

УДК 004.031.43

А. С. Мухачева, канд. физ.-мат. наук,
Р. Р. Ширгазин,

Уфимский Государственный Авиационный
Технический Университет

Задачи упаковки прямоугольников: рандомизированная эвристика на базе двойственной схемы локального поиска оптимума*

Рассматриваются задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу заданной ширины (1.5D Bin Packing Problem 1.5DBPP**) и в прямоугольные листы (2DBPP). В первой задаче требуется минимизировать длину занятой части полосы, а во второй — число использованных листов. При этом основной является 1.5DBPP. Алгоритм разработан на основе двойственной схемы, на каждом шаге которой решаются две задачи линейного раскроя. Для них применяется простая эвристика "первый подходящий с упорядочиванием" (First Fit with Decreasing, FFD) с рандомизацией. Алгоритм позволяет быстро получать близкое к оптимуму решение. Приведены результаты численного эксперимента.

Введение

Интересующие нас задачи 1.5DBPP и 2DBPP формулируются следующим образом.

Задача 1.5DBPP. Имеется прямоугольная полоса заданной ширины W и неограниченной длины, а также набор прямоугольных предметов заданных размеров $w_i, l_i, i = \overline{1, m}$. Необходимо определить параметры (координаты) упаковки предметов в полосу, занимающую минимальную длину, при следующих условиях:

- грани упакованных предметов параллельны границам полосы;
- упакованные предметы не пересекаются друг с другом и с границами полосы.

Исходные данные этой задачи задаются информационным вектором $(W; m; w = (w_1, w_2, \dots, w_m); l = (l_1, l_2, \dots, l_m))$. Выходные данные: длина L за-

нятой части полосы и координаты (X_i, Y_i) нижней левой вершины каждого прямоугольника, $i = \overline{1, m}$, где ось Ox совмещена с нижней полубесконечной гранью полосы, а ось Oy — с вертикальной гранью.

Задача 2DBPP. Имеются прямоугольные листы заданной ширины W и длины L , а также набор прямоугольных предметов с размерами $w_i, l_i,$

$i = \overline{1, m}$. Определить параметры упаковок предметов в минимальное число листов при условиях:

- ребра листов и прямоугольников параллельны;
- упакованные предметы не пересекаются друг с другом и с границами листов.

Информационный вектор для этой задачи $(W; L; m; w; l)$. Выходные данные: число n занятых листов; координаты (X_{iv}, Y_{iv}) прямоугольников i_v

в каждом занятом листе $v = \overline{1, n}$.

Обе задачи являются NP-трудными, т. е. для них не существует точного алгоритма, гарантирующего получение оптимума за полиномиальное от m время [1]. Поэтому наряду с точными разрабатываются и эвристические алгоритмы. Внесение в последние элементы случайности значительно повышает их эффективность. Существуют различные схемы эвристических и вероятностных алгоритмов. Краткий обзор точных и приближенных алгоритмов приведен в [2]. В [3] описан асимптотически точный подход к решению задачи 1.5DBPP с некоторой специальной структурой исходной информации, использующий простую эвристику "следующий подходящий". В работе [4] показана высокая эффективность простых вероятностных эвристик для решения задач линейного раскроя. В работе [5] описана двойственная схема конструирования алгоритмов локального поиска для 1.5DBPP, основанная на решении прямоугодно ориентированных задач линейного раскроя. По двойственной схеме могут конструироваться различные алгоритмы — от простых однопроходных эвристик до точных алгоритмов. Учитывая положительный опыт применения простых эвристик, мы ограничимся описанием вероятностной реализации эвристики "первый подходящий" и приведем результаты численного эксперимента. Для удобства изложения вначале повторим основные понятия, связанные с "двойственной схемой".

Задачи прямоугодно ориентированного раскроя

Базовой в этом параграфе является следующая хорошо изученная проблема [6].

* Работа поддержана РФФИ, проекты 01-01-00510, 02-01-06331.

** Термин 1.5DBPP ввел А. I. Nilkman в 1980 г. для отличия ее от задачи упаковки в листы.

**Рандомизированная эвристика
на базе двойственной схемы для решения
задачи 1.5DBPP**

Базой для любого вероятностного алгоритма локального поиска оптимума служит общий метод локального спуска, который состоит в выполнении следующих процедур:

1. *Инициализация.* Выбрать начальное допустимое решение и вычислить для него значение критерия оптимальности.

2. *Поиск соседнего решения.* Выбрать допустимое соседнее решение из окрестности начального решения и вычислить для него значение критерия (оценочная функция).

3. *Анализ перехода.* Проверить, следует ли совершить переход к новому решению; если да, то принять новое решение в качестве текущего, в противном случае предыдущее решение остается текущим.

4. *Конец.* Завершить работу алгоритма и вывести решение.

При этом используется двойственная схема (Random Local Search Doublicity, **RLSD**). Процедуры инициализации и поиска соседних упаковок представляют последовательное решение пары двойственных задач линейной раскроя. Для поиска соответствующих им L-списков S и \bar{S} на каждом шаге процесса используется приоритетный список π , и для него применяется алгоритм **FF** с учетом **NC** и дополнительных ограничений 1° и 2°.

RLSD генерирует новый список π путем перестановки всех элементов. Из списка случайно выбирается один элемент, и он занимает первую позицию в новом списке; затем из оставшихся элементов старого списка случайно выбирается второй и т. д. до получения нового списка.

Используя полученный список π , решаем задачу **RCSP** (алгоритм **FF** с учетом 1° и 2°) и получаем пару (S, N) . **RCSP*** решается с помощью **FF** с учетом 1° и 2° и условий **NC**. После того, как найден первый попавшийся вариант (\bar{S}, \bar{N}) , возможны следующие случаи:

- если выполнено условие (3), то переходим к п. 3 (*анализ перехода*);
- если условие (3) не выполнено, то переходим к п. 2 (*поиск соседнего решения*).

Процедура *анализа перехода* оставляет лучшую из найденных упаковок и оценивает отклонение δ (в %) ее длины от лучшего решения **RCSP**.

**Применение двойственной схемы
для решения 2DBPP**

Алгоритм сводится к выполнению следующих процедур:

1. *Формирование списка S.* При решении **RCSP** вводится дополнительное условие на добавление элемента в список S : если для элемента j списка π

справедливо $x_j + l_j < L$, то элемент добавляется в список.

2. *Решение RCSP*.* Далее, как было ранее описано, решается **RCSP***. Если допустимое решение **RCSP*** с учетом **NC** найдено, то пара S и \bar{S} определяет упаковку очередного листа, иначе формируем новый список π .

3. *Продолжение.* Исключаем из списка π элементы $i \in S$.

4. *Анализ перехода.* Если список π не пуст, то переходим на п. 1, в противном случае конец.

Вычислительный эксперимент

Эксперимент проводился для иллюстрации работы рандомизированной эвристики на базе **RLSD** для решения 1.5DBPP.

Параметрами генерируемых задач являются:

W — ширина полосы;

m — число прямоугольников;

v_1 и v_2 — нижняя и верхняя границы ширины прямоугольников по отношению к ширине W полосы;

ω_1 и ω_2 — нижняя и верхняя границы длины прямоугольников по отношению к ширине W полосы;

t — время решения задачи (в секундах).

Эксперимент № 1. Цель эксперимента — установить зависимость эффективности упаковки от числа m заготовок и времени t , отпущенного на решение. Параметры эксперимента: $W = 255$; $v_1 = 0,25$; $v_2 = 0,4$; $\omega_1 = 0,15$; $\omega_2 = 0,5$ (средние прямоугольники); число прямоугольников $m = 20, 40, 60, 80$ и время решения $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ с. При этом решались задачи без разворота прямоугольников и с их разворотом на 90° . Число решаемых задач каждого класса — 50. Показателем эффективности являются средние значения коэффициентов раскроя (Cutting Coefficient, **CC**): **CC** — без разворотов прямоугольников, \bar{CC} — с разворотом прямоугольников на 90° . Результаты приведены в табл. 1. Вычисления проводились на ПЭВМ Pentium III-933.

На рис. 1 и 2 изображены графики зависимости средних значений коэффициентов раскроя

Таблица 1

Результаты эксперимента № 1. Набор: $v_1 = 0,25$; $v_2 = 0,4$;
 $\omega_1 = 0,15$; $\omega_2 = 0,5$

t	m							
	20		40		60		80	
	CC	\bar{CC}	CC	\bar{CC}	CC	\bar{CC}	CC	\bar{CC}
5	94,15	96,00	95,44	95,70	94,81	94,33	92,04	88,79
10	94,30	96,20	95,47	96,04	95,57	95,85	95,23	95,53
15	94,82	95,13	95,52	96,21	95,51	95,73	95,40	95,00
20	94,18	96,24	95,65	96,21	95,51	95,73	95,36	95,00
25	94,24	95,92	95,45	95,88	95,40	95,64	95,00	95,16
30	94,30	96,17	95,57	96,14	96,63	95,82	95,43	95,66

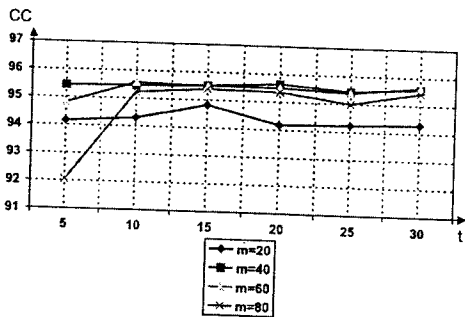


Рис. 1. Зависимость CC от времени t без разворотов прямоугольников

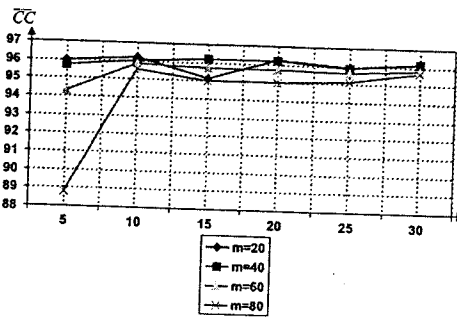


Рис. 2. Зависимость \overline{CC} от времени t с разворотом прямоугольников

(CC и \overline{CC}) от времени t решения задач для $m = 20, 40, 60, 80$.

Выводы по результатам эксперимента № 1

1. При развороте прямоугольников коэффициент раскрытия \overline{CC} по сравнению с CC увеличивается. Исключение представляет случай $t = 5$ с (недостаточно времени для получения допустимого решения).
2. Для $t \geq 10$ значения CC распределены в интервале $[94,18; 95,63]$; \overline{CC} — в интервале $[95,00; 96,24]$.
3. Лучшие значения CC и \overline{CC} достигнуты при $m = 40$.
4. С ростом t незначительно возрастают показатели CC и \overline{CC} .
5. Для $m = 20; 40$ рекомендуемое значение $t \geq 15$ с; для $m = 60; 80 - t \geq 25$ с.

Были проведены эксперименты и для других наборов данных. Результаты оказались аналогичны приведенным, т. е. зависимость $CC(\overline{CC})$ от времени расчета почти линейная и неизменяемая. Для выбора расчетного времени в зависимости от числа m заготовок предложена следующая эмпирическая формула:

$$t(m) = 0,5m + 10(\lfloor 0,01m \rfloor + 1). \quad (5)$$

Эксперимент № 2. Цель эксперимента — установить зависимость показателя эффективности (\overline{CC}) от класса задач и проверить справедливость (5). Параметры эксперимента: $W = 1000$; $m = 20; 40; 60; \dots; 180$; расчетное время $t(m)$ найдено согласно (5). Проведен эксперимент для трех наборов данных:

Набор № 1: $v_1 = 0,25; v_2 = 0,4; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,5$.

Набор № 2: $v_1 = 0,15; v_2 = 0,3; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,5$.

Набор № 3: $v_1 = 0,10; v_2 = 0,5; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,5$.

Расчеты проводились только с разворотом прямоугольников.

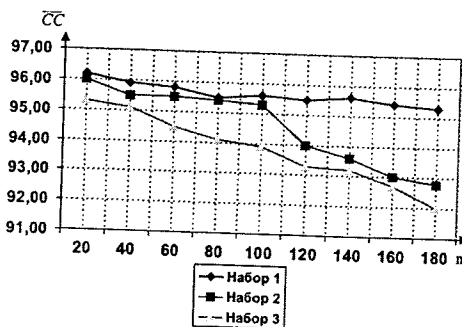


Рис. 3. Зависимость \overline{CC} от числа m прямоугольников

Результаты эксперимента № 2

Таблица 2

m	20	40	60	80	100	120	140	160	180
T	20	30	40	50	70	80	90	100	110
Набор № 1: $v_1 = 0,25; v_2 = 0,4; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,5$									
\overline{CC}	96,2	95,9	95,8	95,5	95,6	95,5	95,6	95,4	95,3
$\bar{\delta}$	0,5	4,7	2,0	3,5	3,6	3,4	3,5	3,0	2,6
Набор № 2: $v_1 = 0,15; v_2 = 0,3; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,5$									
\overline{CC}	96,0	95,5	95,5	95,4	95,3	94,0	93,6	93,0	92,8
$\bar{\delta}$	2,0	2,2	3,7	2,3	3,13	5,8	7,3	6,1	6,6
Набор № 3: $v_1 = 0,10; v_2 = 0,5; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,5$									
\overline{CC}	95,3	95,1	94,5	94,1	93,9	93,3	93,2	92,7	92,0
$\bar{\delta}$	3,1	2,9	2,8	3,0	3,5	5,3	4,0	5,1	6,5

Таблица 3

Результаты эксперимента № 3						
m	20	40	60	80	100	120
T	20	30	40	50	70	80
Набор № 4: $v_1 = 0,25; v_2 = 0,40; \omega_1 = 0,35; \omega_2 = 0,60$						
\overline{CC}	96,04	96,20	96,19	96,05	96,1	96,12
$\bar{\delta}$	0	5,3	1,8	3,5	2,8	2,1
Набор № 5: $v_1 = 0,10; v_2 = 0,15; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,20$						
\overline{CC}	91,64	91,34	91,36	91,64	89,1	88,5
$\bar{\delta}$	2,5	6,0	3,9	5,1	8,7	8,09

Показатели эффективности: коэффициент раскроя \overline{CC} и отклонение $\bar{\delta}$ длины лучшей упаковки от решения RCSP. Результаты приведены в табл. 2, графики изображены на рис. 3.

Выводы по результатам эксперимента № 2

1. Эмпирическая формула (5) для вычисления $t(m)$ оказалась верной для набора 1.
2. Лучшие результаты получены для набора 1.
3. Для наборов № 2 и 3 зависимость (5) подтверждена при $m < 100$. Вместе с тем при $m \geq 100$ эффективность снижается незначительно.
4. Все три набора можно отнести к классу RLSД-легких.

Эксперимент № 3. Цель эксперимента — демонстрация RLSД-легкого и RLSД-трудного наборов. Параметры эксперимента: $W = 1000; m = 20; 40; 60; 80; 100; 120$. Время подсчитано по формуле (5). Проведен эксперимент для двух наборов данных, предположительно RLSД-легкого и RLSД-трудного.

Набор № 4: $v_1 = 0,25; v_2 = 0,40; \omega_1 = 0,35; \omega_2 = 0,60$.

Набор № 5: $v_1 = 0,10; v_2 = 0,15; \omega_1 = 0,15; \omega_2 = 0,20$.

Расчеты проведены с поворотом прямоугольников. В первом наборе все заготовки крупные, во втором — средние. Общее для этих наборов: ширина каждого прямоугольника мало отличается от длины, и размеры каждого прямоугольника мало различаются между собой.

Показателем эффективности служат коэффициент раскроя \overline{CC} и отклонение $\bar{\delta}$. Результаты приведены в табл. 3, графики изображены на рис. 4.

Выводы по результатам эксперимента № 3

1. Можно назвать набор № 4 RLSД-легким, а набор № 5 — RLSД-трудным.

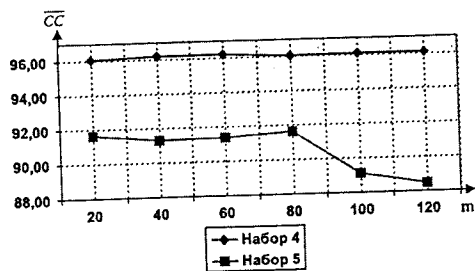


Рис. 4. Поведение RLSД-легкого и RLSД-трудного наборов при различных m

2. Эмпирическая формула для вычисления $t(m)$ оказалась верной для RLSД-легкого набора № 4, \overline{CC} при этом больше 96 % для различных m .

3. Для RLSД-трудного набора № 5 падение \overline{CC} произошло при $m \geq 100$. Значения \overline{CC} распределены на отрезке [88,5; 91,6]. Это самый низкий результат из всех рассмотренных наборов.

Предложена простая версия двойственной схемы, использующая рандомизированный алгоритм "первый подходящий". Ввиду своей простоты она может быть принята в качестве эталона при создании других версий и алгоритмов. Прежде всего можно проводить эксперименты на тех же наборах. Однако для полноты представления о поведении алгоритмов нужно продолжить эксперимент с RLSД в целях классификации наборов исходной информации.

Список литературы

1. Гери М. П., Джонсон Д. С. Вычислительные машины и трудноразрешимые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. Мухачева Э. А. Обзор и перспективы развития комбинаторных методов решения задач раскроя и упаковки // Материалы конференции "Дискретный анализ и исследование операций". Новосибирск. 2002. С. 80—87.
3. Гимади Э. Х., Залюбовский В. В., Шарыгин П. Н. Задача упаковки в полосу: асимптотически точный подход // Известия высших учебных заведений. 1997. № 12 (427). С. 34—44.
4. Усманова А. Р. Вероятностные жадные эвристики для задачи упаковки в контейнеры // Материалы конференции ОПТИМ-2001. Санкт-Петербург. 2001. С. 141—146.
5. Мухачева Э. А., Мухачева А. С. Конструирование алгоритмов локального поиска оптимума прямоугольной упаковки на базе двойственных задач линейного раскроя // Информационные технологии. 2002. № 6. С. 25—30.
6. Мухачева Э. А., Белов Г. Н., Мухачева А. С. Метод последовательного уточнения оценок: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя // Информационные технологии. 2000. № 2. С. 11—17.