Новиков Д.А.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Настоящий материал содержит определения нечетких множеств, нечетких отношений и принципа обобщения, описание их свойств, а также модель принятия решений при нечеткой исходной информации.

Нечеткие множества. Пусть X – некоторое множество. *Нечетким подмножеством* $\tilde{A}$ множества X называется множество пар $\tilde{A} = \{m_{\tilde{A}}(x), x\}$, где $x \in X$, $m_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]$. Функция $m_{\tilde{A}} : X \to [0, 1]$ называется *функцией принадлежности* нечеткого множества $\tilde{A}$, а X – *базовым множеством*. Далее в этом приложении нечеткие множества обозначаются тильдой.

Носителем множества $\tilde{A}$ называется подмножество множества X, содержащее те элементы из X, для которых значения функции принадлежности больше нуля: $\operatorname{supp} \tilde{A} = \{x \in X \mid m_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.

<u>Пример 1.[1]</u> В качестве примера нечеткого множества рассмотрим нечеткое множество действительных чисел много больших единицы: $\tilde{A} = \{x \in R^1 \mid x >> 1\}$, которое может задаваться функцией принадлежности, эскиз которой изображен на рисунке 1.

Для сравнения приведем эскиз функции принадлежности четкого множества чисел, строго больших единицы: $B = \{x \in R^1 \mid x > 1\}$.

[1] *Приводимые примеры иллюстрируют соответствие между четкими и нечеткими множествами.*

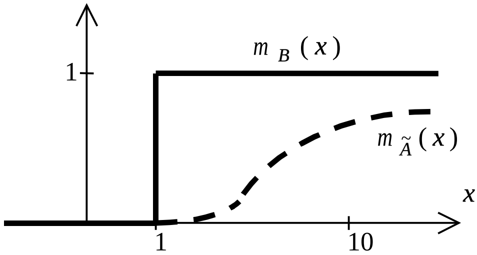

Рис. 1. Пример четкого и нечеткого множеств

Свойства нечетких множеств.

1. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется *нормальным*, если

$$\sup_{x \in X} m_{\tilde{A}}(x) = 1 .$$

2. Два нечетких множества *равны* (записывается $\tilde{A} = \tilde{B}$), если

$$\forall x \in X \; , \; m_{\tilde{A}}(x) = m_{\tilde{B}}(x) .$$

3. Нечеткое множество $\tilde{B}$ *содержится* в нечетком множестве $\tilde{A}$ или является подмножеством $\tilde{A}$ (т.е. $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$), если

$$\forall x \in X \quad m_{\tilde{B}}(x) \le m_{\tilde{A}}(x) .$$

Пример 2. Функции принадлежности четких подмножеств $A = [1, 5]$ и $B = [3, 4]$ множества действительных чисел (см. рисунок 2) имеют вид: $m_A(x) = \begin{cases} 1, \; x \in [1, 5]; \\ 0, \; x \notin [1, 5], \end{cases}$ и $m_B(x) = \begin{cases} 1, \; x \in [3, 4]; \\ 0, \; x \notin [3, 4]. \end{cases}$

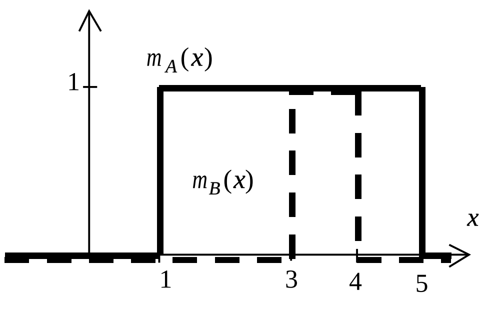

Рис. 2. Включение нечетких множеств

Пользуясь приведенным выше определением принадлежности множеств, получаем $B \subseteq A$. Таким образом, для четких множеств определение принадлежности приобретает стандартный вид.

4. *Пересечением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ ($\tilde{A} \cap \tilde{B}$) называется наибольшее нечеткое множество, содержащееся как в $\tilde{A}$, так и в $\tilde{B}$, с функцией принадлежности

$$m_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\}, \ x \in X .$$

<u>Пример 3.</u> Рассмотрим четкие множества $A = [1, 4]$ и $B = [3, 5]$. Пользуясь приведенным выше определением пересечения, получаем, что для четких множеств определение операции пересечения приобретает стандартный вид (см. рисунок 3).

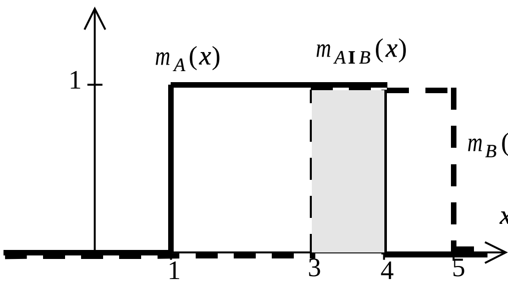

Рис. 3. Пересечение нечетких множеств

5. *Объединением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется наименьшее нечеткое множество, содержащее как $\tilde{A}$, так и $\tilde{B}$, с функцией принадлежности

$$m_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X .$$

<u>Пример 4.</u> Рассмотрим четкие подмножества $A = [1, 4]$ и $B = [3, 5]$ множества действительных чисел. Пользуясь приведенным выше определением объединения, получаем, что для четких множеств определение операции объединения приобретает стандартный вид (см. рисунок 4).

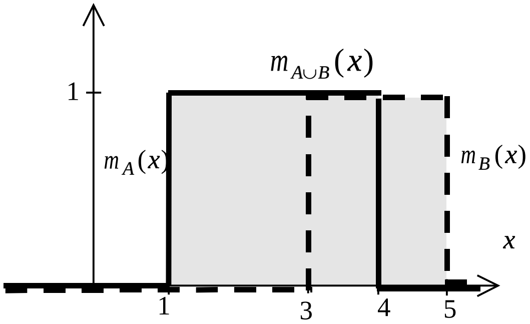

Рис. 4. Объединение нечетких множеств

5. *Дополнением* нечеткого множества $\tilde{A}$ в X называется нечеткое множество $\neg\tilde{A}$ со следующей функцией принадлежности:

$$m_{\neg\tilde{A}}(x) = 1 - m_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X .$$

Пример 5. Рассмотрим четкое подмножество $A = [1, 4]$ множества действительных чисел. Пользуясь приведенным выше определением, получаем, что для четких множеств определение операции дополнения множества приобретает стандартный вид (см. рисунок 5).

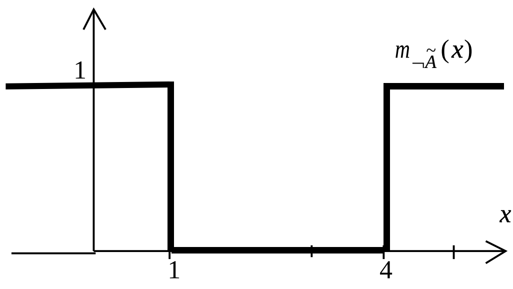

Рис. 5. Дополнение множества

Нечеткие отношения. Под четким бинарным отношением, определенным над множеством X, понимается подмножество множества $X \times X$. Перенося определение нечетких множеств на отношения, определим нечеткое отношение как нечеткое подмножество X^2. Таким образом, под *нечетким отношением* $\tilde{R}$ будем понимать функцию принадлежности $m_{\tilde{R}}(x, y)$ такую, что $m_{\tilde{R}} : X \times X \to [0, 1]$. Значение функции принадлежности понимается как степень выполнения отношения $x\tilde{R}y$.

Пример 6. Рассмотрим четкое отношение R – «больше, либо равно», тогда $R = \{(x, y) | \, x \geq y\}$. Функция принадлежности этого четкого бинарного отношения $m_R(x, y) = \begin{cases} 1, \, x \geq y; \\ 0, \, x < y. \end{cases}$ Множество R изображено на рисунке 6.

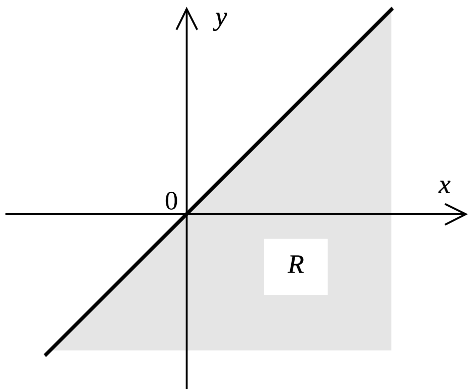

Рис. 6. Множество пар (x, y) *четкого отношения* "$\geq$"

Свойства нечетких отношений.

1. *Рефлексивность*:

- если $\forall x \in X \quad m_{\tilde{R}}(x, x) = 1$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ рефлексивно в смысле P1;
- если $\forall x \in X \quad m_{\tilde{R}}(x, x) = \frac{1}{2}$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ рефлексивно в смысле P2.

2. *Антирефлексивность* (для P1): если $\forall x \in X \quad m_{\tilde{R}}(x, x) = 0$ то нечеткое отношение $\tilde{R}$ антирефлексивно в смысле P1.

3. *Симметричность:* если $\forall x, y \in X$ выполняется $m_{\tilde{R}}(x, y) = m_{\tilde{R}}(y, x)$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется симметричным.

4. *Асимметричность*: если $\forall x, y \in X$ из $m_{\tilde{R}}(x, y) > 0$ следует $m_{\tilde{R}}(y, x) = 0$, то нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется асимметричным.

5. *Линейность* (*полнота*): нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется l – линейным в смысле определения Л1, если $\forall x, y \in X$ выполняется $\max\{m_{\tilde{R}}(x, y), m_{\tilde{R}}(y, x)\} > l$, где $l \in [0, 1)$; при $l = 0$, $\tilde{R}$ называется слабо линейным.

Если $\forall x, y \in X$ выполняется $\max\{m_{\tilde{R}}(x, y), m_{\tilde{R}}(y, x)\} = 1$, то отношение $\tilde{R}$ называется *сильно линейным*.

Нечеткое отношение $\tilde{R}$ называется линейным в смысле определения Л2, если $\forall x, y \in X$ выполняется $m_{\tilde{R}}(x, y) = 1 - m_{\tilde{R}}(y, x)$.

6. *Отрицание* $\tilde{R}'$ отношения $\tilde{R}$ определяется как отношение, функция принадлежности которого $\forall x, y \in X$ определяется

$$m_{\tilde{R}'}(x, y) = 1 - m_{\tilde{R}}(x, y).$$

7. *Обратное* к отношению $\tilde{R}$ отношение $\tilde{R}^{-1}$ определяется $\forall x, y \in X$ выражением $m_{\tilde{R}^{-1}}(x, y) = m_{\tilde{R}}(y, x)$.

8. *Композицией отношений* (произведением) называется отношение:

К1 – максиминная композиция:

$$m_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X} \min\{m_{\tilde{R}_1}(x, z), m_{\tilde{R}_2}(z, y)\};$$

К2 – минимаксная композиция:

$$m_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \inf_{z \in X} \max\{m_{\tilde{R}_1}(x, z), m_{\tilde{R}_2}(z, y)\};$$

К3 – максмультипликативная композиция:

$$m_{\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2}(x, y) = \sup_{z \in X} \{m_{\tilde{R}_1}(x, z) m_{\tilde{R}_2}(z, y)\}.$$

9. *Транзитивность*. В соответствии с тремя определениями композиции можно построить три определения транзитивности – (Т1), (Т2) и (Т3) по следующей схеме: $\tilde{R} \cdot \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$.

Нечетким отношением предпочтения (НОП) называется нечеткое отношение, удовлетворяющее (Р1), (Л1) и (Т1).

Принцип обобщения определяет образ нечеткого множества при четком или нечетком отображении. Напомним, что образом отображения *f: X* ® *Y* четкого множества *X* во множество *Y* является множество таких элементов множества *Y* для которых существует прообраз в множестве *X*: *f*(*X*) = {*y* Î *Y* | $ *x* Î *X*: *f*(*x*) = *y*}.

В соответствии с *принципом обобщения* образом нечеткого множества $m_{\tilde{A}}(x)$, *x* Î *X*, при четком отображении *f: X* ® *Y* является нечеткое множество $m_{\tilde{B}}(y)$, *y* Î *Y*, с функцией принадлежности

$$m_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\{x \in X \mid f(x) = y\}} m_{\tilde{A}}(x), \; y \text{ Î } Y,$$

то значение функции принадлежности элемента *f*(*x*) множества *Y* равно максимуму из функций принадлежностей его прообразов.

Принцип обобщения является удобным инструментом «перевода» четких моделей и задач нечеткие и широко используется как в моделях принятия решений [7], так и в задачах управления организационными системами [1-6].

Модели принятия решений при нечеткой исходной информации. Сформулируем для четких бинарных отношений предпочтения правило индивидуального рационального выбора

$$P(R_{A_0}, A_0) = \{z \in A_0 \big| \, \forall t \in A_0 \;\, zR_{A_0}t\}$$

в терминах функций принадлежности. Функция принадлежности четкого бинарного отношения предпочтения R задается в виде: $m_R(x, y) = 1$, если xRy. Строгая (асимметричная, антирефлексивная, транзитивная) его компонента (*отношение строгого предпочтения*) определяется функцией принадлежности:

$$m_P(x, y) = \max\{m_R(x, y) - m_R(y, x), 0\}.$$

Множество альтернатив $x \in A_0$, доминируемых хотя бы одной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $m_P(y, x)$. Дополнение этого множества, то есть множество альтернатив $x \in A_0$, не доминируемых данной альтернативой $y \in A_0$, имеет функцию принадлежности $1 - m_P(y, x)$. Вычисляя пересечение по всем $y \in A_0$, находим множество альтернатив, недоминируемых по четкому бинарному отношению R_{A_0} :

$$P(R_{A_0}, A_0) = \inf_{y \in A_0} \{1 - m_P(y, x)\} = 1 - \sup_{y \in A_0} m_P(y, x).$$

Пример 7. Рассмотрим следующее четкое рефлексивное, полное, транзитивное бинарное отношение (отношение предпочтения) над множеством из трех действий y_1, y_2, y_3, такое, что y_1 не менее предпочтительно, чем y_2, а y_2 не менее предпочтительно чем y_3, y_1 не менее предпочтительно, чем y_3. Это четкое отношение предпочтения удовлетворяет А.10 и приведено в таблице 1.

Таблица 1

	y_1	y_2	y_3
y_1	1	1	1
y_2	0	1	1
y_3	0	0	1

Матрица соответствующего ему строгого отношения предпочтения приведена в таблице 2.

Таблица 2

	y_1	y_2	y_3
y_1	0	1	1
y_2	0	0	1
y_3	0	0	0

Функция $m_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ для этого отношения предпочтения будет задаваться таблицей 3.

Таблица 3

	y_1	y_2	y_3
$m_{\tilde{R}}^{НД}$	1	0	0

Множество недоминируемых действий будет состоять из одного элемента – действия y_1.

Завершив рассмотрение примера, повторим приведенные рассуждения для нечетких множеств. В случае, когда неопределенность в связи действия АЭ и результата деятельности отсутствует, можно считать, что нечеткое отношение предпочтения задано на множестве возможных действий A: $m_{\tilde{R}}(x, y)$, $x, y \in A$.

Определим *нечеткое отношение строгого предпочтения* (НОСП) $\tilde{P}$, соответствующее НОП $\tilde{R}$, следующим образом:

$$m_{\tilde{P}}(x, y) = \max\left\{m_{\tilde{R}}(x, y) - m_{\tilde{R}}(y, x), 0\right\}, \; x, y \in A.$$

Определим нечеткое множество недоминируемых альтернатив (действий):

$$m_{\tilde{R}}^{НД}(x) = 1 - \sup_{y \in A} m_{\tilde{P}}(y, \; x), \; x \in A.$$

Величину $m_{\tilde{R}}^{НД}(x)$ можно интерпретировать как степень недоминируемости действия $x \in A$, поэтому рациональным будем считать выбор активным элементом действий, имеющих по возможности большую степень принадлежности четкому множеству недоминируемых альтернатив. Множество

$$A^{НД}(\tilde{R}) = \{x \in A \,|\, m_{\tilde{R}}^{НД}(x) = \sup_{z \in A} m_{\tilde{R}}^{НД}(z)\}$$

называется *множеством максимально недоминируемых действий* (*множеством С.А. Орловского*).

Будем считать, что индивидуально рациональный выбор АЭ при НОП $\tilde{R}$ на множестве допустимых действий определяется следующим правилом рационального выбора:

$$P(\tilde{R}, A) = A^{НД}(\tilde{R}).$$

Четкое множество

$$A_a{}^{НД}(\tilde{R}) = \{x \in A \,|\, m_{\tilde{R}}^{НД}(x) \geq a\}, \; a \in (0, 1],$$

будем называть *множеством* a *-недоминируемых действий*.

Более полное представление о свойствах нечетких множеств и моделях принятия решений при нечеткой исходной информации можно получить в [7]. Модели стимулирования и планирования в условиях нечеткой неопределенности рассмотрены в [5, 6].

Литература

1 Балашов В.Г., Заложнев А.Ю., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Механизмы управления организационными проектами. М.: ИПУ РАН, 2003. – 84 с.

2 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.

3 Колосова Е.В., Новиков Д.А., Цветков А.В. Методика освоенного объема в оперативном управлении проектами. М.: Апостроф, 2001. – 156 с.

4 Леонтьев С.В. Модели и методы управления региональным развитием. М.: Физматлит, 2002.

5 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

6 Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.

7 Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. – 206 с.