

УДК 004.925

**Е.А.Башков, Аль-Орайкат Анас Махмуд, Дубровина О.Д., Авксентьева О.А.**  
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк  
кафедра прикладной математики и информатики  
E-mail: bashkov@pmi.dgtu.donetsk.ua

## **АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ БАЗИС ПОСТРОЕНИЯ ГЕНЕРАТОРОВ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ ДЛЯ 3D ДИСПЛЕЕВ**

### **Аннотация**

*Башков Е.А., Аль-Орайкат Анас Махмуд, Дубровина О.Д., Авксентьева О.А. Алгоритмический базис построения генераторов отрезков прямых для 3D дисплеев. Рассматривается задача генерации отрезков прямых для трехмерных дисплеев. Предложены новые подходы решения задачи. Представлены результаты компьютерных экспериментов и оценки ошибок и времен реализации различных алгоритмов генерации.*

*Ключевые слова: 3D дисплей, отрезок прямой, сегмент, воксель, матрица инкрементов*

### **Введение**

Развитие трехмерного кинематографа и зарождение трехмерного телевидения (3DTV) свидетельствуют, что наступает качественно новый этап представления «искусственных» зрительных образов человеку - *трехмерная* эра. Фактическое единство техники построения цифровых телевизоров и компьютерных дисплеев позволяет в этой связи прогнозировать появление нового класса универсальных устройств отображения - устройств для воспроизведения 3D контента. Следует отметить, что технологии и техники для воспроизведения трехмерных образов имеют более чем 150 летнюю историю, которая начинается исследованиями Ч.Уитстона (1838 г.) и "стереоскопа", изобретенного Д.Брюстером (1849 г.) [1]. К настоящему времени разработано множество подходов к построению 3D устройств отображения, современная классификация приведена в [2, 3]. В современном 3D прорыве господствующими стали технологии бинокулярной стереоскопии (пассивные анаглифические или поляризационные очки, активные очки). К сожалению, эти технологии, кроме несомненных достоинств (в первую очередь сравнительная дешевизна), имеют и существенные недостатки. К ним, на наш взгляд, следует отнести следующие:

- во первых, до конца не исследованное, но убедительно установленное отрицательное влияние на людей с аномалиями зрения, например с широко распространенными близорукостью и дальнозоркостью. Негативные последствия для зрительного аппарата человека имеет и высокая длительность восприятия 3D бинокулярных изображений;
- во-вторых, существенным фактором, снижающим качество восприятия 3D бинокулярных изображений, является требование достаточно точного позиционирования наблюдателя;
- в-третьих, бинокулярные подходы не обеспечивают многоракурсного наблюдения, что является существенным требованием для ряда приложений.

Поиск решений, устраняющих указанные недостатки, привел исследователей к разработке автостереоскопических 3D устройств отображения, призванных приблизить создаваемые компьютером «искусственные» изображения к визуальным стимулам, естественно воздействующим на зрительный аппарат человека. Объемные технологии [4], относящиеся к этому классу, принципиально, не имеют ограничений на положение и погрешность позиционирования наблюдателя, не оказывают отрицательного влияния на зрительный аппарат чело-

века. Но, распространение такого рода устройств сдерживается их весьма высокой стоимостью, что существенно суживает круг пользователей.

Кроме того, одной из важных причин малой распространенности устройств на базе объемных технологий является отсутствие стандартизации представления 3D информации для них. Здесь следует отметить, что, в отличие от 2D визуализации, в этой области даже не выработаны определения типовых 3D графических примитивов и алгоритмов их генерации.

В [5, 6] рассмотрены подходы к построению базового графического примитива - отрезка прямой в приложении к 3D объемным дисплеям. В настоящей работе предлагается ряд алгоритмических подходов к трехмерному воксельному представлению отрезка прямой и дается их сравнительный анализ, что может быть положено в основу стандартного 3D представления отрезка.

**Задача и основной подход 3D растрового разложения отрезка.**

Пусть некоторая область трехмерного евклидова пространства, которое отображается 3D дисплеем, имеет вид трехмерного куба

$$\Omega \in \mathbf{R}^3, 0 \leq x < H, 0 \leq y < H, 0 \leq z < H.$$

Следуя [6], положим, что  $\Omega$  заполнена вокселями – простейшими элементами, которые отображаются 3D дисплеем. При этом воксель - единичный куб, а множество вокселей, заполняющих  $\Omega$  можно представить как трехмерный массив вокселей  $V_{i,j,l}$ . Причем, с одной стороны,  $i,j,l$  - это индексы вокселя в массиве, принимающие значения  $0,1,\dots,[H]$ , а с другой, определяют координаты вокселя в  $\Omega$ . Таким образом, воксель  $V_{i,j,l}$  это подмножество  $\Omega$ , которое может быть определено как  $i \leq x < i+1, j \leq y < j+1, l \leq z < l+1$ .

Соседями некоторого вокселя  $V^{(k)}$  с координатами  $i_k, j_k, l_k$  будем считать воксели  $V^{(g)}$ , для которых выполняются условие [7]

$$m_{g,k} = |i_g - i_k| + |j_g - j_k| + |l_g - l_k|, 0 < m \leq 3, \tag{1}$$

где  $m$  - связность вокселей.

Определим координаты центра  $V_C$  вокселя  $V_{i,j,l}$  в  $\Omega$  как

$$V_{Cx} = i+0.5, V_{Cy} = j+0.5, V_{Cz} = l+0.5, \tag{2}$$

В  $\Omega$  задан отрезок прямой **SE** своей начальной  $S = [x_s, y_s, z_s]'$  и конечной  $E = [x_E, y_E, z_E]'$  точками, при этом  $E \neq S$ . Необходимо найти такую последовательность вокселей  $V_{SE}^{(k)}$ ,  $k=1, 2, \dots, N$ , что  $S \in V_{SE}^{(1)}$ ,  $E \in V_{SE}^{(N)}$ , а для любого промежуточного вокселя  $V_{SE}^{(k)}$ ,  $k=2,3, \dots, N-1$  выполняется условие  $Et + S(1-t) \in V_{SE}^{(k)}$  для некоторого  $t, 0 < t < 1$ . Будем называть найденную последовательность «3D цифровой аппроксимацией» **SE** или «3D растровым разложением» **SE**.

Потребуем также, чтобы связность  $m_{k,k+1}$  любой пары вокселей в последовательности  $V_{SE}^{(k)}$  была максимальной, и, чтобы у всех промежуточных вокселей, кроме первого и последнего, было только два соседа. Количество вокселей  $N$  в 3D разложении **SE** с учетом выполнения предыдущего требования может быть найдено как

$$N = \text{int}(\max(|x_E - x_S|, |y_E - y_S|, |z_E - z_S|)) + 1. \tag{3}$$

Предположим что найден некоторый  $V_{SE}^{(k)}$ . Необходимо из соседей  $V_{SE}^{(k)}$  выбрать по некоторому критерию следующий воксель, которому принадлежит отрезок. У каждого вокселя есть 26 возможных соседей, смежных с ним. Но выбор следующего нужно делать только среди 7 вокселей - претендентов  $V_{SE}^{(kq)}$ ,  $q=1,2,\dots,7$ , принадлежащих октанту, в котором лежит направляющий вектор заданного отрезка. Определим вектор поиска  $C$  как

$$C = \text{sign}(U), \quad U = \frac{SE}{|SE|}. \tag{4}$$

здесь  $\text{sign}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \geq 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}$ .

Таким образом координаты (индексы) вокселей - претендентов  $V_{SE}^{(kq)}$ ,  $q=1,2,\dots,7$  следует формировать в соответствии с матрицей  $M$  приращений:

$q$	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta i$	$C_x$	0	0	$C_x$	$C_x$	0	$C_x$
$\Delta j$	0	$C_y$	0	$C_y$	0	$C_y$	$C_y$
$\Delta l$	0	0	$C_z$	0	$C_z$	$C_z$	$C_z$

С учетом (3), можно сократить количество вокселей - претендентов до 4-х, так как по направлению с максимальной проекцией на каждом шаге необходимо изменять индекс. То есть, с учетом приоритетности одной из координат, матрица  $M$  принимает вид:

Приоритет	X				Y				Z			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
$q$	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
$\Delta i$	$C_x$	$C_x$	$C_x$	$C_x$	0	$C_x$	0	$C_x$	0	0	$C_x$	$C_x$
$\Delta j$	0	$C_y$	0	$C_y$	$C_y$	$C_y$	$C_y$	$C_y$	0	$C_y$	0	$C_y$
$\Delta l$	0	0	$C_z$	$C_z$	0	0	$C_z$	$C_z$	$C_z$	$C_z$	$C_z$	$C_z$

В качестве критерия отбора очередного  $V_{SE}^{(k+1)}$  вокселя среди вокселей - претендентов в [6] используется расстояние от центра  $V_{SE}^{(kq)}$  до прямой, содержащей заданный отрезок. При этом для растрового разложения одного отрезка требуется как минимум  $4(N - 1)$  раз вычислить расстояние до прямой, что требует существенных вычислительных затрат и затрудняет генерацию сложных 3D сцен в реальном времени.

**Метод пересекающихся перпендикулярных плоскостей**

Любая прямая в трехмерном пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей. Определим две взаимно перпендикулярные плоскости  $P_1$  и  $P_2$ , содержащие  $SE$  следующим образом. Для задания плоскости  $P_1$  выберем точки  $S$  и  $E$ , а третью точку  $F_1 \notin SE$  – произвольно. Плоскость  $P_2$  определим через точки  $S$  и  $E$  и  $F_2$ , лежащей на

перпендикуляр к  $P_1$  в точке  $S$ . Определение коэффициентов уравнений плоскостей в таком случае не представляет трудностей.

Расстояния  $d_1, d_2$  от произвольной точки  $G = [x_0, y_0, z_0]$  до плоскостей  $P_1, P_2$ , соответственно, можно найти как:

$$d_1 = \frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \tag{5}$$

$$d_2 = \frac{|A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

где  $A_1, B_1, C_1, D_1$  и  $A_2, B_2, C_2, D_2$  – коэффициенты плоскостей  $P_1, P_2$ .

«Отклонение» вокселя - претендента  $V_{SE}^{(kq)}$  от отрезка  $SE$  можно оценить через невязку  $\varepsilon_q = |d_{1q}| + |d_{2q}|$ , или, с учетом того, что для нас имеют значение только относительные величины отклонений

$$\varepsilon_q = |A_1x_q + B_1y_q + C_1z_q + D_1| + |A_2x_q + B_2y_q + C_2z_q + D_2|. \tag{6}$$

Тогда, в качестве  $V_{SE}^{(k+1)}$  следует выбирать воксель  $V_{SE}^{(kr)}$ , где

$$r = \arg \min_{q=1,2,3,4} (\varepsilon_q), \tag{7}$$

то есть, воксель - претендент с минимальным отклонением от плоскостей, образующих заданный отрезок.

Алгоритм, реализующий метод **пересекающихся перпендикулярных плоскостей** может быть представлен следующим образом.

**start**

Ввод начальной  $S$  и конечной  $E$  точек;

Определение  $N, V_{SE}^{(1)}, V_{SE}^{(N)}$ ;

Вычисление  $U, C$ ;

Вычисление коэффициентов плоскостей  $P_1, P_2$ ;

Формирование матрицы приращений  $M$ ;

**For**  $k:=1$  **to**  $N-1$  **do**

$\varepsilon_{\min} = +\infty$ ;

**For**  $q:=1$  **to**  $4$  **do**

$$V_{SE}^{(kq)} = V_{SE}^{(k)} + M^{<q>};$$

вычисление  $\varepsilon_q$  по (6);

**if** ( $\varepsilon_q < \varepsilon_{\min}$ ) **then**  $\varepsilon_{\min} = \varepsilon$ ;  $r = q$ ; **end if**  
**end for**

$$V_{SE}^{(k+1)} = V_{SE}^{(k_r)};$$

**end for**

**finish**

В предложенном алгоритме на каждом шаге определения вокселя - претендента необходимо вычислить (6), что, с учетом значений компонент матрицы приращений  $\mathbf{M}$ , можно сделать инкрементно [8, 9], избежав при этом операций умножения.

**Параметрический метод**

Произвольная точка  $\mathbf{G}$  отрезка может быть определена параметрически как

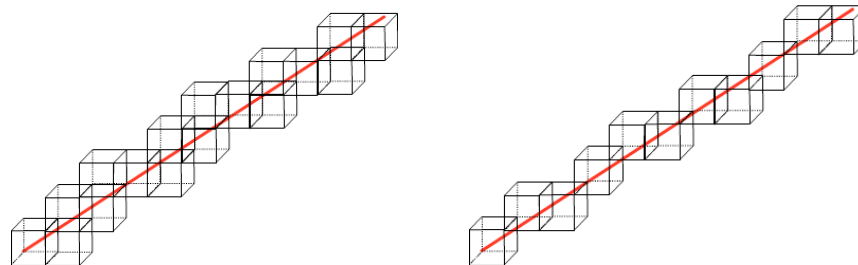
$$\mathbf{G} = \mathbf{E}t + \mathbf{S}(1-t) = \mathbf{S} + (\mathbf{E} - \mathbf{S})t, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (6)$$

Если параметр  $t$  вычислять как  $t_k = \frac{1}{\|\mathbf{E} - \mathbf{S}\|} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{int}(\|\mathbf{E} - \mathbf{S}\|),$

то точки

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{S} + \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{S})}{\|\mathbf{E} - \mathbf{S}\|} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{int}(\|\mathbf{E} - \mathbf{S}\|) \quad (7)$$

будут последовательно попадать во все воксели, которые могут принадлежать растровому разложению отрезка  $\mathbf{SE}$ . Отбрасывая дробную часть значений координат  $\mathbf{G}_k$ , можно получить координаты вершин искомых вокселей. Полученное таким образом множество вокселей может не удовлетворять условию максимальной связности и «двух» соседей (рис. 1.а).



а) все воксели

б) без лишних вокселей

Рисунок 1 – Отрезок линии и соответствующие ему воксели

Для устранения этого недостатка, с учетом знания  $N$  необходимо параметр  $t$  в (6) задавать следующим образом:

$$t_k = \frac{1}{\|\mathbf{E} - \mathbf{S}\|} \bullet \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{S}\|}{N} k = \frac{1}{N} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

то есть

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{S} + \mathbf{W} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad \text{где } \mathbf{W} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{S}}{N}. \quad (8)$$

При таком выборе  $t_k$  точки  $\mathbf{G}_k$  будут последовательно «пробегать» все искомые воксели растрового разложения  $\mathbf{SE}$  (рис. 1.б).

Алгоритм, реализующий **параметрический** метод, может быть записан следующим образом.

**start**

Ввод начальной **S** и конечной **E** точек;

Определение  $N$ ;

Вычисление  $W$  по (8);

**For**  $k:=1$  **to**  $N$  **do**

$$V_{SE}^{(k)} \supseteq S + W k$$

**end for**

**finish**

Предложенный параметрический метод обладает, на наш взгляд, большим потенциалом распараллеливания, так как поиск некоторого вокселя разложения при таком подходе не зависит от поиска соседних вокселей.

**Метод больших вокселей**

Определим «большой» воксель  $\Psi$ , как воксель, сторона которого  $h = 2^n$ ,  $n=1,2,\dots, \lfloor \log_2 H \rfloor$ . Каждый  $\Psi$  состоит из  $2^{3n}$  единичных вокселей

$V_{\Psi_{i,j,l}}$ ,  $i = 0,1,2,\dots,2^n$ ,  $j = 0,1,2,\dots,2^n$ ,  $l = 0,1,2,\dots,2^n$ . Потребуем также, чтобы

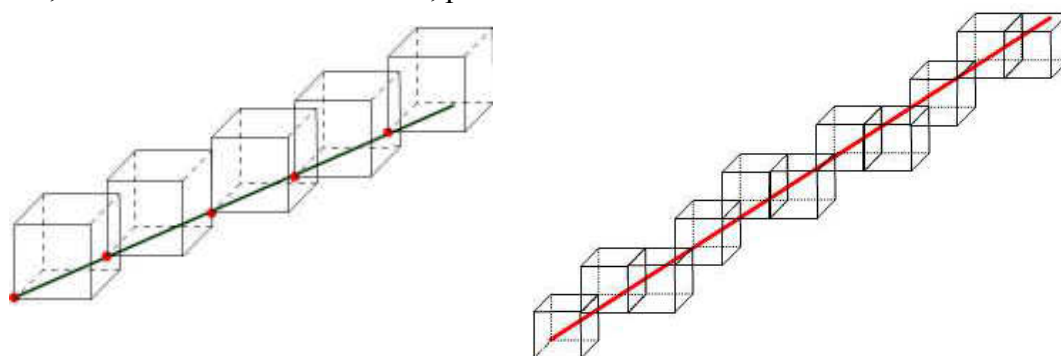
для каждого  $\Psi$  его  $V_{\Psi_{0,0,0}}$  воксель содержал точки заданного отрезка **SE**. «Большие»

воксели могут соприкасаться таким же образом, как и «маленькие», либо частью грани или ребра (рис.2).

С учетом этого к построению 3D растрового разложения **SE** можно подойти следующим образом: на первом этапе найти  $\Psi_f$ ,  $f = 1,2,\dots$  с помощью параметрического

подхода, а на втором определить  $V_{SE}^{(k)}$  внутри каждого «большого»  $\Psi_f$ , например,

методом пересекающихся перпендикулярных плоскостей. При этом начальной точкой каждого отрезка внутри  $\Psi_f$  является вершина его  $V_{\Psi_{0,0,0_f}}$  вокселя, конечная точка не известна, но известно их количество, равное  $2^n$ .



а) больших

б) маленьких

Рисунок 2 – Отрезок, состоящий из вокселей

Предложенный подход **больших вокселей** может быть реализован следующим образом.

**start**

Ввод начальной  $S$  и конечной  $E$  точек;

Определение  $N, V_{SE}^{(1)}, V_{SE}^{(N)}$ ;

Вычисление  $U, C$ ;

Формирование матрицы приращений  $M$ ;

Вычисление коэффициентов плоскостей  $P_1, P_2$ ;

Задание значения  $h$ ; Количество больших вокселей  $N\_big = \lceil N / h \rceil$ ;

Вычисление  $W$  по (8) с учетом  $h$ ;

// определение «больших» вокселей

**for**  $f:= 1$  to  $N\_big$  **do**

$$\Psi_f \supseteq S + W f;$$

Определение  $V \psi_{0,0,0_f}$ ;

**end for**;

// для каждого «большого» вокселя вычисляются внутренние

**for**  $f:= 1$  to  $N\_big$  **do**

$$V_{SE_f}^{(1)} = V \psi_{0,0,0_f};$$

**For**  $k:=1$  to  $h$  **do**

$$\varepsilon_{min} = +\infty;$$

**For**  $q:=1$  to 4 **do**

$$V_{SE_f}^{(kq)} = V_{SE_f}^{(k)} + M^{<q>};$$

вычисление  $\mathcal{E}_q$ ;

**if** ( $\varepsilon_q < \varepsilon_{min}$ ) **then**  $\varepsilon_{min} = \varepsilon; r = q$ ; **end if**

**end for**

$$V_{SE_f}^{(k+1)} = V_{SE_f}^{(k_r)};$$

**end for**

**end for**;

**finish**

Представленный алгоритм является объединением двух вышеперечисленных, что потенциально позволит использовать их достоинства и устранить недостатки.

#### Экспериментальные исследования

Для исследования эффективности предложенных методов было сгенерировано 1000 произвольных отрезков для  $\Omega$  с  $H = 1023$  (один мегавоксель). Эксперименты проводились на персональном компьютере на базе Intel(R) Core(TM) i3 CPU 530 @2.93GHz, 3,00 Гбайт ОЗУ. Оценка погрешности работы алгоритмов выполнялась аналогично [6]. Результаты экспериментов для предложенных методов приведены в таблице 1. Кроме того оценивалось

время генерации одного вокселя как суммарное время генерации отнесенное к суммарной длине всех генерируемых прямых (554 859 вокселей).

На рисунке 3 приведен пример генерации отрезка тремя разными алгоритмами для отрезка с начальной точкой А (150, 206, 770) и конечной точкой В (472, 722, 321). В результате визуализации получено три одинаковых изображения.

Таблица 1 – Результаты генерации 1000 отрезков

	Средняя ошибка	Максимальная средняя ошибка	Время генерации 1 000 отрезков (мсек)	Время генерации одного вокселя (мксек)
Базовый метод [6] (модификация 1)	0,35	0,50	330	0,59
Метод перпендикулярных плоскостей	0,35	0,86	266	0,47
Метод последовательного приближения к отрезку	0,43	0,86	62	0,11
Модификация больших вокселей	0,36	0,86	218	0,39

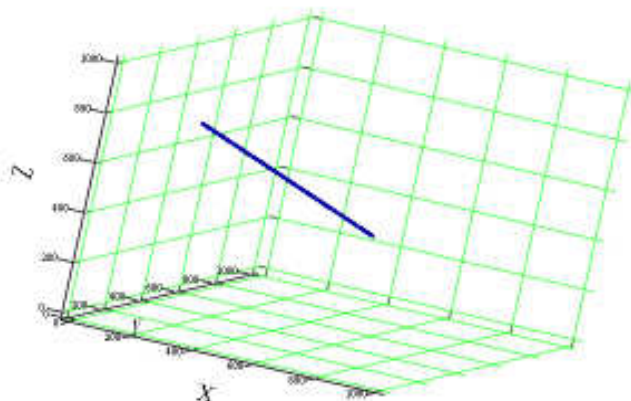


Рисунок 3 – Пример генерации отрезка

Анализ результатов экспериментов показывает, что

- максимальная погрешность всех алгоритмов не превышает допустимой, что свидетельствует о корректности их работы;
- среди всех предложенных алгоритмов быстрее всего выполняется алгоритм основанный на параметрическом подходе, но он же является наименее точным. А самым точным (и самым медленным) является алгоритм перпендикулярных плоскостей;
- алгоритм больших вокселей является компромиссом между точностью и временем выполнения. Он объединяет в себе вычисления по методу перпендикулярных плоскостей и параметрическому и по результатам экспериментов находится между ними.

Предложенные в работе методы позволяют существенно сократить время вычислений и имеют большие перспективы при распараллеливании с помощью технологии NVIDIA CUDA.



## Литература

1. Wheatstone C., Contributions to the Physiology of Vision.—Part the First. On some remarkable, and hitherto unobserved, Phenomena of Binocular Vision.- "Philosophical Transactions" of the Royal Society of London, Vol. 128, pp. 371 - 394. - <http://www.stereoscopy.com/library/wheatstone-paper1838.html>
2. Favalora G.E., Volumetric 3D Displays and Application Infrastructure // "Computer", 2005, August, pp 37-44
3. Geng J. "Volumetric 3D Display for Radiation Therapy Planning". Journal of Display Technology vol.4, No. 4, 2008, December, pp. 437-450
4. Ezhov V.A., Studentsov S.A. Volume (or stereoscopic) images on the screens of standard computer and television displays. – Proc. SPIE, 2005, v.5821, pp.102-116.
5. Башков Е.А., Авксентьева О.А., Аль-Орайкат Анас М. К построению генератора графических примитивов для трехмерных дисплеев. В сб. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія "Проблеми моделювання та автоматизації проектування динамічних систем". Вип. 7 (150). - Донецьк, ДонНТУ. - 2008 .- ст. 203-214
6. Башков Е.А., Авксентьева О.А., Аль-Орайкат Анас М., Хлопов Д.И. Генератор отрезков прямых повышенной производительности для трехмерных дисплеев. В сб. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка". Вип. 11 (164). - Донецьк, ДонНТУ. - 2010 .- ст. 100-105
7. Деза Е.И., Деза М.-М. Энциклопедический словарь расстояний.- пер. с англ.- Моск.гос.пед.ун-т, Нормальная высшая школа Париж.- М.: Наука, 2008.- 431с.
8. Боюн В. П.. Динамическая теория информации. Основы и приложения / НАН Украины ; Институт кибернетики им. В.М.Глушкова. — К., 2001. — 325с. : рис. — Библиогр.: с.303-322. — ISBN 966-02-1968-7.
9. Введение в кибернетическую технику / Малиновский Б.Н., Боюн В.П., Козлов Л.Г., Соловьев В.П. – Киев: Наук.думка, 1979. – 256 с.

**Abstract**

**Bashkov E.A., Al-Oraiqat A.M., Dubrovina O.D., Avksentieva O.A. Algorithmic basis of straight line segments generators for 3D displays.** The goal is the generation of line segments for three-dimensional displays. New methods for solving the problem are derived. Experimental results of various algorithms and evaluation of errors and the runtime are shown.

**Keywords:** 3D displays, straight line, segment, voxel, algorithm, increment matrix.

**Анотація**

**Башков Є.О., Аль-Орайкат Анас Махмуд, Дубровіна О.Д., Авксентьєва О.О. Алгоритмічний базис побудови генераторів відрізків прямих для 3D дисплеїв.** Розглядається задача генерації відрізків прямих для цифрових об'ємних тривимірних дисплеїв. Запропоновано нові підходи до рішення задачі. Представлено результати комп'ютерних експериментів та оцінки похибок та часу реалізації різних алгоритмів генерації

**Ключові слова:** 3D дисплей, відрізок прямої, сегмент, воксель, матриця інкрементів

Здано в редакцію  
21.06.2010

Рекомендовано до друку  
д.т.н., проф. Зорі А.А.