УДК 519.8

УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ[1)]

© 2004 г. В.Д. Ногин

(198504 *С.-Петербург*, *Петродворец*, *Университетский пр.*, 35, *ПМ-ПУ*, *СПбГУ*)
e-mail: noghin@ mail.infos.ru

Указываются новые существенные недостатки широко известного метода анализа иерархий при его использовании как в случае одного, так и нескольких критериев. Предлагается более простой, точный и надежный способ нахождения «весового» вектора в задачах с одним критерием. Для решения многокритериальных задач обосновывается применение нелинейной свертки критериев в виде функции минимума. Библ. 15.

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из подходов к назначению «весов» конечному набору n сравниваемых объектов на основе матрицы парных сравнений был предложен Т. Саати [1]. Впоследствии этот подход оформился в целый раздел принятия решений при наличии одного, а также нескольких критериев [2]-[8] и получил наименование *метода анализа иерархий* (the Analytic Hierarchy Process, AHP); сокращенно МАИ. В настоящее время МАИ прочно вошел в теорию и практику многокритериального выбора. Число статей прикладного характера, в которых МАИ применяется к решению самых различных прикладных многокритериальных задач, превысило тысячу уже десять лет назад. На основе МАИ был разработан получивший мировое признание и широкое распространение за рубежом пакет программ EXPERT CHOICE.

В соответствии с МАИ экспертами формируется так называемая матрица парных сравнений A, а искомый весовой вектор $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ вычисляется как собственный вектор этой матрицы, отвечающий максимальному собственному значению. Такой способ определения весового вектора из-за нарушения на практике свойства совместности (consistency) [3-5], [8] матрицы парных сравнений не является обоснованным.

Поясним сказанное. Хорошо известно, что весовой вектор w является собственным вектором совместной (в некоторых источниках используется наименование совершенно со-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (код проекта НШ – 1964.2003.1).

вместной) матрицы A, отвечающим ее максимальному собственному значению n. Тем самым, в случае совместной матрицы весовой вектор необходимо является указанным собственным вектором. Однако при формировании в соответствии с МАИ экспертами матрицы парных сравнений рассчитывать на ее совместность не следует. Об этом известно всем, знакомым с МАИ. Это означает, что на практике приходится иметь дело с иной ситуацией (моделью), которой отвечает несовместная матрица. Тем не менее, согласно МАИ весовой вектор вновь предлагается находить как собственный вектор (несовместной) матрицы парных сравнений, причем этот собственный вектор отвечает собственному значению, которое, уже не равно (а строго больше) n. В обширной литературе по МАИ не существует (по крайней мере, на данный момент) доказательства того, что искомый весовой вектор необходимо должен являться собственным вектором несовместной матрицы, отвечающим ее максимальному собственному значению, большему, чем n. По этой причине рассматриваемый метод нельзя назвать обоснованным; он представляет собой определенный эвристический подход, логика которого заключается в рекомендации действовать точно так же в ситуациях, которые могут сильно отличаться от тех, для которых установлена справедливость данных действий. Это означает, что применение МАИ практически всегда содержит некоторую «модельную» ошибку вычисления весового вектора (помимо погрешностей чисто вычислительного характера) и если эта ошибка велика, то применение МАИ становится просто неприемлемым. Отдавая себе отчет в этом, автор МАИ ввел специальный числовой показатель «индекс совместности» (consistency index), характеризующий степень доверия к полученным с помощью МАИ результатам. Этот индекс трактуется как своеобразная мера отклонения исходной несовместной матрицы от некоторой совместной. Как указывает Т. Саати [4], при достаточно малом значении индекса совместности матрица парных сравнений «близка» к некоторой матрице с нулевым значением этого индекса (т.е. к некоторой совместной матрице). Тем самым, и результат применения МАИ в виде весового вектора оказывается в какой-то мере «близким» к результату, получаемому на основе этой совместной матрицы. Если же индекс совместности превышает «пороговое» значение, то сделать вывод о близости указанных матриц нельзя, поэтому и применять МАИ в таких случаях автором не рекомендуется. Следует однако заметить, что по значению индекса совместности можно лишь опосредованно судить о величине итоговой «модельной» ошибки; точно она никогда и никем не может быть определена. Такова специфика данного эвристического подхода.

МАИ не раз подвергался критике различными авторами в основном за невыполнение свойства сохранения ранжирования решений при удалении одного из возможных решений (см., [9]). В данной работе пересмотру подвергаются иные две важнейшие составляющие этого метода.

Во-первых, процедуру формирования матрицы парных сравнений предлагается существенно упростить, требуя от эксперта сведения не обо всех элементах этой матрицы, расположенных выше (либо ниже) главной диагонали, а лишь об определенных «базисных» элементах, на основе которых затем легко и без ошибок вычислительного характера находится искомый весовой вектор. При этом выбор конкретного «базисного» набора соответствует той или иной схеме сравнения объектов, которую можно выбирать с целью получения наиболее надежных результатов от эксперта. В целом предлагаемый вариант оказывается существенно проще исходного метода как на стадии формирования матрицы A, так и в ходе вычисления весового вектора. Кроме того, он полностью избавлен от «модельной» ошибки, о которой шла речь выше, поскольку основан на совместной матрице A.

Во-вторых, на основе работ автора по обоснованию принципа Эджворта-Парето показывается, что при решении многокритериальных задач применение линейной свертки критериев, как это предписывается согласно МАИ, допустимо лишь при определенных довольно ограничительных предположениях. В связи с этим, вместо линейной предлагается использовать свертку в виде функции минимума, участвующую в теореме Ю.Б. Гермейера [10]-[12], применение которой является обоснованным для наиболее широкого класса многокритериальных задач выбора с конечным множеством возможных решений. Получающийся в итоге пересмотра метод решения многокритериальных задач назван упрощенным вариантом МАИ на основе нелинейной свертки критериев.

2. МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ОДНИМ КРИТЕРИЕМ

2.1. Матрица относительных весов и ее свойства. Пусть задан набор из n объектов (элементов), которые обозначим $A_1, A_2, ..., A_n$. Предположим, что каждому объекту A_k поставлено в соответствие определенное положительное число w_k. Это число будем именовать весом объекта A_k, $k = 1,2,...,n$.

Иными словами, имеется некоторый (скалярный) положительный критерий «веса» («ценности» или «важности»), определенный на множестве объектов $A_1, A_2, ..., A_n$, и указаны все его значения $w_1, w_2, ..., w_n$ на каждом из имеющихся объектов.

Образуем матрицу относительных весов

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 \dots & w_2/w_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 \dots & w_n/w_n \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы относительных весов A представляет собой отношение веса i-го объекта A_i к весу j-го объекта A_j.

Справедливы следующие высказывания (свойства матрицы относительных весов A), которые нетрудно проверить непосредственно.

1) Все элементы матрицы A положительны, т.е. $a_{ij}=w_i/w_j>0$ для всех номеров $i,j=1,2,...,n$.
2) Матрица A обратно симметрична, т.е. ее элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, являются обратными по отношению друг к другу: $a_{ij}=w_i/w_j=\dfrac{1}{w_j/w_i}=\dfrac{1}{a_{ji}}$ для всех номеров $i,j=1,2,...,n$. В частности, все элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице, т.е. $a_{ii}=w_i/w_i=1$, $i=1,2,...,n$.
3) Матрица A обладает свойством совместности, в том смысле, что имеют место равенства $a_{ik}\,a_{kj}=\dfrac{w_i}{w_k}\dfrac{w_k}{w_j}=\dfrac{w_i}{w_j}=a_{ij}$ для всех номеров $i,j,k=1,2,...,n$.
4) Число n является максимальным собственным значением матрицы A, а вектор-столбец $w=(w_1,w_2,...,w_n)^T$ – единственным (если он нормирован) соответствующим (правым) собственным вектором, т.е.

$$A\,w=n\,w. \tag{2.1}$$

Тем самым, устанавливается, что искомый весовой вектор и матрица A необходимо удовлетворяют всем перечисленным свойствам.

Поскольку матрица относительных весов имеет только два различных собственных значения – 0 и n (см., например, [4]-[5]), то равенство (2.1) после введения обозначения $\lambda_{\max}=\max\{0,n\}$ формально можно переписать в форме

$$A\,w=\lambda_{\max}\,w. \tag{2.2}$$

Выше предполагалось, что веса объектов $A_1, A_2,..., A_n$, т.е. числа $w_1, w_2,..., w_n$, заранее заданы. Однако в задачах, возникающих на практике, эти числа как раз неизвестны и подлежат определению. В этих задачах требуется найти положительные числа $w_1, w_2,..., w_n$ (нередко удовлетворяющие дополнительному условию нормировки $w_1 + w_2 + ... + w_n = 1$), которые выражают собой определенные веса объектов $A_1, A_2,..., A_n$.

2.2. Метод анализа иерархий. Применение МАИ предполагает наличие так называемой матрицы парных сравнений

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Произвольный элемент a_{ij} этой матрицы призван выражать собой положительное число, показывающее во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j.

Согласно МАИ на основе экспертных оценок в результате выполнения $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных сравнений объектов формируется та часть матрицы парных сравнений $A = (a_{ij})_{n\times n}$, которая расположена, например, выше главной диагонали. На главной диагонали выставляются единицы, а элементы, расположенные ниже главной диагонали, вычисляются с использованием свойства обратной симметричности. Заметим, что полученная таким способом матрица парных сравнений, как правило, не обладает свойством совместности, т.е. равенство $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ нарушается для некоторых $i, j, k \in \{1,2,...,n\}, i \neq j$.

Далее находится максимальное собственной значение $\lambda_{\max}$ матрицы парных сравнений A (которое всегда удовлетворяет неравенству $\lambda_{\max} \geq n$) и затем решается однородная система линейных уравнений $(A - \lambda_{\max} E)w = \mathbf{0}$ относительно вектора w, равносильная (2.2). Найденный таким способом вектор w имеет положительные компоненты и является искомым весовым вектором.

При реализации МАИ чаще всего оказывается выполненным строгое неравенство $\lambda_{\max} > n$ и компоненты $w_1, w_2,..., w_n$ вектора весов, найденные в соответствии с МАИ, «не согласуются» с данными, содержащимися в матрице парных сравнений $A = (a_{ij})_{n\times n}$ в том смысле, что равенство $a_{ij} = {w_i}/{w_j}$ чаще всего нарушается. Это приводит к определенной «модельной» ошибке при реализации МАИ, о которой говорилось во введении и оценить которую возможным не представляется. От указанного недостатка свободен предлагаемый ниже вариант МАИ.

3. УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ МАИ

3.1. Требования к матрице парных сравнений. Пусть имеется набор n объектов $A_1, A_2, ..., A_n$ и задача состоит в определении веса каждого из них, т.е. в нахождении соответствующих им положительных чисел $w_1, w_2, ..., w_n$.

Будем считать, что матрица парных сравнений должна обладать всеми перечисленными ранее свойствами матрицы относительных весов (т.е. быть совместной). В соответствии с этим потребуем:

1) Все элементы матрицы A положительны: $a_{ij} > 0$ для всех номеров $i, j = 1,2,...,n$.
2) Матрица A обратно симметрична: $a_{ij} = 1/a_{ji}$ для всех номеров $i, j = 1,2,...,n$. В частности, $a_{ii} = 1$, $i = 1,2,...,n$.
3) Матрица A совместна, т.е. равенство $a_{ij} = a_{ik}\, a_{kj}$ имеет место для всех номеров $i, j, k = 1,2,...,n$.
4) Число n является максимальным собственным значением матрицы A и для некоторого единственного (нормированного) вектор-столбца $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ с положительными компонентами выполняется равенство (2.1).

3.2. Построение матрицы парных сравнений на основе элементов первой строки. Обсудим вопрос построения патрицы парных сравнений, удовлетворяющей первым трем из перечисленных выше свойств. В силу первых двух свойств диагональные элементы матрицы парных сравнений известны – это единицы. Далее эксперту предлагают сравнить вес первого объекта с весом второго объекта и указать положительное число, показывающее во сколько раз вес первого объекта больше веса второго объекта. В результате выполнения такого сравнения эксперт назначает некоторое положительное число a_{12}. Далее для сравнения с первым объектом рассматривается третий объект и в результате сравнения экспертом указывается число a_{13}, и т.д. После выполнения сравнений первого объекта со всеми остальными будут назначены положительные числа $a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}$. Тем самым, с учетом равенства $a_{11} = 1$ будет известна вся первая строка матрицы A. Описанный способ назначения элементов первой строки матрицы A можно назвать «схемой сравнения с образцом», в роли которого выступает первый объект.

Остальные элементы матрицы парных сравнений можно найти на основе свойств 2) и 3) матрицы парных сравнений. Благодаря этим свойствам имеют место равенства

$$a_{ij} = a_{i1}\, a_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}}, \qquad i = 2,...,n;\ j = 1,2,...,n, \tag{3.1}$$

с помощью которых однозначно вычисляются элементы остальных строк матрицы A. Заметим, что равенство (3.1) выполняется и для элементов первой строки, т.е. при $i = 1$.

Нетрудно видеть, что матрица A, построенная на основе элементов первой строки согласно формуле (3.1), будет удовлетворять свойству совместности, так как для всех номеров $i, j, k = 1,2,...,n$ выполнено

$$a_{ik}\, a_{kj} = \frac{a_{1k}}{a_{1i}} \frac{a_{1j}}{a_{1k}} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}} = a_{ij}\,.$$

Лемма[2)]**.** *Произвольная матрица* A, *удовлетворяющая свойствам* 1) – 3), *удовлетворяет и свойству* 4).

Доказательство. Благодаря свойству совместности имеют место равенства (3.1). Используя специальный вид матрицы A, характеристическое уравнение для этой матрицы можно записать в виде

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots (1-\lambda) \end{pmatrix} = (-1)^n \lambda^{n-1} (\lambda - n) = 0\,.$$

Отсюда следует, что матрица A имеет только два различных собственных значения – 0 и n. Тем самым, максимальность собственного значения n установлена.

Равенство (2.1) непосредственно проверяется при $w_i = a_{in}, i = 1,2,...,n$, с использованием свойства совместности следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} w_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} a_{in} = \sum_{i=1}^{n} a_{kn} = n\, a_{kn} = n\, w_k, \quad k = 1,2,...,n\,.$$

3.3. Нахождение весового вектора. После того как матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ при помощи формулы (3.1) сформирована, можно найти весовой вектор $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$. Его компоненты вычисляются по формуле

[2)] Свойства 3) и 4) в условиях выполнения свойств 1) и 2) оказываются эквивалентными (см. [4]).

$$w_i = \frac{a_{1n}}{a_{1i}}, \quad i = 1,2,...,n. \tag{3.2}$$

Вектор весов w, вычисленный согласно (3.2), не удовлетворяет требованию нормировки, так как его последняя компонента равна единице. Если необходимо, чтобы он был нормирован, каждую его компоненту следует разделить на сумму всех компонент, т.е. на величину $w_1 + w_2 + ... + w_{n-1} + 1$, где все слагаемые w_i, $i = 1,2,...,n-1$, найдены по формуле (3.2).

Обоснование выбора компонент вектора весов w на основе формулы (3.2) дается в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть матрица* $A = (a_{ij})_{n\times n}$, *обладающая свойствами* 1) – 2), *построена на основе элементов первой строки в соответствии с формулой* (3.1). *Она обладает свойствами* 3) – 4) *и не существует другой матрицы с той же самой первой строкой*, *обладающей свойствами* 3) – 4). *При этом собственный вектор* w, *отвечающий максимальному собственному значению матрицы* A, *имеет компоненты вида* (3.2).

Доказательство. Как указано выше, для матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$, построенной из элементов первой строки при помощи формулы (3.1), свойство совместности выполняется.

Ее единственность вытекает непосредственно из формулы (3.1), а справедливость свойства 4) следует из леммы и ее доказательства.

Замечание 1. Компоненты весового вектора w, найденного с помощью (3.2), составляют последний столбец матрицы A, элементы которой построены на основе формулы (3.1).

Проиллюстрируем применение изложенного выше упрощенного варианта МАИ на следующем примере.

Пример 1. Пусть имеются четыре объекта A_1, A_2, A_3, A_4. Предположим, что в результате сравнения первого объекта со всеми остальными, экспертом были получены следующие результаты: $a_{12} = 3, a_{13} = 0.5, a_{14} = 2$. В соответствии с формулой (3.1) матрица парных сравнений будет иметь следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2/3 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1/2 & 3/2 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

На самом деле вся эта матрица для нахождения вектора весов не нужна; требуются лишь элементы последнего столбца: $w_1 = 2, w_2 = 2/3, w_3 = 4, w_4 = 1$. После нормировки, приходим к окончательному результату: $\hat{w}_1 = 6/23,\ \hat{w}_2 = 2/23, \hat{w}_3 = 12/23, \hat{w}_4 = 3/23$.

3.4. Базисные наборы элементов и их характеризация. Как установлено выше, при формировании матрицы парных сравнений от эксперта достаточно получить набор элементов первой строки, после чего остальные элементы матрицы A однозначно вычисляются по формуле (3.1). Оказывается, набор элементов подобного рода не единственный. Введем общее определение.

Определение 1. Будем говорить, что некоторый набор элементов матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$, расположенных выше главной диагонали, является *определяющим*, если на его основе с помощью свойств 2) – 4) можно однозначно определить все остальные элементы матрицы A, причем найденная таким способом матрица будет удовлетворять всем свойствам 1) – 4).

Замечание 2. В соответствии с установленной ранее леммой условие выполнения свойства 4) в определении 1 можно исключить.

В частности, все элементы, расположенные выше главной диагонали, некоторой матрицы, удовлетворяющей свойствам 1) – 3), образуют определяющий набор.

Определение 2. Пусть имеется некоторый набор $\{a_{i_p j_p}\}$, элементов матрицы A, расположенных выше главной диагонали. В случае существования среди элементов этого набора такой тройки элементов $a_{i_a j_a}, a_{i_b j_b}, a_{i_c j_c} \in \{a_{i_p j_p}\}$, что $i_a = i_b, j_a = j_c, j_b = i_c$, будем говорить, что набор $\{a_{i_p j_p}\}$ является *зависимым*. В противном случае этот набор будем именовать *независимым*.

Определяющий набор может быть как независимым, так и зависимым. Число элементов определяющего набора матрицы n-го порядка может оказаться различным. Поэтому введем еще одно определение.

Определение 3. Минимальный (по числу) определяющий набор элементов матрицы A назовем *базисным*.

Нетрудно проверить, что в матрице третьего порядка из трех возможных пар любая пара элементов этой матрицы, расположенных выше главной диагонали, образует базисный набор. У матрицы четвертого порядка из 20 всех возможных трехэлементных наборов элементов, расположенных выше главной диагонали, только 16 являются базисными. При этом небазисными оказываются зависимые наборы, и только они. Например, зависимый набор

a_{12}, a_{14}, a_{24} такой матрицы, для которого верно $a_{14} = a_{12}a_{24}$, не будет определяющим, а значит и базисным. Это объясняется тем, что из этого набора на основе свойства совместности невозможно получить ни один элемент третьего столбца.

Базисные наборы элементов удобно характеризовать не только с помощью свойства независимости, но и в терминах свойства связности определенного неориентированного графа. Введем соответствующее определение.

Пусть имеется произвольный непустой набор элементов матрицы парных сравнений A из числа тех, которые расположены выше главной диагонали. Введем в рассмотрение неориентированный граф, содержащий n вершин, обозначаемых $1,2,...,n$, в котором пара вершин i_1 и i_2 ($i_1, i_2 \in \{1,2,...,n\}, i_1 < i_2$) является смежной тогда и только тогда, когда среди указанного набора элементов встречается элемент $a_{i_1 i_2}$. Будем говорить, что этот граф *порожден* указанным набором элементов матрицы парных сравнений.

Нетрудно понять, что в терминах порожденного графа «расширение» фиксированного набора элементов за счет добавления зависимых элементов a_{ij} на основе свойства совместности 3) (т.е. на основе операции умножения по формуле $a_{ij} = a_{ik}\, a_{kj}$) с привлечением всех пар элементов данного набора, у которых первый индекс одного элемента равен второму индексу другого элемента, соответствует операции транзитивного замыкания этого графа.

Теорема 2. *Для любого набора элементов* $\{a_{i_p j_p}\}$ *матрицы* $A = (a_{ij})_{n \times n}$, *расположенных выше главной диагонали, следующие три высказывания эквивалентны*:

1) *набор элементов* $\{a_{i_p j_p}\}$ *является базисным*;
2) *набор* $\{a_{i_p j_p}\}$ *состоит из* $n-1$ *элементов и порожденный им граф является связным*;
3) *набор* $\{a_{i_p j_p}\}$ *состоит из* $n-1$ *элементов и является независимым набором.*

Доказательство. Сначала установим эквивалентность первых двух высказываний. С этой целью проверим, что любой базисный набор порождает связный граф. Сразу заметим, что базисный набор элементов по определению является определяющим.

Для доказательства предположим противное: существует определяющий набор элементов $\{a_{i_p j_p}\}$, причем порожденный им граф не является связным, т.е. содержит по меньшей мере две компоненты связности. Выберем произвольно в каждой из указанных компонент по одной вершине. Обозначим их через m и k. Не умаляя общности, будем считать, что $m < k$. Докажем, что элемент a_{mk} матрицы A невозможно определить, исходя из набора $\{a_{i_p j_p}\}$ на основе свойств 2) – 3). Напомним, что благодаря лемме свойство 4) в расчет можно не принимать. В связи с этим ясно, что элемент a_{mk} если и удастся определить подобным образом, то только на основе свойства совместности 3).

Поэтому рассмотрим равенство $a_{il} = a_{ij}\, a_{jl}$, $i, j, l = 1,2,...,n$, лежащее в основе свойства совместности, и элемент a_{mk}. В этом равенстве присутствуют три числа, поэтому возможны три случая: $a_{il} = a_{mk}$, $a_{ij} = a_{mk}$ или $a_{jl} = a_{mk}$. Рассмотрение всех этих случаев по существу ничем не отличается друг от друга, поэтому ограничимся лишь первым из них. Итак, имеем $a_{mk} = a_{mj}\, a_{jk}$. В этом равенстве индексы m и k встречаются дважды, а значит, исходя из свойства совместности, для определения элемента a_{mk} требуется знать еще по одному элементу указанных двух компонент связности: a_{mj} и a_{jk} $j \neq m$, $j \neq k$. В свою очередь, каждый из элементов a_{mj}, a_{jk} для своего нахождения на основе свойства совместности вновь требует знания какой-то другой пары элементов двух рассматриваемых компонент связности, и т.д. Рассуждая подобным образом, в силу конечности числа элементов каждой из компонент связности придем к тому, что требуемым способом элемент a_{mk} определить невозможно. Следовательно, рассматриваемый набор $\{a_{i_p j_p}\}$ определяющим не является. Это противоречит сделанному в начале доказательства предположению. Значит, всякому базисному (более того, – определяющему) набору элементов соответствует связный граф.

Установим, что минимальное число определяющих (т.е. базисных) элементов равно $n-1$. Неориентированный n-вершинный граф с $n-2$ ребрами не может быть связным (см. теорему 5.4 из [13], с. 62). Поэтому на основании доказанного базисный набор не может содержать меньше $n-1$ элементов. Из теоремы 1 следует, что набор из $n-1$ элементов $a_{12},...,a_{1n}$ первой строки является определяющим. Следовательно, минимальное число набора определяющих (а значит, базисных) элементов в точности равно $n-1$. Тем самым, доказано, что из высказывания 1) следует высказывание 2).

Рассмотрим произвольный набор $\{a_{i_p j_p}\}$ из $n-1$ элементов, которому соответствует связный порожденный граф. Поскольку транзитивное замыкание связного графа представляет собой полный граф, то набор $\{a_{i_p j_p}\}$ является определяющим. Кроме того, как установлено выше, число минимальное число элементов определяющего набора равно $n-1$. Поэтому набор $\{a_{i_p j_p}\}$ является базисным, а значит, из высказывания 2) вытекает высказывание 1). Следовательно, эти два высказывания эквивалентны.

Рассмотрим произвольный независимый набор из $n-1$ элементов. Нетрудно понять, что свойство независимости равносильно тому, что порожденный этим набором граф не имеет циклов. Последнее эквивалентно тому, что порожденный граф является деревом, т.е. связным графом (см. теорему 4.1 из [13], с. 48). Тем самым, высказывания 2) и 3) эквивалентны.

3.5. Схема «последовательного сравнения». Наличие целого семейства базисных наборов может быть использовано на практике для выбора такого набора, при котором эксперт мог бы получить наиболее надежные результаты сравнения. Например, набор, состоящий из элементов первой строки, как указывалось выше, соответствует схеме «сравнения с образцом».

Рассмотрим базисный набор $a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1,n}$. Ему отвечает следующая схема «последовательного сравнения». Из имеющегося набора объектов выбирается какой-то один. Ему присваивается первый номер. Для него с целью последующего сравнения подбирается другой объект (которому присваивается второй номер), наиболее «подходящий» для сравнения с первым. В результате сравнения становится известен элемент a_{12}. Дальнейшие действия аналогичны: для второго объекта выбирается наиболее «подходящий» для сравнения третий; в результате сравнения становится известен элемент a_{23} и т.д.

Можно проверить, что формула для последовательного ($j = 3, ..., n$) вычисления всех остальных элементов матрицы A, расположенных выше главной диагонали, на основе базисного набора $a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1,n}$ имеет вид

$$a_{ij} = a_{i,j-1}\, a_{j-1,j}, \qquad i = 1, ..., n-2 \ (i < j-1),$$

а компоненты (ненормированного) весового вектора w могут быть найдены в виде произведения по формуле:

$$w_k = a_{k,k+1} a_{k+1,k+2} ... a_{n-1,n}, \qquad k = 1, 2, ..., n-1; \quad w_n = 1.$$

4. УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ МАИ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ

4.1. Многокритериальная задача и ее решение при помощи МАИ. Предшествующее рассмотрение было посвящено задачам с одним критерием. Теперь обратимся к многокритериальной задаче (см. [2]-[5], [7], [10]-[12], [14]-[15]) с векторным критерием $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, заданным на конечном множестве возможных решений X. Будем считать, что каждый из числовых критериев f_i желательно максимизировать (более точно это высказывание можно выразить в терминах «аксиомы согласования» [14]-[15]). Решением этой задачи в общем случае является определенное подмножество множества X, которое, следуя [14]-[15], условимся называть множеством выбираемых («наилучших») решений и обозначать $\mathrm{Sel}\, X$.

Применение МАИ к решению многокритериальной задачи основано на ее скаляризации при помощи линейной свертки критериев. А именно, согласно МАИ «наилучшим» решением многокритериальной задачи объявляется то, которое доставляет наибольшее возможное значение линейной (аддитивной) свертке критериев $\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x)$, т.е. такое решение $x^* \in X$, для которого выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x).$$

При этом положительные коэффициенты $w_1, w_2, \ldots, w_m$ линейной свертки находятся на основе МАИ так, как это было описано выше. А именно, эксперту для сравнения по «весу» или «важности» предлагается набор критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$; они выступают в качестве сравниваемых объектов. Решив указанным в разд. 2-3 способом эту задачу и получив в распоряжение конкретные положительные значения $w_1, w_2, \ldots, w_m$ коэффициентов линейной свертки $\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x)$, можно приступить к ее максимизации на множестве возможных решений X и, тем самым, нахождению «наилучшего» (в соответствии с МАИ) решения x^*. Такова схема применения МАИ к решению многокритериальных задач.

4.2. Обоснование двух способов скаляризации многокритериальных задач. Цель данного раздела – обратить внимание всех использующих МАИ и другие методы, основанные на линейной свертке критериев, на необоснованность (и недопустимость) безоглядного применения этой свертки при решении многокритериальных задач с конечным множеством возможных решений.

Обоснование применения линейной свертки критериев для решения многокритериальных задач можно получить из аксиоматически обоснованного автором принципа Эджворта-Парето и известных результатов в области многокритериальной оптимизации. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* X *– непустое выпуклое подмножество векторного пространства* $\Re^n$ *и все компоненты* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *векторной функции* f *вогнуты на нем. Предположим, что выполняются аксиомы* 1 – 3 *«разумного» поведения ЛПР в процессе выбора* (*см.* [14]-[15]). *Тогда всякий элемент произвольного непустого множества* $\mathrm{Sel}\, X$ *выбираемых реше-*

ний может быть получен в результате максимизации линейной свертки при надлежащем подборе ее неотрицательных коэффициентов, т.е. имеет место включение

$$\mathrm{Sel}\,X \subset \bigcup_{w} \operatorname*{argmax}_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x), \tag{4.1}$$

где объединение осуществляется по множеству векторов w, *все компоненты* $w_1, w_2, ..., w_m$ *которых неотрицательны и в сумме равны единице.*

Доказательство. Согласно результатам из [14]-[15] в условиях выполнения упомянутых в формулировке теоремы трех аксиом любое непустое множество выбираемых решений $\mathrm{Sel}\,X$ является подмножеством множества парето-оптимальных решений. С другой стороны, благодаря выпуклости множества X и вогнутости критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ на основе леммы Карлина (см. [10]-[12]) всякое парето-оптимальное решение может быть получено в результате максимизации линейной свертки критериев на множестве X при надлежащем выборе неотрицательных коэффициентов свертки. Иными словами, при указанных предположениях множество парето-оптимальных решений оказывается подмножеством множества $\bigcup_{w} \operatorname*{argmax}_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x)$. В итоге из указанных двух включений вытекает включение (4.1). Теорема доказана.

Поскольку все условия теоремы 3 являются существенными, то они задают тот класс задач многокритериального выбора, для решения которых линейная свертка *в принципе* может быть использована (заметим, что на самом деле условие выпуклости множества возможных решений и требование вогнутости критериев можно несколько ослабить [12]; это не меняет сути последнего высказывания). Иными словами, применение линейной свертки в указанном классе задач, по крайней мере, гипотетически дает возможность «обнаружить» любое решение, которое может оказаться выбранным, т.е. «наилучшим». За пределами указанного класса применение этой свертки рискованно или же вообще недопустимо, поскольку в результате ее максимизации (при всех возможных значениях неотрицательных коэффициентов $w_1, w_2, ..., w_m$) можно «пропустить» именно то решение, которое в данном случае следует выбрать.

В частности, так как конечное множество не является выпуклым, то применение МАИ в случае конечного множества возможных решений может приводить к результатам, противоречащим здравому смыслу. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. Предположим, что задача состоит в выборе (например, с целью приобретения) прямоугольного земельного участка из следующих трех вариантов: 10×10, 5×20 и

7×15, где измерение производится в каких-то единицах длины. Очевидно, площади двух первых участков одинаковы и меньше площади третьего участка. Нетрудно проверить (например, чисто геометрически), что третий участок (площадь которого максимальна!) ни при каких положительных весах w_1, w_2 критериев, которыми являются длина и ширина участка, не может оказаться выбранным, если выбор осуществляется при помощи линейной свертки критериев.

Более универсальной с точки зрения области применимости является нелинейная свертка $\min\limits_{i=1,\dots,m} w_i f_i(x)$, о чем свидетельствует следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* X *– произвольное непустое множество и все компоненты* $f_1, f_2, \dots, f_m$ *векторной функции* f *положительны на нем. Предположим, что выполняются аксиомы* 1 – 3 *«разумного» поведения ЛПР в процессе принятия решений* (*см.* [14]-[15]). *Тогда всякий элемент произвольного непустого множества* $\operatorname{Sel} X$ *выбираемых решений может быть получен в результате максимизации функции* $\min\limits_{i=1,\dots,m} w_i f_i(x)$ *при надлежащем подборе ее положительных коэффициентов* $w_1, w_2, \dots, w_m$. *Иначе говоря, для любого непустого множества выбираемых решений* $\operatorname{Sel} X$ *имеет место включение*

$$\operatorname{Sel} X \subset \bigcup_{w} \operatorname*{argmax}_{x \in X} \min_{i=1,\dots,m} w_i f_i(x),$$

где объединение осуществляется по множеству векторов w, *все компоненты которых положительны и в сумме равны единице*.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3 с той лишь разницей, что вместо леммы Карлина следует использовать теорему Ю.Б. Гермейера [10]-[12].

Согласно теореме 4 в случае, когда одновременно выполнены следующие три условия

1) множество возможных решений X конечно,
2) критерии, заданные на нем, положительны,
3) ЛПР в процессе выбора действует «разумно»,

любое выбираемое решение всегда (по крайней мере, гипотетически) может быть получено в результате максимизации функции $\min\limits_{i=1,\dots,m} w_i f_i(x)$ на множестве X при определенных положительных весовых коэффициентах $w_1, w_2, \dots, w_m$.

Первые два из указанных выше условий в рассматриваемом классе многокритериальных задач заведомо выполняются, так как множество возможных решений (равно как и число критериев) конечно и значения критериев положительны, если эти значение вычислены на основе МАИ или его упрощенного варианта. Поэтому остается предполагать только «разумность» действий ЛПР, выражающуюся в терминах определенных трех аксиом (см. [14]-[15]). Тем самым, при указанных весьма слабых предположениях применение указанной нелинейной свертки для решения рассматриваемых многокритериальных задач является обоснованным.

4.3. Упрощенный вариант МАИ на основе нелинейной свертки критериев. На основании изложенного при решении практических многокритериальных задач с конечным множеством возможных решений предлагается использовать следующее существенное видоизменение МАИ.

Прежде всего, для определения весовых коэффициентов $w_1, w_2, ..., w_m$ следует применить описанный выше упрощенный вариант МАИ. Это дает возможность для любого числа m критериев на основе всего лишь определенных $m-1$ базисных элементов матрицы парных сравнений, полученных от эксперта, легко найти значения весов критериев $w_1, w_2, ..., w_m$. Далее, в результате максимизации функции $\min\limits_{i=1,...,m} w_i f_i(x)$ на множестве X, определяется «наилучшее» решение, подлежащее выбору. Если исходная задача состоит не в определении одного наилучшего решения, а в ранжировке всех возможных решений, то эту ранжировку можно осуществить в точном соответствии со значениями указанной свертки во всех точках множества X.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saaty T.L.* An eingenvalue allocation model for prioritization and planning// Energy Management and Policy Center, University of Pennsylvania, 1972.
2. *Саати Т.*, *Кернс*. Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1989.
4. *Saaty T.L.* Multicriteria Decision Making. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation. – University of Pittsburgh, RWS Publications, 1990.
5. *Yu P.L.* Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques, and Extensions. – Plenum Press, N.Y.-London, 1985.
6. *Андрейчиков А.В.*, *Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2001.
7. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2000.
8. *Ногин В.Д*, *Чистяков С.В.* Применение линейной алгебры в принятии решений. – СПб: СПбГТУ, 1998.
9. *Triantaphillou E.* Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative AHP// J. of Multi-Criteria Decision Analysis, 2001, v. 10, pp. 11-25.
10. *Гермейер Ю.Б.* Введение в исследование операций. М.: Наука, 1971.
11. *Карманов В.Г.*, *Федоров В.В.* Моделирование в исследовании операций. – М.: Твема,

1996.
12. *Подиновский В.В.*, *Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
13. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973.
14. *Ногин В.Д.* Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 2002, № 7, С. 951-957.
15. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002.