

УДК 517.977.58

Сравнение эффективности алгоритмов динамического управления капиталом по функции мощности

Гурьянова Т.В.

Донецкий национальный технический университет
gurianova_taya@ukr.net

Abstract

Gurianova T. Comparison of effectiveness of money management's dynamics algorithms by power function. Estimation of effectiveness of money management's dynamics algorithms by statistical power function is proposed. Analysis of effectiveness is performed for new money management's dynamics algorithms in comparison of well-known R. Vince's method. New algorithm is more effective and can be used in practical management of economic and social systems.

Введение

В своей монографии [1] Р. Винс разработал оригинальную теорию «оптимального f ». В работах [2, 3] нами показано, что применение эмпирического метода нахождения «оптимального f » Р. Винса в алгоритмах динамического управления капиталом (ДУК) нуждается в серьезной корректировке. Применение новых методов позволяет существенно повысить эффективность алгоритмов ДУК по критериям достижения максимальной прибыльности, минимального риска и т.д. В статье предлагается метод оценки эффективности алгоритмов ДУК по их разделительным способностям для различных поведений системы управления – мощности алгоритма.

Постановка задачи

Целью настоящего исследования является сравнение эффективности известного и предложенных алгоритмов ДУК с использованием функции мощности комбинированным аналитическим и экспериментальным методами.

Известный метод Р. Винса [1, 2]:

$$K_{1n} \Big|_{\max} = \prod_{i=1}^n \left[1 + \frac{-x_i}{x_j} \cdot f_i \right], \quad (1)$$

где K_{1n} - множитель капитала, $\{x_n\}$ - ряд выигрышей и проигрышей компьютерной торговой системы, x_j - наибольший проигрыш системы, f_i - часть капитала, предназначенная для реинвестирования, сравнивается со следующими методами:
- методом, основанном на интервальных оценках [3]

$$F_{1i} = \bar{f} \pm \frac{k \cdot \sigma_f}{\sqrt{n}}, \quad (2)$$

где $\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i^*$, $\sigma_f = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f_i^* - \bar{f})^2$ - соответственно математическое ожидание и СКО оценок f^* , полученных по (1); k - критическое значение t -статистики Стьюдента для числа степеней свободы $k = n - 1$ и заданной доверительной вероятности $P_{дог}$, F_{1i} - оценка части капитала при реинвестировании;
- методом предварительного усреднения ряда $\{x_i\}$ [3]

$$K_{2n} \Big|_{\max} = \prod_{i=1}^n \left[1 + \frac{-EMA[x_i]}{EMA[x_j]} \cdot F_{2i} \right], \quad (3)$$

где K_{2n} - множитель капитала, F_{2i} - оценка части капитала при реинвестировании, $EMA[x_i]$ - усредненная с помощью экспоненциальной скользящей средней величина x_i , $EMA[x_j]$ - самый большой усредненный проигрыш;
- методом последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$, полученных по (1)

$$F_{3i} = EMA[f_i] = EMA[f_{i-1}] + \frac{2}{m+1} \{f_i - EMA[f_{i-1}]\} \quad (4)$$

где F_{3i} - оценка части капитала при реинвестировании, f_i - оценки, полученные по (1), m - эквивалентное окно временного усреднения;
- параметрическим методом определения оптимального f [4]

$$\ln(K_{4n}) \Big|_{\max} = \int_{-1}^1 \ln(1 + f \cdot x) \cdot w(x) \cdot dx, \quad (5)$$

где K_{4n} - множитель капитала, $w(x)$ - функция плотности вероятности распределения ряда $\{x_n\}$.

При сравнении эффективности анализируемых методов мы основывались на методах сравнения эффективности оценок и сравнении функций мощности [5]. В [5] предлагается в качестве меры сравнения эффективности двух критериев использовать показатель, который определяется как отношение:

$$A = \frac{n_2}{n_1}, \quad (6)$$

где n_1 – объем выборки, при котором первый критерий достигает определенной мощности, n_2 – объем выборки, при котором второй критерий достигает того же уровня мощности. При этом, если $A < 1$, то второй критерий является более эффективным, чем первый, при $A > 1$ – справедливо обратное утверждение.

Ниже предложен приближенный метод оценки эффективности алгоритмов ДУК путем анализа нового варианта функции мощности – показателя E .

Полученные результаты

В работе [2] нами были определены границы применимости на практике метода «оптимального f » Р. Винса: для интервала адаптации $\tau = 20$ и среднеквадратического отклонения $SD = 0,47$ метод Р. Винса работает при $1,05 \leq G \leq 1,3$, где G – среднее геометрическое системы, а математическое ожидание связано с G и SD формулой

$$M = \sqrt{G^2 + SD^2}. \quad (7)$$

Точный аналитический расчет апостериорных законов распределения выходных оценок представляет собой сложную математическую задачу. Апостериорные законы можно получить только в приближенном виде. Поэтому нахождение этих законов было осуществлено путем имитационного моделирования. Исходным законом распределения вероятностей случайных величин $\{x_n\}$ является усеченный нормальный.

Имитационная модель строилась на следующих данных: для каждого из перечисленных алгоритмов были сгенерированы по усеченному нормальному закону распределения по три ряда $\{x_n^i\}, n = 30020, i = 1, 2, 3$ с $SD = 0,47$, средними геометрическими $G = 1,05; 1,175; 1,3$ и соответствующими им математическими ожиданиями $M = 1,15; 1,265; 1,38$, вычисленными по формуле (7). Причем, все данные подчиняются соотношению $|x_j| \leq 1 \forall j = \overline{1, n}$ из экономических соображений (т.е. выигрыш или проигрыш системы не может превышать 100%).

Затем для каждого из трех рядов данных

каждого из пяти алгоритмов (1)-(5) были построены ряды оценок $\{f\}$ оптимальной доли капитала при реинвестировании. Также были построены полигоны частот этих оценок. На рис.1 изображены полигоны частот для метода (1) Р. Винса, где полигон частот №1 получен из ряда оценок $\{f_m^1\}, m = 30000$, вычисленного на ряде данных $\{x_n^1\}, n = 30020$, сгенерированных для метода (1) при $SD = 0,47$ и $M = 1,15$; полигон частот №2 получен из ряда оценок $\{f_m^2\}, m = 30000$, вычисленного на ряде данных $\{x_n^2\}, n = 30020$, сгенерированных для метода (1) при $SD = 0,47$ и $M = 1,265$; полигон частот №3 получен из ряда оценок $\{f_m^3\}, m = 30000$, вычисленного на ряде данных $\{x_n^3\}, n = 30020$, сгенерированных для метода (1) при $SD = 0,47$ и $M = 1,38$.

Далее были подобраны наиболее подходящие теоретические распределения для полученных полигонов частот. Им оказалось бета-распределение.

Случайная величина имеет бета-распределение, если плотность вероятности $f(x)$ случайной величины имеет вид [6]:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad (8)$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad (9)$$

где $\alpha, \beta > 0$ – произвольные фиксированные параметры и $B(\alpha, \beta)$ – бета-функция. Математическое ожидание случайной величины x при бета-распределении равно:

$$m = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad (10)$$

а дисперсия случайной величины имеет вид:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \quad (11)$$

На рис. 2 приведен пример аппроксимации трех экспериментальных полигонов частот соответствующими теоретическими бета-распределениями.

Во всех случаях среднеквадратическое отклонение теоретического распределения от экспериментального не превышало 10^{-4} . С помощью критерия согласия χ^2 Пирсона при использовании в качестве нулевой гипотезы теоретического бета-распределения была доказана состоятельность данной нулевой гипотезы ($p > 0,05$). В таблице 1 приведены параметры α и β для бета-распределения каждого полигона частот.



Рисунок 1 – Экспериментальные полигоны частот оценок $\{f\}$ для метода (1)



Рисунок 2 - Аппроксимация трех экспериментальных полигонов частот для метода (1) теоретическими бета-распределениями

Таблица 1. Параметры бета-распределения

	$G = 1,05$		$G = 1,175$		$G = 1,3$	
	α	β	α	β	α	β
Алгоритм (1)	2.5782	2.1054	7.4203	2.4343	16.096	2.7476
Алгоритм (2)	2.5275	2.0756	7.6085	2.5389	15.205	2.7442
Алгоритм (3) при $m = 2$	3.4886	1.5924	11.73	2.0108	36.125	2.8987
Алгоритм (3) при $m = 3$	4.3737	1.4362	19.252	2.1174	63.886	3.6272
Алгоритм (4) при $m = 2$	2.6322	2.1635	7.8056	2.7044	16.756	2.9057
Алгоритм (4) при $m = 5$	2.6638	2.2567	8.5157	2.9299	16.994	3.0659
Алгоритм (5)	1.5364	0.9669	2.9296	0.874	6.9033	0.9009

Таблиця 2 – експериментальні m і σ полігонов частот рядов оценок $\{f\}$ для методів (1)-(5)

	$G = 1,05$		$G = 1,175$		$G = 1,3$	
	m	σ	m	σ	m	σ
Алгоритм (1)	0.493	0.236	0.710	0.159	0.823	0.098
Алгоритм (2)	0.490	0.238	0.704	0.165	0.817	0.100
Алгоритм (3) при $m = 2$	0.602	0.259	0.808	0.142	0.897	0.076
Алгоритм (3) при $m = 3$	0.664	0.257	0.858	0.129	0.935	0.058
Алгоритм (4) при $m = 2$	0.494	0.232	0.701	0.158	0.822	0.094
Алгоритм (4) при $m = 5$	0.491	0.224	0.707	0.146	0.818	0.090
Алгоритм (5)	0.676	0.314	0.899	0.180	0.981	0.060

Еффективность алгоритмов ДУК

Нашей задачей было сравнить алгоритм (1) с алгоритмами (2)-(5). Сравнение проходило следующим образом:

1) в первом алгоритме ДУК рассчитывается распределение значений оценок $\{f\}$ для ряда $\{x'_n\}$, $n = 30020$, при заданном значении M' и SD' и вычисляется математическое ожидание ряда $\{f\} < f_1 >$ и его стандартное отклонение – SD_{f_1} ;

2) для того же алгоритма рассчитывается распределение значений оценок $\{f\}$ для ряда $\{x''_n\}$, $n = 30020$, при заданных значениях параметров M'' и SD'' и вычисляется математическое ожидание ряда $\{f\} < f_2 >$ и его стандартное отклонение – SD_{f_2} ;

3) во втором алгоритме ДУК (сравниваемом) аналогично рассчитывается распределение для тех же заданных параметров M' и SD' и вычисляется $< f_3 >$ и SD_{f_3} ;

4) также во втором алгоритме ДУК аналогично рассчитывается распределение значений оценок $\{f\}$ для заданных параметров M'' и SD'' и вычисляется $< f_4 >$ и SD_{f_4} ;

5) для первого алгоритма (1) при $n_1=30000$ вычисляется значение показателя T_1 :

$$T_1 = \frac{|< f_1 > - < f_2 >|}{\sqrt{\frac{SD_{f_1}^2 + SD_{f_2}^2}{n_1}}}; \quad (12)$$

6) затем рассчитывается значение объема выборки n_2 для второго алгоритма, при котором выполняется равенство:

$$\frac{|< f_3 > - < f_4 >|}{\sqrt{\frac{SD_{f_3}^2 + SD_{f_4}^2}{n_2}}} = T_1; \quad (13)$$

7) в качестве меры эффективности алгоритмов

ДУК вычисляется значение показателя эффективности E :

$$E = \frac{n_2}{n_1}. \quad (14)$$

При этом, если $E < 1$, то второй алгоритм ДУК является более эффективным, чем первый, при $E > 1$ – справедливо обратное утверждение.

В таблице 2 приведены значения m и σ каждого из полигонов частот.

Для большей наглядности сравним алгоритм (3) при $m=2$ с алгоритмом (1) поэтапно. В соответствии с таблицей 1 алгоритм (1) имеет три полигона частот оценок $\{f\}$ с такими параметрами: 1) $m = 0,493$, $\sigma = 0,236$ для данных $\{x^1_n\}$ с $G = 1,05$ и $SD = 0,47$; 2) $m = 0,71$, $\sigma = 0,159$ для ряда данных $\{x^3_n\}$ с $G = 1,175$ и $SD = 0,47$; 3) $m = 0,823$, $\sigma = 0,098$ для данных $\{x^3_n\}$ с $G = 1,3$ и $SD = 0,47$. Тогда по алгоритму (3) можно рассчитать три полигона частот со следующими параметрами:

1) $m = 0,602$, $\sigma = 0,259$ для данных $\{x^1_n\}$ с $G = 1,05$ и $SD = 0,47$; 2) $m = 0,808$, $\sigma = 0,142$ для ряда данных $\{x^3_n\}$ с $G = 1,175$ и $SD = 0,47$; 3) $m = 0,897$, $\sigma = 0,076$ для данных $\{x^3_n\}$ с $G = 1,3$ и $SD = 0,47$. Тогда по формуле (12) T_1 для пары рядов данных $G = 1,05 / G = 1,175$ равно:

$$T_1 = \frac{|0,493 - 0,71|}{\sqrt{\frac{0,236^2 + 0,159^2}{30000}}} = 132,08, \quad \text{а для пары}$$

$G = 1,175 / G = 1,3$:

$$T_1 = \frac{|0,71 - 0,823|}{\sqrt{\frac{0,159^2 + 0,098^2}{30000}}} = 104,79. \quad \text{Откуда по}$$

формуле (13) для пары $G = 1,05 / G = 1,175$

$$132,08 = \frac{|0,602 - 0,808|}{\sqrt{\frac{0,259^2 + 0,142^2}{n_2}}} = 0,697 \sqrt{n_2}, \quad \text{т.е.}$$

$$n_2 = \left(\frac{132,08}{0,697} \right)^2 \approx 35909 \quad \text{и} \quad \text{тогда}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{35909}{30000} \approx 1,19; \quad \text{аналогично для пары}$$

$$G = 1,175 / G = 1,3 : \frac{n_2}{n_1} = \frac{35452}{30000} \approx 1,18.$$

В таблице 3 приведены полученные в результате имитационного моделирования коэффициенты E .

Таблица 3 – полученные коэффициенты E .

	$G = 1,05 /$ $G = 1,175$	$G = 1,175 /$ $G = 1,3$
Алгоритм (1)	1	1
Алгоритм (2)	1,07	1,06
Алгоритм (3) при $m = 2$	1,19	1,18
Алгоритм (3) при $m = 3$	1,28	1,23
Алгоритм (4) при $m = 2$	1,07	0,84
Алгоритм (4) при $m = 5$	0,89	0,87
Алгоритм (5)	1,53	1,94

Выводы

1. Впервые исследованы законы распределений оценок известного алгоритма ДУК Р. Винса и предложенных оригинальных алгоритмов ДУК [2, 3]. Эти законы аппроксимируются бета-распределением ($p > 0,05$, по критерию χ^2 Пирсона).

2. Предложен упрощенный вариант вычисления функций мощности известного и предложенных алгоритмов ДУК с использованием статистики T , которая представляет собой отношение изменения средних значений распределения оценок $\{f\}$ при различных значениях G системы к стандартной ошибке этого изменения.

3. На основании п.2 можно ранжировать известный алгоритм ДУК Р. Винса и предложенные оригинальные алгоритмы ДУК [2, 3] по их эффективности:

- 1) алгоритм последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$ при $m = 5$;
- 2) алгоритм «оптимального f » Р. Винса;
- 3) алгоритм последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$ при $m = 2$;
- 4) алгоритм, основанный на интервальных оценках;
- 5) алгоритм предварительного усреднения ряда $\{x_i\}$ при $m = 2$;
- 6) алгоритм предварительного усреднения ряда $\{x_i\}$ при $m = 3$;
- 7) параметрический алгоритм.

4. Предложенный оригинальный алгоритм ДУК последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$ (при $m = 5$) является более эффективным (по функции мощности) по сравнению с методом-прототипом Р. Винса и может быть рекомендован для практического использования в автоматизированных информационных системах для эффективного управления рисками экономических и социальных систем.

Литература

1. Винс Р. Математика управления капиталом. Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров: Пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2001. – 400 с.
2. Смирнов А.В., Гурьянова Т.В. Об «оптимальном f » Ральфа Винса. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», вып. 9 (132), Донецьк, ДонНТУ, 2008. – С. 216-220.
3. Смирнов А.В., Гурьянова Т.В. Новое в динамическом управлении. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», вып. 10 (153), Донецьк, ДонНТУ, 2009. – С. 230-233.
4. Vince R. The Handbook of Portfolio Mathematics: Formulas for Optimal Allocation & Leverage. Hoboken, NJ: Wiley, 2007.
5. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи: Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
6. Evans M., Hastings N., Peacock B. Statistical distributions. 2nd edition. New York: John Wiley&Sons, 1993.

Поступила в редакцию 30.03.2010