-го порядка, выделенной из конгруэнции погружением заданной прямой m:

$$x^4 + 4{,}94x^3y + 1{,}87 \cdot x^3z + 7{,}10x^2y^2 + 0{,}88x^2z^2 + 4{,}62x^2yz - 4{,}01x^2 + 9{,}44xy^3 +$$
$$+1{,}87xy^2z + 2{,}72xyz - 19{,}75xy + 6{,}10y^4 + 4{,}62y^3z + 0{,}42y^2z^2 + 6{,}71y^2z -$$
$$-24{,}41y^2 = 0.$$

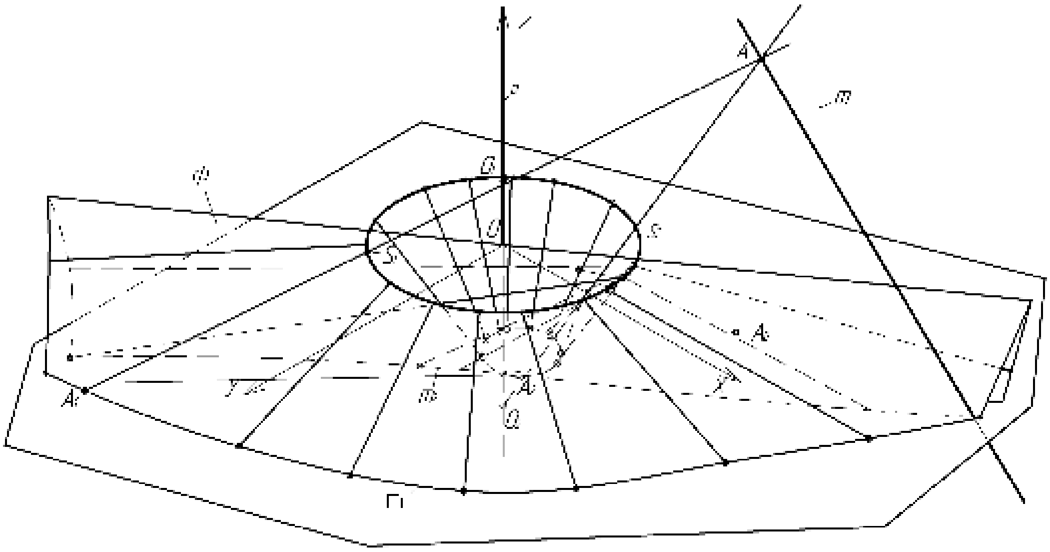

Рисунок 1 – Выделение поверхности из конгруэнции.

На рисунке 1 показана часть поверхности Φ, заключенная между параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = -3$. Через каждую точку A прямой m проходят две образующие поверхности, пересекающие прямую o в точках O_1 и O_2, а кривую s^2 - в точках S_1 и S_2.

Конгруэнция **Кг** (2, 2) между плоскостями d и p пространства устанавливает соответствие 4 – го порядка. Пусть плоскость d проходит через прямую m, а плоскость p задана уравнением $z = -3$. Тогда прямой m в плоскости p будет соответствовать кривая (m_1', m_2) 4 – го порядка:

$$x^4 + 4{,}94x^3y - 5{,}61x^3 + 7{,}10x^2y^2 - 13{,}86x^2y + 3{,}87x^2 + 4{,}94xy^3 - 5{,}61xy^2 -$$
$$-27{,}91xy + 6.10y^4 - 13{,}86y^3 - 40{,}80y^2 = 0.$$

При погружении в конгруэнцию **Кг** (2, 2) кривой n - го порядка выделяется поверхность $4n$ - го порядка.

Рассмотренный способ получения уравнений этих поверхностей может быть использован при конструировании поверхностей различных технических форм.

Библиографический список

1.Обухова В.С. Нелинейные модели на основе проецирования **Кг** (2, m). Сборник “Прикладная геометрия и инженерная графика”. Вып. IX. К.: “Будівельник”, 1969. с. 21 – 32.

2. Ахонин В. И. Конструирование линейчатых поверхностей выделением из прямолинейной дуальной конгруэнции **Кг** (2, 2) Сборник “Прикладная геометрия и инженерная графика”. Вып. XI. К.: “Будівельник”, 1970. с.84 – 89.