Труды Петрозаводского государственного университета
Серия *"Прикладная математика и информатика"* Выпуск 6, 1997

УДК 519.2

Неоднородная система массового обслуживания с произвольным числом приборов в случайной среде

О. Ю. Богоявленская

Рассматривается неоднородная система массового обслуживания, у которой параметры процессов поступления и обслуживания заявок изменяются в зависимости от изменений состояний случайной среды. Постановка задачи, которая анализируется нами, складывается из двух частей. Мы используем модель случайной среды, описанной в [4], в сочетании с моделью многоканального конечного устройства, рассматриваемого в [1], [2], в которую вносим некоторые модификации. Как и упомянутые авторы, мы рассматриваем только такие системы, для которых стационарное распределение числа занятых приборов допускает мультипликативное представление.

§1. Описание системы

В качестве модели поведения внешней среды будем рассматривать марковскую цепь ζ с непрерывным временем с дискретным пространством состояний U. Обозначим $q_{uu'},\ u, u' \in U$, интенсивности переходов, а $\pi_u,\ u \in U$, стационарное распределение ζ.

Рассматриваемая система массового обслуживания состоит из нескольких групп одинаковых обслуживающих приборов. Число приборов в группе может быть конечным или бесконечным. Определим состояние системы как вектор $(n_1, \ldots, n_s)$, где s — общее число групп,

© О. Ю. Богоявленская, 1997

а n_i, $i = 1, \dots, s$, — число занятых приборов в группе i. Предполагается, что обслуживание осуществляется согласно следующему правилу. Если система находится в состоянии $(n_1, \dots, n_s)$ в момент времени t, то вероятность поступления за промежуток времени $t+\Delta t$ новой заявки в группу i определяется как $\lambda_i(u, n_1, \dots, n_s)\Delta t + o(\Delta t)$, $u \in U$. Две или больше заявок могут прибыть в систему за время Δt с вероятностью $o(\Delta t)$. Если число приборов в группе конечно, обозначим его m_i. Поступающие в систему заявки имеют составную структуру. Каждая заявка составляется из конечного числа независимых требований. Число требований в заявке — случайная величина ξ с распределением

$$P\{\xi = k\} = \phi_k \ k = 1, 2, \dots \ .$$

Очевидно, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \phi_k = 1$ и $\phi_0 = 0$. Будем считать, что математическое ожидание случайной величины ξ конечно — $\mathsf{E}\xi < \infty$. Все требования заявки обслуживаются прибором без перерыва, одно за другим в порядке поступления.

Длительности обслуживания отдельных требований заявки удовлетворяют показательному закону распределения, параметр которого $\mu_i(u)$ определяется номером группы, которой принадлежит обслуживающий прибор, и состоянием внешней среды. Если вновь поступившая заявка находит все приборы занятыми, она теряется.

Будем рассматривать вектор переменной размерности, определяющий состояние системы:

$$R(t) = (u(t), n_1(t), \dots, n_s(t), r_1^1(t), \dots, r_{n_s}^s(t)) = (u(t), N(t), R(t)) \ .$$

Зададим вероятностную функцию $p(u(t), N(t), (R(t))$, значение которой определяет вероятность события, заключающегося в том, что система массового обслуживания находится в состоянии (N, R), а внешняя среда — в состоянии u. Так как ζ — марковская цепь, а также в силу сделанных предположений относительно характера процессов поступления и обслуживания заявок случайный процесс $\rho = \{\zeta, (N(t), R(t))\}_{t>0}$ является разрывным марковским процессом. Пространство состояний процесса ρ счетно.

Возможные переходы между состояниями процесса ρ приведены на рис. 1. Для того, чтобы рисунок не был загроможден, на нем отражен фрагмент диаграммы переходов для простого частного случая, учитывающий тем не менее все возможные варианты переходов.

Предполагается, что рассматриваемое устройство имеет две группы приборов. Первая группа содержит бесконечное число приборов, во второй группе число приборов равно двум.

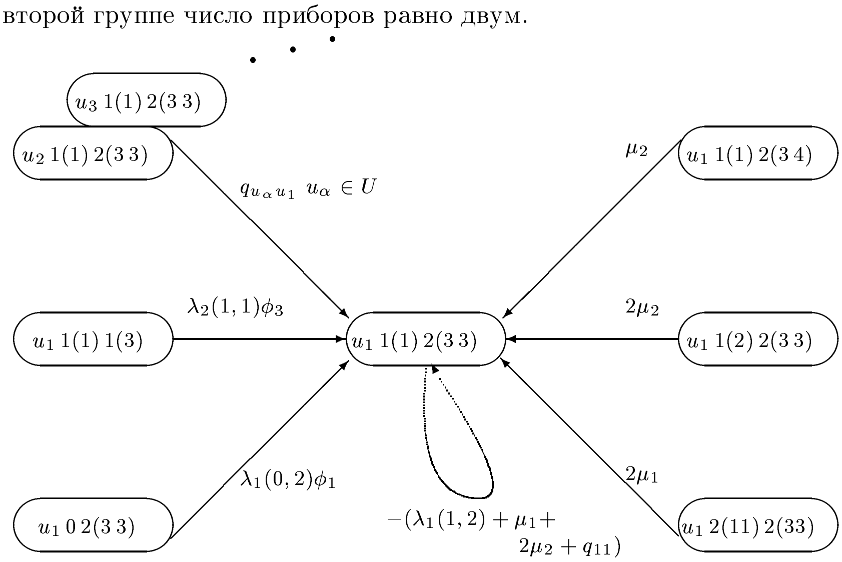

Рис. 1. Фрагмент диаграммы переходов.

Будем также использовать в дальнейшем единичные вектора e_{ij}, которые имеют размерность n_i и у которых j-я координата равна 1, а остальные равны нулю, и единичный вектор J_i размерности s, i-я координата которого равна 1, а остальные равны нулю. Кроме этого определим величины s_j и a_j следующим образом. Упорядочим компоненты вектора, соответствующие i-й группе по возрастанию. Обозначим s_1 число первых (наименьших положительных) одинаковых координат вектора R_i, s_2 — число следующих одинаковых ненулевых элементов и т.д. Очевидно, что s_j могут принимать значения $0,\ldots,n_i$, общее число элементов s_j также не может превышать n_i и $\sum\limits_{i=1}^{n_i} s_i = n_i$. Пусть k_i — общее число подмножеств равных элементов. Если $k < n_i$, положим $s_i = 0,\ i = k_i \ldots n_i$. Обозначим $a^j_{n_i}$ величину элементов, образующих подмножество j. Мы также будем в дальнейшем использовать индикатор B_i, который принимает значение 0, если в i-й группе есть свободные приборы, или 1, если таких приборов нет, а также множество A_i, которое содержит номера приборов по одному из каждого подмножества группы i. Мы не различаем, на какой именно прибор поступает новая заявка и какой именно прибор завершает обслуживание требования. Поэтому интенсивность перехода из состояния $(N - J_i, R_1, \ldots, R_i - r^i_j e_{ij}, \ldots, R_s)$ в состояние (N, R) определяется как $\lambda_i(N - J_i)\phi_{r^i_j}$. При этом если в группе имеются несколько приборов, на которых содержится одинаковое количество заявок, то переходы, соответствующие каждому из этих приборов, будут совпадать, поэтому мы будем рассматривать только один из них. Если переход из одного состояния в другое совершается за счет завершения обслуживания требования на приборе, то соответствующая интенсивность перехода определяется как $\mu_i(u)$, умноженное на число приборов в группе, содержащих такое же число требований. Так как в устройстве есть группы, имеющие бесконечное число приборов, к любому состоянию системы можно добавить еще один прибор и, следовательно, в любое состояние можно попасть после завершения обслуживания прибором последнего требования в группе. При всех описанных переходах первая координата вектора состояния, соответствующая состоянию внешней среды, остается неизменной.

Переходы могут происходить как за счет изменений состояния обслуживающего устройства, так и за счет изменений состояния внешней среды. Переходы, происходящие из-за изменений внешней среды, имеют интенсивность $q_{uu'}$ и не изменяют векторов $N(t)$ и $R(t)$.

Построим систему уравнений равновесия (СУР) для стационарных вероятностей

$$p(u, N, R) = \lim_{t\to\infty} p(u(t), N(t), R(t)) \ .$$

Выделим группу уравнений для состояний системы, когда устройство свободно:

$$\begin{aligned} -p(u, \mathbf{0}) \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(u, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{s} \mu_i(u) p(u, \mathbf{0} + J_i, 1) + \\ + \sum_{u' \in U} q_{u'u} p(u', \mathbf{0}) = 0 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что в отличие от предыдущих случаев в рассматриваемой СУР число таких уравнений $|U|$. Для состояний (u, N, R), где $(N, R) \in$

$Q \setminus \mathbf{0}$, уравнения СУР имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\in A_i}\lambda_j(u,N-J_i)\phi_{a_j^i}\times$$
$$\times p(u,N-J_i,R_1,\ldots,r_1^i,\ldots,r_{j-1}^i,$$
$$r_{j+1}^i,\ldots,r_{n_i}^i,\ldots,R_s)-$$
$$-\sum_{i=1}^{s}(\lambda_i(u,N)+n_i\mu_i(u))p(u,N,R_1,\ldots,R_s)+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\in A_i}\mu_i(u)p(u,N,R_1,\ldots,R_i+e_{i,j},\ldots,R_s)+$$
$$+\sum_{\{i:B_i=0\}}\mu_i p(u,N+J_i,R_1,\ldots,1,R_i,\ldots,R_s)+$$
$$+\sum_{u'\in U}q_{u'u}p(u',N,R_1,\ldots,R_s)=0\ .$$

Совместно с системой (1)–(2) рассматривается условие нормировки

$$\sum_{U\times Q}p(u,N,R)=1\ . \tag{2}$$

§2. Решение системы уравнений равновесия. Распределение числа занятых приборов

Мы будем рассматривать только такие системы, решение которых может быть представлено в мультипликативной форме. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть существует набор функций g(u,N) таких, что* $\lambda_i(u,N)=g(u)v_i(N)$, *и набор констант* μ_i *таких, что* $\mu_i(u)=g(u)\mu_i$, *тогда, если справедливо условие*

$$\prod_{l=1}^{k_1+\ldots+k_s}v_{i_l}\Big(\sum_{m=1}^{l-1}\delta_{1,i_m},\ldots,\sum_{m=1}^{l-1}\delta_{s,i_m}\Big)=$$
$$=\prod_{l=1}^{k_1+\ldots+k_s}v_{j'_l}\Big(\sum_{m=1}^{l-1}\delta_{1,i'_m},\ldots,\sum_{m=1}^{l-1}\delta_{s,i'_m}\Big)\ , \tag{3}$$

то система (1)–(2) имеет нетривиальное решение вида

$$p(u,N,R)=p(\mathbf{0})\pi_u\frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s}\mu_i^{n_i}}\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{s_1^i!\ldots s_n^i!}F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_{n_i}^i}^{s_{n_i}^i}\,, \tag{4}$$

где $F_i=\sum\limits_{k=i}^{\infty}\phi_k$, $F_0=F_1=1$, $p(\mathbf{0})$ *— состояние,в котором система пуста,* $V(N)=\prod\limits_{l=1}^{n_1+\ldots+n_s}v_{i_l}(\sum\limits_{m=1}^{l-1}\delta_{1,i_m},\ldots,\sum\limits_{m=1}^{l-1}\delta_{s,i_m})$.

Отметим, что условие (3) является аналогом условия теоремы И. Н. Коваленко для рассматриваемой задачи.

Доказательство. Подставим выражения вида (4) в систему (1)–(2).

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\in A_i}\lambda_i(u,N-J_i)\phi_{a_j^i}\pi_u\frac{V(N-J_i)}{\mu_i^{n_i-1}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}\mu_i^{n_i}}\prod_{i=1}^{s}\frac{F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_j^i}^{s_j^i-1}\ldots F_{a_k^i}^{s_k^i}}{s_1^i!\ldots(s_j^i-1)!\ldots s_k^i!}-\\
&-\sum_{i=1}^{s}(\lambda_i(u,N)+n_i\mu_i(u))\frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s}\mu_i^{n_i}}\prod_{i=1}^{s}\frac{F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_k^i}^{s_k^i}}{s_1^i!\ldots s_k^i!}+\\
&+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\in A_i}\mu_i(u)s_j\frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s}\mu_i^{n_i}}\prod_{i=1}^{s}\frac{F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_j^i}^{s_j^i-1}F_{a_j^i+1}^{s_{j+1}^i+1}\ldots F_{a_k^i}^{s_k^i}}{s_1^i!\ldots s_k^i!}+\\
&+\sum_{\{i:B_i=0\}}\mu_i(u)(s_1^i+1)\frac{V(N+J_i)}{\mu_i^{n_i+1}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}\mu_i^{n_i}}\prod_{i=1}^{s}\frac{F_1F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_k^i}^{s_k^i}}{(s_1^i+1)!\ldots s_k^i!}+\\
&+\sum_{u'\in U}q_{uu'}\pi_u\frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s}\mu^{n_i}}\prod_{i=1}^{s}\frac{F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_{n_i}^i}^{s_{n_i}^i}}{s_1^i!\ldots s_n^i!}=0\,.
\end{aligned}\tag{5}$$

В силу условий теоремы 1 сумму (5) можно представить как

$$g(u)\pi_u(\ldots) + \frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s}\mu^{n_i}} \frac{F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_{n_i}^i}^{s_{n_i}^i}}{s_1^i!\ldots s_n^i!} \sum_{u'\in U} q_{uu'}\pi_u = 0\ . \tag{6}$$

Первое слагаемое в выражении (5) тождественно равно нулю в силу условия (3). С другой стороны, ζ — эргодическая марковская цепь и, следовательно, $\sum\limits_{u'\in U} q_{uu'}\pi_u \equiv 0$ [3]. Таким образом, выражения (4) обращают систему (1)–(2) в тождество. □

Теорема 2. *Если* $\exists\, M: \quad \lambda_i(N) < M \quad \forall (i,\ N)$ *и сходится ряд*

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_s)} V(N) \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{n_i!}\left(\frac{E\xi}{\mu_i}\right)^{n_i}\ , \tag{7}$$

то случайный процесс ρ *имеет эргодическое распределение вида (4), а распределение числа занятых приборов в группах системы* $p(u,N)$ *имеет вид*

$$p(u,N) = \pi_u p(\mathbf{0}) V(N) \prod_{i=1}^{s} \tfrac{1}{n_i!}\left(\frac{E\xi}{\mu_i}\right)^{n_i}\ . \tag{8}$$

Нормализующая константа $p(\mathbf{0})$ *может быть вычислена как*

$$p(\mathbf{0}) = \frac{1}{1 + \sum\limits_{(N,R)\in Q} V(N) \prod\limits_{i=1}^{s} \frac{1}{n_i!}\left(\frac{E\xi}{\mu_i}\right)^{n_i}}\ .$$

Доказательство. Рассмотрим суммы следующего вида

$$\begin{aligned} P(\tilde N) &= \sum_{(N,R):N=\tilde N} \frac{V(\tilde N)}{\prod\limits_{i=1}^{s}\mu_i^{\tilde n_i}} \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{s_1^i!\ldots s_{\tilde n}^i!} F_{a_1^i}^{s_1^i}\ldots F_{a_{\tilde n_i}^i}^{s_{n_i}^i} = \\ &= \frac{V(\tilde N)}{\prod\limits_{i=1}^{s}\mu_i^{\tilde n_i}} \frac{(E\xi)^{(\tilde n_1+\ldots+\tilde n_s)}}{\tilde n_1!\ldots \tilde n_s!}\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно теореме 1 система уравнений (1)–(2) имеет нетривиальное решение. Рассмотрим ряд, составленный из решений (1)–(2). Суммирование производится по всему пространству состояний, т. е.

$$\sum_{(u,N,R)\in Q\times U} p(u,N,R) = p(\mathbf{0}) \sum_{(u,N,R)\in Q\times U} \pi_u P(N) =$$
$$= p(\mathbf{0}) \sum_{u\in U} \pi_u \sum_{(N,R)\in Q} \frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s} \mu_i^{\tilde{n}_i}} \frac{(E\xi)^{(n_1+\ldots+n_s)}}{n_1!\ldots n_s!} \,. \tag{10}$$

Ряд, составленный из стационарных вероятностей цепи ζ, сходится и

$$\sum_{u\in U} \pi_u = 1 \tag{11}$$

в силу сделанных выше предположений. Если условие (7) также имеет место, то это означает, что сходится и произведение рядов (7) и (11), а именно ряд (10). Таким образом, СУР, составленная для случайного процесса ρ, имеет нетривиальное решение и ряд, составленный из решений СУР, сходится, если сходится ряд, указанный в условии (7). Следовательно, если $\exists M : \quad \lambda_i(N) < M \quad \forall i,\ N$, то процесс ρ будет регулярным [3] и решение СУР определяет его эргодическое распределение.

Вероятности $p(u,n_1,\ldots,n_s)$ можно вычислить на основе (4).

$$p(u,n_1,\ldots,n_s) = p(\mathbf{0})\pi_u P(N) =$$
$$= p(\mathbf{0})\pi_u \frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s} \mu_i^{n_i}} \frac{(E\xi)^{(n_1+\ldots+n_i)}}{n_1!\ldots n_i!} \,. \tag{12}$$

В силу условия нормировки (2) справедливо тождество

$$\sum_{(u,N,R)\in U\times Q} \pi_u p(\mathbf{0}) \frac{V(N)}{\prod\limits_{i=1}^{s} \mu_i^{n_i}} \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{s_1^i!\ldots s_n^i!} F_{a_1^i}^{s_1^i} \ldots F_{a_{n_i}^i}^{s_{n_i}^i} = 1 \,. \tag{13}$$

Принимая во внимание сделанные преобразования, можно записать

$$\sum_{u\in U}\pi_u \sum_{(N,R)\in Q} p(\mathbf{0}) \frac{V(N)}{\prod_{i=1}^{s}\mu_i^{n_i}} \frac{(E\xi)^{(n_1+\ldots+n_i)}}{\tilde{n}_1!\ldots\tilde{n}_i!} =$$
$$= \sum_{(N,R)\in Q} \frac{V(N)}{\prod_{i=1}^{s}\mu_i^{n_i}} \frac{(E\xi)^{(n_1+\ldots+n_i)}}{n_1!\ldots n_i!} = 1\ . \tag{14}$$

Следовательно, нормализующая константа определяется как

$$p(\mathbf{0}) = \frac{1}{1+\sum\limits_{(N,R)\in Q} V(N)\prod\limits_{i=1}^{s}\frac{1}{n_i!}\left(\frac{E\xi}{\mu_i}\right)^{n_i}}\ . \tag{15}$$

□

Рассмотрим простой частный случай, когда вопрос о сходимости ряда (7) может быть решен непосредственно. Пусть

$$\lambda_i(u,n_1,\ldots,n_s) = \lambda_i g(u), \qquad \mu_i(u) = \mu_i g(u)$$

и

$$\rho_i = \frac{\lambda_i(E\xi)}{\mu_i}$$

для всех таких i, что число приборов в i-й группе бесконечно. Обозначим число конечных групп приборов k и перенумеруем группы приборов так, что группы с конечным числом приборов будут иметь номера $1\ldots k$. Тогда в силу того, что величины λ_i не зависят от вектора N, ряд (7) примет следующий вид:

$$\sum_{(u,N,R)\in Q\times U} p(u,N,R) = 1 + \sum_{n_1,\ldots,n_k}\frac{V(n_1,\ldots,n_k,0,\ldots,0)}{\mu_1^{n_1}\cdots\mu_k^{n_k}}\times$$
$$\frac{(E\xi)^{(n_1+\ldots n_k)}}{n_1!\ldots n_k!}\cdot\left[\sum_{i=k+1}^{s}(e^{\rho_i}-1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=k+1}^{s}\sum_{j=i}^{s}(e^{\rho_i}-1)(e^{\rho_j}-1)+\ldots+\prod_{i=k+1}^{s}(e^{\rho_i-1}))\right]\ .$$

Литература

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Радио и связь, 1987.

2. *Коваленко И. Н.* Об условии независимости вероятностей состояний системы обслуживания от вида распределения времени обслуживания // Проблемы передачи информации. 1962. № 11. С. 147-151.

3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.

4. *Falin G.* A Heterogeneous blocking system in a Random Environment // JAP. 1996. № 33. P. 211-216.