Харьковский национальный экономический университет

Страховая компания «ЛЕММА»

Харьковская государственная академия физической культуры

Научно-технологический институт транскрипции, трансляции и репликации

УДК 519.6

С.И.Чернышов, А.В.Воронин*, С.А.Разумовский**

*E-mail address: voronin61@ukr.net

**E-mail address: rsa_777@mail.ru

Проблема моделирования экономической динамики

Резюме

Исследована корректность модели Харрода в дифференциальной форме. Показана неадекватность экспоненциального роста экономики. Получен альтернативный результат. На примере модели Филлипса обобщен подход к корректировке макроэкономических моделей (в рамках исходных предпосылок). Развиты представления об использовании балансовых соотношений для моделирования экономической динамики, включая получение прогнозных оценок. Рассмотренные при этом задачи сводятся к решению интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода.

Введение

Первоначально авторы поставили перед собой задачу проанализировать процедуры построения дифференциальных уравнений, которые используются для моделирования макроэкономических процессов. Результаты оказались в значительной мере неожиданными, поскольку обнаружился целый ряд противоречий. В ходе исследований, посвященных поиску путей их преодоления, сформировались альтернативные концепции математического моделирования экономической динамики.

Первый раздел статьи посвящен установлению некорректности широко представленной в литературе модели Харрода, из которой вытекает возможность макроэкономического роста на неограниченном интервале времени. Упомянутая некорректность обусловлена применением аппарата непрерывного анализа к соотношениям, которые заведомо дискретны. Исследование разностной модели Харрода приводит к выводу о том, что на определенном отрезке времени в решении возникает противоречие.

В категориях непрерывного анализа сформулирована корректная модель Харрода, которая свидетельствует о неизбежности возникновения экономического кризиса. Эта модель базируется на интегральной зависимости капитала от интенсивности дохода и предоставляет конструктивные возможности для предупреждения кризиса. В первую очередь, посредством априорной оценки соответствующего момента времени. Показано, в частности, что активизация экономики приближает наступление кризиса. Следует подчеркнуть, что данный кризис и отмеченная выше особенность разностного решения согласуются по времени.

Во втором разделе показано, что модель Харрода – Домара, формально интерпретированная в категориях интенсивностей потоков с использованием производных, на самом деле, является дискретной. Продемонстрирована некорректность модели макроэкономической динамики Филлипса, которая обрела статус классической и широко представлена в специальных изданиях, включая учебные пособия. Предложен способ ее корректировки, базирующийся на упомянутом выше подходе к построению соотношений между макроэкономическими функциями разной размерности.

При этом исходные предпосылки экономического содержания оставлены без изменений. Использование «новой» модели Филлипса свелось к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, коэффициенты которого, в отличие от «классической» интерпретации, являются переменными. Данное обстоятельство существенно расширяет спектр потенциально возможных поведений экономической системы и представляется важным для практических приложений. Указаны источники, в которых содержатся варианты аналитического решения сформулированной задачи. Приведен также соответствующий алгоритм численной реализации.

Соображения о том, что соотношения баланса финансовых потоков в наибольшей мере отвечают целям экономико-математического моделирования, составляют идейную основу содержания третьего и четвертого разделов. Вначале с помощью итерационной процедуры временная зависимость сообщается статической модели стоимостного баланса, после чего использование разложения Тэйлора позволяет получить систему дифференциальных уравнений. Затем задача Коши редуцируется к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая имеет весьма благоприятные в плане численной реализации свойства.

При этом «баланс» рассматривается в качестве альтернативы неправомерному преломлению к экономической сфере методологии построения математических моделей из областей естественных наук, таких как механика. Суть в том, что отвечающие ей дифференциальные уравнения органично вытекают из условий равновесия бесконечно малого элемента, тогда как применительно к задачам экономики подобные построения, зачастую, лишены предметного смысла.

Наконец, в четвертом разделе развит подход к прогнозированию поведения экономической системы, включающей некоторое количество участников. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро которого зависит исключительно от факторов, характеризующих отношения между участниками. Свободный член в дополнение к этому, отражает показатели себестоимости производства и планируемые результаты деятельности.

Предлагается уточнять прогноз путем проведения вариативных расчетов в диапазонах изменений себестоимости и результатов при менее подверженной динамике резольвенте. В качестве инструмента такой стабилизации выступают механизмы эффективного взаимодействия между участниками, которые объективно присущи экономическому кластеру. При этом использованы соображения, касающиеся особенностей решения интегрального уравнения второго рода с ядром, зависящим от аргумента, и аппарата матричного анализа.

1. Модель Харрода и макроэкономический рост

Модель развития экономики Харрода в трактовке Л.В.Канторовича и А.Б.Горстко [1, с. 160-161] определяют соотношения:

$$Y(\tau)=C(\tau)+S(\tau);\ S(\tau)=I(\tau);\ S(\tau)=\mu Y(\tau);$$

$$d_\tau K(\tau)=I(\tau);\ K(\tau)=\nu Y(\tau), \tag{1.1}$$

где $Y(\tau)$ – национальный доход; $C(\tau)$, $S(\tau)$ – годовые объемы потребления и накопления; $I(\tau)$ – годовой объем инвестиций; $K(\tau)$ – капитал.

Все указанные величины измеряются в денежном эквиваленте; $d_\tau = d/d\tau$, τ – безразмерное время, измеряемое количеством лет; $0<\mu<1$ и ν – безразмерные константы (ориентировочно, $\mu\sim 0,5$; $\nu\sim 10$). При этом ν характеризуется как количество лет, за которое годовой доход «уравновешивает» капитал. Дифференциальное уравнение, формально вытекающее из (1.1), и его решение имеют вид соответственно:

$$d_\tau K(\tau)=\sigma K(\tau),\ \sigma=\mu/\nu;$$

$$K(\tau)=K_0e^{\sigma\tau};\ I(\tau)=I_0e^{\sigma\tau};\ Y(\tau)=Y_0e^{\sigma\tau}, \tag{1.2}$$

где $I_0=\sigma K_0;\ Y_0=K_0/\nu,\ K_0=K(0);\ I_0=I(0);\ Y_0=Y(0)$.

Поскольку в (1.1) используются годовые объемы финансовых потоков, очевидно, что эти соотношения дискретны и могут быть представлены в виде:

$$I_n = \mu Y_n; \qquad (1.3)$$

$$d_\tau K_n = I_n; \qquad (1.4)$$

$$K_n = \nu Y_n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \qquad (1.5)$$

где $I_n = I(\tau_n)$; $Y_n = Y(\tau_n)$; $K_n = K(\tau_n)$, $\tau_n = n$, n – номер года.

Однако дифференцирование дискретно изменяющегося капитала $K(\tau)$ требует привлечения аппарата теории обобщенных функций [2] и чревато осложнениями. Действительно,

$$d_\tau K(\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} I_j \delta(\tau - \tau_j),\ \delta(\tau) = \begin{cases} 0,\ \tau \neq 0; \\ \infty,\ \tau = 0, \end{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta)\, d\eta = 1;$$

поэтому вместо (1.4) целесообразно воспользоваться законом формирования капитала, который, собственно говоря, и подразумевается:

$$K_n = K_0 + \sum_{j=0}^{n-1} I_j\ , \qquad (1.6)$$

где $K_n = K(\tau_n)$; $I_j = I(\tau_j)$, $\tau_j = j$.

Из (1.3), (1.5), (1.6) следует, что

$$K_1 = K_0(1+\sigma);\ K_2 = K_0(1+\sigma)^2;\ ...;$$

$$K_n = K_0(1+\sigma)^n = K_0 e^{n\ln(1+\sigma)};\ Y_n = (K_0/\nu)e^{n\ln(1+\sigma)};\ I_n = \sigma K_0 e^{n\ln(1+\sigma)}; \qquad (1.7)$$

по формуле геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{N} I_n = \sigma K_0 e^{\ln(1+\sigma)} \frac{e^{N\ln(1+\sigma)} - 1}{e^{\ln(1+\sigma)} - 1}$$

и сопоставление этой суммы с капиталом N-го года $K_N = K_n$, $n = N$ показывает, что равенство между ними достигается при значении N, близком к σ^{-1}. Иначе говоря, приращение капитала за период времени от $\tau = 1$ до $\tau = N$ оказывается равным капиталу K_N, который, однако, включает еще и начальный капитал K_0.

Налицо противоречие, позволяющее сделать весьма существенные выводы:

- в противовес (1.1), модели Харрода объективно присуща интерпретация в разностной форме (1.3), (1.5) и (1.6), свидетельствующая о наличии особенности решения при $\tau \sim \sigma^{-1}$;

- неправомерным было бы полагать в (1.7) $\ln(1+\sigma) \approx \sigma$, поскольку величина σ мала, что приводит к решению, совпадающему с (1.2);

- такая замена скрадывает упомянутую особенность, радикально меняя вид решения (1.7) на стабильно растущие функции $K(\tau)$, $I(\tau)$ и $Y(\tau)$ при неограниченном аргументе τ в (1.2).

Заметим, что доход за n лет составляет

$$Y_0 + \sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{\mu}\left(I_0 + \sum_{j=1}^{n} I_j \right), \tag{1.8}$$

причем из-за коэффициента $\mu^{-1} > 1$ эта сумма возрастает быстрее по сравнению с (1.6). Очевидно, в некоторый год n, ассоциируемый с ν, суммы (1.6) и (1.8) окажутся равными. В пределах, естественно, погрешности выбранной дискретизации.

Итак, решение (1.2) неадекватно отображению макроэкономической динамики. Причина заключается в глубокой противоречивости соотношения $d_\tau K(\tau) = I(\tau)$ из (1.1). Действительно, функции $K(\tau)$ и $I(\tau)$ являются дискретными, тогда как производная $d_\tau K(\tau)$ используется в обычном смысле.

С этой точки зрения весьма актуальны соображения В.Кеч и П.Теодореску [2, с 168-169] о принципиальной проблематичности использования обобщенных функций при выводе дифференциальных уравнений. Главным образом, они служат для упрощения промежуточных преобразований при решении задач, сформулированных средствами непрерывного анализа, когда коэффициенты или свободные члены имеют разрывы.

Таким образом, требуется выстроить корректный аналог разностной модели Харрода (1.3), (1.5) и (1.6) в категориях непрерывного анализа. Очевидно, соотношение (1.6) легко обращается из арифметического в интегральный закон формирования капитала:

$$K(\tau) = \int_{-T}^{\tau} I(\eta)\,d\eta = K_0 + K_R\,, \tag{1.9}$$

где T – период накопления начального капитала K_0;

$$K_R(\tau) = \int_{0}^{\tau} I(\eta)\,d\eta \tag{1.10}$$

– капитал, реализованный за период $\tau > 0$. Соответственно производная

$$d_\tau K(\tau) = I(\tau) \tag{1.11}$$

имеет обычный смысл.

Функция $I(\tau)$ в (1.9) представляет собой интенсивность потока инвестиций. Но тогда, в силу вполне реалистичных соотношений

$$Y(\tau) = C(\tau) + I(\tau); \tag{1.12}$$

$$I(\tau) = \mu Y(\tau) \tag{1.13}$$

(см. (1.1), (1.3)), $Y(\tau)$ и $C(\tau)$ – также интенсивности потоков соответственно дохода и потребления, измеряемые аналогично $I(\tau)$ в денежном эквиваленте, отнесенном к единице безразмерного времени τ. Привяжем данную единицу к 1 году, подразумевая, естественно, что теперь τ может пробегать значения его сколь угодно малых долей.

Однако понимаемый в смысле интенсивности потока доход $Y(\tau)$ не может аналогично (1.5) сопоставляться с капиталом $K(\tau)$, которому присущ денежный эквивалент. Наряду с этим, при $\tau \to 0$ параметр $\nu \to \infty$ и возникает неопределенность.

Как можно обобщить на случай непрерывного времени τ соотношение (1.5)? В этой связи приведем следующие соображения:

- для сопоставления с капиталом подходит доход, реализованный за период времени от 0 до τ

$$Y_R(\tau)=\int_0^{\tau} Y(\eta)\,d\eta\,;$$

- соотношение (1.5) становится интегральным, а именно

$$K(\tau)=\nu\int_{\tau}^{\tau+1} Y(\eta)\,d\eta,\ \tau\ge 0\,;$$

- отношение $K(\tau)/Y_R(\tau)$, следуя логике «уравновешивания» в (1.5), составляет ν при $\tau=1$, $\nu/2$ при $\tau=2$, …, 1 при $\tau=\nu$;

- используя ту же пропорцию, получаем 2ν при $\tau=1/2$, 3ν при $\tau=1/3$, …, ν/τ для произвольного момента времени τ и соответственно при $\tau\to 0$ возникает особенность, которая должна сопрягаться с тем, что $K_0=\nu Y_0$.

Резюмируя сказанное, полагаем

$$K(\tau)=\frac{\nu}{\tau}\int_0^{\tau} Y(\eta)\,d\eta\,; \tag{1.14}$$

особенность при $\tau=0$ устраняется по правилу Лопиталя. Соотношения (1.11) – (1.14) представляют собой модель Харрода в непрерывной интерпретации.

Подставляя $Y(\tau)$ из (1.13) в (1.14) с использованием (1.11), получаем

$$K(\tau)=\frac{K_0}{1-\sigma\tau}, \tag{1.15}$$

откуда

$$I(\tau)=\frac{I_0}{(1-\sigma\tau)^2};\ Y(\tau)=\frac{Y_0}{(1-\sigma\tau)^2}; \tag{1.16}$$

этому решению соответствует задача Коши:

$$d_\tau K(\tau)-\frac{\sigma}{1-\sigma\tau}K(\tau)=0,\ K(0)=K_0;$$

$$d_\tau I(\tau)-\frac{2\sigma}{1-\sigma\tau}I(\tau)=0,\ I(0)=\sigma K_0;\ Y(\tau)=\frac{1}{\mu}I(\tau) \tag{1.17}$$

и, следовательно, рассматриваемая модель практически реализует особенность разностного решения при $\tau=N\sim\sigma^{-1}$, о которой говорилось выше.

Как можно пояснить критичность выражений (1.15), (1.16) при $\tau = \sigma^{-1}$? Заметим в этой связи, что на месте τ^{-1} в (1.14) можно представить функцию $f(\tau)$, которая удовлетворяет условиям $d_\tau f(0) = 1$ и $f(\nu) = \nu$:

$$K(\tau) = \frac{\nu}{f(\tau)} \int_0^\tau Y(\eta) d\eta; \tag{1.18}$$

соответственно вместо (1.15)

$$K(\tau) = \frac{K_0}{1 - \sigma f(\tau)}$$

и, очевидно, отодвинуть наступление критичности, отвечающей решению уравнения $f(\tau) = \sigma^{-1}$, можно лишь уменьшая скорость накопления капитала.

Также может быть рассмотрена зависимость μ от переменной τ. Иначе говоря, доход (1.12) распределяется между инвестициями и потреблением в разные моменты времени неодинаково. В этом случае капитал определяется посредством решения задачи Коши, вытекающей из соотношений (1.11), (1.13) и (1.14):

$$d_\tau K(\tau) - \frac{\mu(\tau)}{\nu - \tau\mu(\tau)} K(\tau) = 0,\ K(0) = K_0. \tag{1.19}$$

Однако вследствие (1.13), при $\tau = \sigma^{-1}$ величина капитала в (1.14) составляет

$$K(\sigma^{-1}) = \int_0^{\sigma^{-1}} I(\eta) d\eta,$$

иначе говоря, налицо совпадение с $K_R(\sigma^{-1})$ из (1.10). Таким образом, получается, что

$$K(\sigma^{-1}) = K_R(\sigma^{-1})$$

и согласно (1.9) в рассматриваемый момент времени $K_0 = 0$.

Итак, сначала суммарный доход $Y_R(\tau)$ достигает при $\tau = \nu$ величины, равной капиталу $K(\nu)$. Дальнейший рост дохода приводит к тому, что уже суммарный объем вложенных инвестиций достигает при $\tau = \sigma^{-1}$ величины, равной капиталу

$K\left(\sigma^{-1}\right)$. Одновременно начальный капитал K_0 преобразуется в доход $Y_R\left(\tau\right)$ и выражения (1.15), (1.16) обращаются в неопределенность. Соответственно и задача Коши (1.17) при $K_0 = 0$ утрачивает смысл. Ситуацию можно интерпретировать с позиций возникновения экономического хаоса, коллапса, а также ограниченности периода времени, на который может производиться прогнозирование.

В данном контексте обратим внимание на условия роста используемых функций, вытекающие из (1.15), (1.16):

$$K\left(\nu\right) = K_0 / \left(1-\mu\right);\ I\left(\nu\right) = I_0 / \left(1-\mu\right)^2;\ Y\left(\nu\right) = Y_0 / \left(1-\mu\right)^2;$$

так при $\mu = 0,5$ получается $K\left(\nu\right) = 2K_0$; $I\left(\nu\right) = 4I_0$; $Y\left(\nu\right) = 4Y_0$. Следовательно, практически отслеживая приближение, в частности, дохода $Y\left(\tau\right)$ к $Y_0 / \left(1-\mu^2\right)$, можно уточнять значение ν, что является весьма важным для идентификации момента кризиса, когда $\tau = \nu / \mu$. Действительно, параметр μ модели (1.11) – (1.14), в отличие от ν, является априори заданным.

При использовании вместо (1.14) более общей зависимости (1.18) установленная по факту на интервале, например, $\tau \in \left[0, \nu\right]$ функция $f\left(\tau\right)$ может быть экстраполирована до критического момента времени τ_k, когда $f\left(\tau_k\right) = \sigma^{-1}$. Таким образом, приняв соотношение (1.14) в качестве базиса (или же, запланированной модели роста), мы имеем возможность определять момент наступления кризиса, руководствуясь также и конкретикой развития экономической ситуации. Ее характеризуют как функция $f\left(\tau\right)$, так и решение задачи (1.19).

Отмеченные обстоятельства позволяют принять, например, $K\left(\nu\right)$ в качестве K_0 для следующего этапа развития экономики. Соответствующий процесс организационного переустройства можно представить в контексте сопряжения ν с амортизацией капитала K_0. Заметим, что амортизацию нетрудно учесть, используя в (1.9) и (1.14) на месте функции $K\left(\tau\right)$ выражение вида $\left(1-\alpha\tau\right)K\left(\tau\right)$, $\alpha > 0$. Определение $K\left(\tau\right)$ сводится в этом случае к решению задачи Коши:

$$d_\tau K(\tau)-\frac{\alpha+\sigma-2\alpha\sigma\tau}{1-(\alpha+\sigma)\tau+\alpha\sigma\tau^2}K(\tau)=0,\ K(0)=K_0.$$

Однако модель (1.11) – (1.14) не учитывает кумулятивный эффект, перетекания инвестиций в капитал, поскольку в (1.9) они просто суммируются. Пусть

$$K(\tau)=\int_{-T}^{\tau}(1+\rho\eta)I(\eta)\,d\eta,$$

где $\rho>0$ – константа (можно представить $\rho\sim 0{,}1$). Тогда вместо (1.11) получаем

$$d_\tau K(\tau)=(1+\rho\tau)I(\tau)=\mu(1+\rho\tau)Y(\tau).$$

Подстановка из этого выражения $Y(\tau)$ в (1.14) приводит к дифференциальному уравнению

$$d_\tau K(\tau)-\frac{\sigma(1+\rho\tau)}{1-\sigma\tau-\sigma\rho\tau^2}K(\tau)=0,$$

решение которого

$$K(\tau)=K_0\left[1+\left(\frac{\sigma+\kappa}{\sigma-\kappa}\right)^{\frac{\sigma}{2\kappa}}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma\tau-\sigma\tau^2}}+\left(\frac{2\sigma\rho\tau+\sigma+\kappa}{2\sigma\rho\tau+\sigma-\kappa}\right)^{\frac{\sigma}{2\kappa}}\right],\ \kappa=\sqrt{4\sigma\rho+\sigma^2}$$

обращается в неопределенность при

$$\tau=-\frac{1}{2\rho}+\sqrt{\frac{1}{4\rho^2}+\frac{1}{\sigma\rho}}$$

и, очевидно, с увеличением ρ наступление кризиса приближается.

Возвращаясь к модели (1.1) заметим, что изначально ее рассматривали в конечно-разностной постановке [3, 4, с. 193-199]. Решение (1.2), возникшее в результате некоего симбиоза непрерывного и дискретного анализа, является ошибочным. Этот симбиоз характерен для целого ряда известных трудов в области макроэкономического моделирования [5 – 7].

2. Анализ и корректировка макроэкономических моделей

Модель развития экономики Харрода – Домара представлена Р.Алленом в виде [6, с. 75-78]:

$$Y(t) = C(t) + I(t);\ C(t) = (1-\mu)Y(t);\ I(t) = \nu_* d_t Y(t), \tag{2.1}$$

где $Y(t)$, $C(t)$ и $I(t)$ – интенсивности потоков соответственно дохода, потребления и инвестиций; постоянная $0 < \mu < 1$; постоянная $\nu_* > 0$ имеет размерность времени; t – размерное время. Дифференциальное уравнение задачи и его решение имеют вид соответственно:

$$d_t Y(t) = (\mu/\nu_*)Y(t);\ Y(t) = Y_0 e^{\mu t/\nu_*},\ Y_0 = Y(0). \tag{2.2}$$

В силу фундаментальной зависимости

$$d_t K(t) = I(t) \tag{2.3}$$

последнее соотношение (2.1) эквивалентно следующему: $d_t K(t) = \nu_* d_t Y(t)$, или

$$K(t) = \nu_* Y(t) + K_0 - \nu_* Y_0,\ K_0 = K(0). \tag{2.4}$$

Исключая функции $Y(t)$ и $I(t)$, приходим к уравнению

$$d_t K(t) - (\mu/\nu_*)K(t) = \mu Y_0 - (\mu/\nu_*)K_0, \tag{2.5}$$

решение которого имеет вид

$$K(t) = (K_0 - \nu_* Y_0)\left(e^{\mu t/\nu_*} - 1\right)$$

и, следовательно, $K_0 = 0$, или же в (2.4) $K_0 = \nu_* Y_0$.

В первом из этих случаев получается, что начальный капитал K_0 отсутствует, тогда как инвестиции $I_0 = I(0)$ и доход Y_0 существуют, что противоречит смыслу.

Во втором – уравнение (2.5) становится однородным и его решение аналогично (2.2):

$$K(t) = \nu_* Y(t), \tag{2.6}$$

что следует также из (2.4). Однако такая зависимость противоречит использованию понятия бесконечно малой величины. Действительно, интенсивность дохода при $t = t_i$ определяется следующим образом:

$$Y(t_i) = \frac{1}{t_*} \int_{t_i - 0,5t_*}^{t_i + 0,5t_*} Y(\eta)\, d\eta,$$

где t_* – малый промежуток времени. Соответственно с учетом (2.6), капитал

$$K(t_i) = \nu \int_{t_i - 0,5t_*}^{t_i + 0,5t_*} Y(\eta)\, d\eta,\ \nu = \frac{\nu_*}{t_*}; \qquad (2.7)$$

иначе говоря, $K(t_i)$ представляет собой величину дохода, усредненную на интервале t_* и, очевидно, при $t_* \to 0$ безразмерный параметр $\nu \to \infty$.

Одновременно исчезает различие между понятиями дохода и интенсивности дохода в точке $t = t_i$. Таким образом, на основании (2.7) соотношение (2.6) может рассматриваться лишь для конечной протяженности t_* и, следовательно, имеет принципиально дискретный характер. При этом использование, наряду с ν, безразмерного времени $\tau = t / t_*$ переводит соотношения (2.1) – (2.3) и (2.6) в модель [1, с. 160-161], которая, как показано в п. 1, некорректна.

Аналогичная ситуация имеет место для простейшей модели Филлипса [6, с. 79]:

$$Z(t) = (1-\mu)Y(t);\ \rho d_t Y(t) = Z(t) - Y(t),$$

где $Z(t)$ – поток спроса на продукцию; ρ (в ед. времени) – постоянная запаздывания выпуска на спрос. Суть в том, что и здесь посредством коэффициента сопрягаются функции разной размерности, а именно интенсивность потока и скорость ее изменения.

Общая модель Филлипса определяется уравнениями [6, с. 81-82]

$$d_t Y(t) = \lambda\big[I(t) - \mu Y(t)\big];\ d_t I(t) = \kappa\big[\nu d_t Y(t) - I(t)\big], \qquad (2.8)$$

где константы и единицы их измерения следующие: $\kappa > 0$, 1/ед. времени; $\nu > 0$, ед. времени; $0 < \mu < 1$; $\lambda > 0$, 1/ед. времени. Задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$d_t^2 Y(t) + a d_t Y(t) + bY(t) = 0,\ a = \kappa + \mu\lambda - \nu\kappa\lambda;\ b = \mu\kappa\lambda,\ t \ge 0\,, \tag{2.9}$$

С использованием (2.3), при условии

$$d_t K(0) = \kappa\left[\nu Y(0) - K(0)\right]$$

– аналог соотношения, вытекающего из решения (2.5), уравнения (2.8) приобретают вид:

$$d_t Y(t) = \lambda\left[d_t K(t) - \mu Y(t)\right];\ d_t K(t) = \kappa\left[\nu Y(t) - K(t)\right] \tag{2.10}$$

(заметим, что именно так рассматриваемая модель трактуется А.Бергстромом [7, с. 40-41]).

Соображения в отношении (2.6) непосредственно распространяются на второе из них. Соответственно решение уравнения (2.9) не дает адекватного отражения динамики макроэкономического развития. Аналогичная ситуация имеет место и для других моделей [6, 7]. В каждом случае, тем или иным образом, присутствует сопряжение капитала с интенсивностью дохода через размерный коэффициент.

Руководствуясь методологией п. 1, представим уравнение (2.10), связывающее капитал с потоками $d_t K(t)$ и $Y(t)$, следующим образом:

$$K(t) = \frac{1}{t}\int_{\varepsilon}^{t} L(\eta)\,d\eta,\ L(t) = \nu Y(t) - \frac{1}{\kappa} d_t K(t),\ 0 < \varepsilon < t\,, \tag{2.11}$$

где ε – малая величина. Иначе говоря, использован корректный подход к формированию капитала за счет соответствующих потоков интенсивностей путем интегрирования. При этом t^{-1} играет роль коэффициента пропорциональности, ставящего в соответствие $K(t)$ капитал, накопленный посредством $Y(t)$ и $d_t K(t)$ за период времени от 0 до t.

Таким образом, придерживаясь идеи [6], заложенной в соотношения вида (2.6) и (2.10), мы практически реализуем ее на произвольном интервале времени. Включая $t = \varepsilon \to 0$, где вступает в силу правило Лопиталя.

Из (2.11) следует, что

$$K(t)=\frac{\nu\kappa}{1+\kappa t}\int_{\varepsilon}^{t}Y(\eta)d\eta;\ d_tK(t)=-\frac{\nu\kappa^2}{(1+\kappa t)^2}\int_{\varepsilon}^{t}Y(\eta)d\eta+\frac{\nu\kappa}{1+\kappa t}Y(t)$$

и в результате несложных преобразований, включая предельный переход $\varepsilon\to 0$, первое из соотношений (2.10) приобретает вид дифференциального уравнения (2.9), но уже с переменными коэффициентами:

$$a(t)=\mu\lambda+\frac{2\kappa-\nu\kappa\lambda}{1+\kappa t};\ b(t)=\frac{2\mu\kappa\lambda}{1+\kappa t}.$$

Это уравнение можно представить следующим образом:

$$d_\tau^2Y(\tau)+\left(\alpha+\frac{\beta}{\tau}\right)d_\tau Y(\tau)+\frac{\gamma}{\tau}Y(\tau)=0,\ \tau\ge 1, \tag{2.12}$$

где безразмерная переменная времени $\tau=1+\kappa t$; безразмерные коэффициенты $\alpha=\mu\lambda/\kappa$; $\beta=2-\nu\lambda$; $\gamma=2\mu\lambda/\kappa$, и свести к решению вырожденного гипергеометрического уравнения [8, с. 392, №2.120; с. 428-431]. Известная подстановка [9, с. 130]

$$Y(\tau)=u(\tau)\exp\left[0{,}5(\alpha-\alpha\tau-\beta\ln\tau)\right]$$

преобразует уравнение (2.12) к виду

$$d_\tau^2u(\tau)+c(\tau)u(\tau)=0,\ c(\tau)=-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{2\gamma-\alpha\beta}{2\tau}+\frac{\beta(2-\beta)}{4\tau^2},\ \tau\ge 1, \tag{2.13}$$

откуда при

$$p=-\alpha^2/4;\ r=(2\gamma-\alpha\beta)/2;\ s=\beta(2-\beta)/4$$

получаем

$$\tau^2d_\tau^2u(\tau)+\left(p\tau^2+r\tau+s\right)u(\tau)=0,\ \tau\ge 1.$$

Решение этого уравнения достигается в замкнутом виде [8, с. 392, №2.154; с. 547-548]. Заметим, что известна также подстановка [9, с. 131], сводящая (2.13) к уравнению Риккати $d_\tau\upsilon(\tau)+\upsilon^2(\tau)+c(\tau)=0$, однако при данной функции $c(\tau)$ не существует конструктивных приемов его решения.

Для вычисления функции $Y(\tau)$, удовлетворяющей (2.12) при условиях $Y(1)=Y_1$, $d_\tau Y(1)=Y_1'$, можно воспользоваться известной процедурой сведения такой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (см., в частности [10, с. 16-18]) . Действительно, из обозначения $d_\tau^2 Y(\tau) = \varphi(\tau)$ следует, что

$$Y(\tau) = \int_1^\tau (\tau - \eta)\varphi(\eta)\, d\eta - (1-\tau)Y_1' + Y_1$$

и после подстановки в (2.12) получаем уравнение

$$\varphi(\tau) = \int_1^\tau k(\tau,\eta)\varphi(\eta)\, d\eta + q(\tau),\ \tau \geq 1, \qquad (2.14)$$

в котором ядро и свободный член определяются выражениями:

$$k(\tau,\eta) = -\alpha - \beta - \frac{\beta - \eta}{\tau};\ q(\tau) = -\alpha - \frac{\beta - (1-\tau)}{\tau}Y_1' + \frac{\gamma}{\tau}Y_1 .$$

Решение уравнения (2.14) находится с помощью процедуры последовательных приближений при практически произвольном выборе начального элемента $\varphi_0(\tau)$ [11]:

$$\varphi_{n+1}(\tau) = \int_1^\tau k(\tau,\eta)\varphi_n(\eta)\, d\eta + q(\tau),\ \tau \geq 1;\ n = 0,\ 1,\ \ldots\ . \qquad (2.15)$$

3. Экономико-математическая модель на основе стоимостного баланса

Модель макроэкономической динамики Филлипса (2.8) содержит четыре достаточно абстрактных параметра: κ – скорость реакции, обратная величина постоянной запаздывания инвестиций; ν – коэффициент инвестиций, показатель мощности акселератора; μ – мультипликатор, характеризующий часть дохода, идущую на инвестиции; λ – скорость влияния выпуска продукции на спрос [6].

Определение интенсивности дохода сводится здесь к решению дифференциального уравнения (2.9), которое широко применяется в технике. Так, оно описывает свободные колебания массы, подвешенной на пружине в условиях вязкого сопротивления. Все параметры такой системы, включая внешние воздействия, предельно конкретны, их можно измерить. Дифференциальное уравнение строго выводится на основании законов механики [12, с. 43-49].

В этой связи следует обратить внимание на два обстоятельства. Первое из них состоит в том, что спектр возможных решений упомянутого уравнения объективно недостаточен для адекватного представления макроэкономических функций. Соответственно внимание экономистов стали привлекать уравнения нелинейной теории (см., в частности, доводы Т.Пу [13, с. 7]), однако их интерпретация в категориях предметной области является достаточно проблематичной.

Вместе с тем выше мы показали, что модель Филлипса в трактовке [6] некорректна. С использованием идейных предпосылок данной модели, задача сведена к решению дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят от времени. Класс решений, таким образом, стал гораздо шире, но неопределенность в выборе указанных параметров сохранилась.

Второе обстоятельство связано с тем, что в экономике нет законов для идеализированных объектов, которые можно было бы поставить в соответствие материальной точке. Но, в свою очередь, и у экономики есть преимущество перед механикой, которое олицетворяют уравнения баланса финансовых потоков. С этой точки зрения, возможности математического моделирования в экономике и механике можно охарактеризовать как разновекторные.

Обратимся к статичной системе балансовых уравнений: $x = Ax + c$, или

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n, \tag{3.1}$$

где x_i – стоимость продукции i-го участника (в случае неизменных объемов производства аналогичная цене); a_{ii} – часть стоимости продукции i-го участника, составляющая его доход; a_{ij} – часть стоимости продукции j-го участника, которую потребляет i-й участник; c_i – личный вклад i-го участника (включая оплату труда, материалов, услуг сторонних организаций и т. п.); $t \geq 0$ – размерное время. Коэффициенты a_{ij} и свободные члены c_i предполагаются данными.

Поскольку в такой ситуации, если не принимать во внимание различного рода неординарные факторы (см. ниже), a_{ij}, $c_i \geq 0$ и очевидно суммы элементов каждой из строк матрицы A не превосходят единицу, тогда как хотя бы одна из этих сумм меньше единицы, то $\|A\| < 1$ [14, с. 329-331]. Соответственно величины x_i могут определяться путем последовательных приближений

$$x_{s+1} = Ax_s + c, \; s = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

[15, с. 120-121].

Принципиальный момент заключается в том, что системе уравнений (3.1) можно придать динамический характер, полагая $x = x(t)$, и

$$x_s(t) = x(t_s); \; x(t_{s+1}) = x(t_s + t_*), \tag{3.3}$$

где t_* – достаточно малый интервал времени. В этой связи для реализации преследуемой нами цели достаточен лишь первый шаг процесса (3.2) – (3.3) из каждой точки $t_s = t$ рассматриваемого интервала.

Таким образом, появляется соотношение

$$x_i(t + t_*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + c_i, \; t \in [0, t_*] \tag{3.4}$$

и, ограничиваясь в разложении $x_i(t + t_*)$, например, тремя членами ряда Тэйлора, после перехода к безразмерной переменной времени $\tau = t / t_*$ получаем дифференциальное уравнение

$$d_\tau^2 x_i(\tau) + 2d_\tau x_i(\tau) + 2x_i(\tau) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(\tau) + 2c_i, \; \tau \in [0, 1]. \tag{3.5}$$

С использованием начальных условий $x_i(0) = p_i$ и $d_\tau x_i(0) = p_i'$ (постоянные p_i и p_i' предполагаются данными) задача сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно функций

$$\varphi_i(\tau) = d_\tau^2 x_i(\tau), \tag{3.6}$$

откуда

$$x_i(\tau)=\int_0^\tau(\tau-\eta)\varphi_i(\eta)d\eta+p_i'\tau+p_i,\ i=1,\,2,\,...,\,n. \tag{3.7}$$

Действительно, подставляя выражения (3.6) и (3.7) в (3.5), получаем

$$\varphi_i(\tau)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^\tau k_{ij}(\tau,\,\eta)\varphi_j(\eta)d\eta+q_i(\tau),\ i=1,\,2,\,...,\,n, \tag{3.8}$$

где параметр $\lambda=2$; ядра

$$k_{ij}(\tau,\,\eta)=\begin{cases} a_{ij}(\tau-\eta),\ j\neq i;\\ (a_{ij}-1)(\tau-\eta)-1,\ j=i;\end{cases}$$

свободные члены

$$q_i=\begin{cases} 2\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(p_j'\tau+p_j\right)+c_i\right],\ j\neq i;\\ 2\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(p_j'\tau+p_j\right)-p_j'(1+\tau)-p_j+c_i\right],\ j=i.\end{cases}$$

Решение системы уравнений (3.8) находится путем последовательных приближений

$$\varphi_{i,s+1}(\tau)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^\tau k_{ij}(\tau,\,\eta)\varphi_{j,s}(\eta)d\eta+q_i(\tau);\ \varphi_{i,0}=0,\ s=0,\,1,\,...; \tag{3.9}$$

$$x_{i,s}(\tau)=\int_0^\tau(\tau-\eta)\varphi_{i,s}(\eta)d\eta+p_{d\,i}\tau+p_i,\ i=1,\,2,\,...,\,n, \tag{3.10}$$

или же может быть представлено в виде ряда по степеням λ, члены которого содержат суммы интегралов с итерированными ядрами $k_{ij}(\tau,\,\eta)$ [11, с. 59-61].

Однако предположим, что оговоренные выше требования в отношении a_{ij} и c_i не выполняются. Так, они могут принимать отрицательные значения, что отражает выплаты долгов, дотации, использование запасов и т. п. факторы. Если сумма элементов j-го столбца матрицы A превышает единицу, то значит j-й участник продает продукцию партнерам по ценам выше ее реальной стоимости. Во всяком случае, будем считать предпосылку $\|A\|<1$ недействительной.

Обозначим при такой ситуации в (3.1) $I - A = B$, где I – единичная матрица. Тогда решение уравнения $Bx = c$ находится с помощью следующего процесса последовательных приближений [16, с. 70-73]:

$$x_{s+1} = \left(I - rB'B\right)x_s + \alpha B'c,\ s = 0, 1, ...$$

где B' – матрица, транспонированная B; $0 \le \alpha \le 2/\left\|B'B\right\|$.

При этом все соображения и выкладки, относящиеся к (3.2) – (3.10), остаются в силе. Изменятся лишь величины a_{ij} и c_i, а соответственно ядра и свободные члены уравнений (3.9). Следует подчеркнуть, что данное обстоятельство практически не влияет на процедуру численной реализации. Также как и удержание в (3.5) производных более высокого порядка (с увеличением протяженности интервала t_*, хотя какие-либо априорные оценки в этом смысле затруднительны).

Нетрудно учесть в (3.1) запаздывание реализации от производства продукции вида $x_j\left(t\right) = x_j\left(t + \beta_j\right)$. Перечисленные возможности характеризуют существенное преимущество предлагаемого подхода по сравнению с решением рассматриваемой задачи в дифференциальной форме (3.5).

Другое достоинство интегральных уравнений обусловливается возможностью распространения выкладок на случай, когда коэффициенты a_{ij} и свободные члены c_i зависят от времени (что является весьма важным в контексте последующего изложения). Действительно, алгоритмы интегрирования кусочно-непрерывных ограниченных функций весьма универсальны (см., в частности [17]) и с этой точки зрения присутствие в (3.8) $a_{ij} = a_{ij}\left(\eta\right)$, $c_i = c_i\left(\tau\right)$ не имело бы принципиального значения.

4. Прогнозирование развития экономической ситуации

Естественно, участников экономической системы интересуют перспективы дальнейшей деятельности. В этой связи предположим, что они каким-то образом прогнозируют динамику своих взаимоотношений и внешнего спроса (который непосредственно сопряжен с себестоимостью производства продукции), а также уровень цен к окончанию рассматриваемого периода времени.

Таким образом, функции $a_{ij}(\tau)$, $c_i(\tau)$, а также константы $x_i(1) = r_i$ – известны и мы приходим к решению граничной задачи для системы уравнений (3.5) с условиями в отношении $x_i(\tau)$ при $\tau = 0$; $\tau = 1$. Используя аналогично предыдущему случаю (3.6), получаем

$$x_i(\tau) = \int_0^\tau (\tau - \eta)\varphi_i(\eta)d\eta - \tau\int_0^1 (1-\eta)\varphi_i(\eta)d\eta + (r_i - p_i)\tau + p_i \tag{4.1}$$

и после подстановки этого выражения в (3.5) задача сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi_i(\tau) = \lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 k_{ij}(\tau, \eta)\varphi_j(\eta)\,d\eta + q_i(\tau),\ \tau \in [0, 1];\ i = 1, 2, ..., n, \tag{4.2}$$

где параметр $\lambda = 2$; ядра определяются выражениями

$$k_{ij}(\tau, \eta) = \begin{cases} \tau(\eta - 1)a_{ij}(\eta),\ \tau \le \eta \le 1; \\ (\tau - 1)\eta a_{ij}(\eta),\ 0 \le \eta \le \tau,\ j \ne i; \end{cases}$$

$$k_{ij}(\tau, \eta) = \begin{cases} \left[\tau + 1 - \tau a_{ij}(\eta)\right](1-\eta),\ \tau < \eta \le 1; \\ (\tau - 2)\eta a_{ij}(\eta),\ 0 \le \eta \le \tau,\ j = i \end{cases}$$

(второе из них претерпевает разрыв на диагонали $\eta = \tau$); свободные члены

$$q_i(\tau) = \begin{cases} 2\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left[(r_j - p_j)\tau + p_j\right] + c_i\right\},\ j \ne i; \\ 2\left\{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - 1)\left[(r_j - p_j)\tau + p_j\right] - r_j + p_j + c_i\right\},\ j = i. \end{cases}$$

Для нахождения функций $\varphi_i(\tau)$, удовлетворяющих уравнениям (4.2), разработан целый ряд эффективных методов численной реализации [16]. Вместе с тем, предварительно система уравнений (4.2) может быть приведена к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода [10, с. 77-78]:

$$\Phi(\tau)=\lambda\int_0^n K(\tau,\eta)\Phi(\eta)d\eta+Q(\tau),\ \tau\in[0,\,n], \tag{4.3}$$

где искомая функция, свободный член и ядро имеют вид

$$\Phi(\tau)=\varphi_i(\tau-i+1);\ Q(\tau)=q_i(\tau-i+1);\ K(\tau,\eta)=k_{ij}(\tau-i+1,\,\eta-j+1),$$

$i=1,\,2,\,...,\,n$.

Решение этого уравнения существует и единственно при $\lambda\neq\lambda_h$, где λ_h, $h=1,\,2,\,...$ – характеристические числа ядра $K(\tau,\eta)$. После вычисления функций $\varphi_i(\tau)$, решение задачи находится путем их подстановки в (4.1).

При $\lambda=\lambda_h$ однородное уравнение

$$\Phi(\tau)=\lambda\int_0^n K(\tau,\eta)\Phi(\eta)\,d\eta;\ h=1,\,2,\,...,\ \tau\in[0,\,n] \tag{4.4}$$

имеет нетривиальные решения. Очевидно, экономическая система должна отстраиваться от такого рода критических режимов функционирования, поскольку они не выгодны ее участникам. Средством для этого является повышение эффективности отношений взаимного партнерства, косвенно сопряженное с оптимизацией коэффициентов $a_{ij}(\tau)$.

Конечно, как функции себестоимости $c_i(\tau)$, так и результаты деятельности участников r_i могут быть известны лишь ориентировочно, вследствие чего для оценки поведения экономической системы целесообразно проведение вариативных расчетов. Иначе говоря, решение уравнения (4.3) будет производиться многократно при данном ядре и вариациях свободного члена. Поэтому весьма полезным является представление решения [11]:

$$\Phi(\tau)=Q(\tau)+\lambda\int_0^n R(\tau,\eta,\lambda)Q(\eta)\,d\eta,\ \tau\in[0,\,n], \tag{4.5}$$

где $R(\tau,\eta,\lambda)$– резольвента ядра $K(\tau,\eta)$. Для построения резольвенты может быть использован конструктивный алгоритм С.Г.Михлина [18, с. 210-221].

Если судить с формальных позиций, то варьированию подлежат также и коэффициенты $a_{ij}(\tau)$, однако в подобном случае прогноз поведения системы может стать практически неосуществимым из-за большого количества вариантов. С этой точки зрения, очень важна роль такой организационно-экономической системы как кластер.

Действительно, его участники выстраивают взаимоотношения на принципах предоставления друг другу достоверной информацией и координируют свою деятельность, руководствуясь критериями системного уровня. Данные обстоятельства в значительной мере способствуют более объективному определению функций $a_{ij}(\tau)$.

Выдерживая (для большей прозрачности экономической ситуации) на протяжении прогнозного периода стабильность коэффициентов $a_{ij}(\tau)$, кластер может затем перераспределять доходы участников внутри своей организации. Схема такого перераспределения предварительно согласуется на неформальной основе. Заметим, что обозначенный подход к прогнозированию органично согласуется с сущностью кластерной методологии (см. основополагающие труды М.Портера и целый ряд других источников [19, 20]).

Обратимся к содержательной стороне параметра λ в уравнении (4.3). На первый взгляд, он используется лишь в целях удобства обращения с символикой. До некоторой степени такая точка зрения оправдана и, вместе с тем, следует отметить происхождение $\lambda = 2$. Первоначально, этот коэффициент возник в процедурах построения систем уравнений (3.8), (4.2) и обусловливается разложением Тэйлора в (3.4):

$$x(t+t_*) = x(t) + \frac{1}{1!}d_t x(t) + \frac{1}{2!}d_t^2 x(t) + \frac{1}{3!}d_t^3 x(t) + \ldots \, .$$

Поскольку мы сохранили три первых члена, то получилось $\lambda = 2$. Если бы их было четыре, то $\lambda = 6$ и т. д. Но с увеличением отрезка ряда Тэйлора объективно возрастает также прогнозный интервал t_*, к которому привязываются функции $a_{ij}(\tau)$, $c_i(\tau)$ и постоянные r_i. Следовательно, между ними и параметром λ

существует внутренняя взаимосвязь, которую, однако, не представляется возможным выразить функционально. Остается лишь констатировать, что на самом деле, в (4.2) и далее (4.3), (4.4)

$$a_{ij}(\tau) = a_{ij}(\tau, \lambda);\ c_i(\tau) = c_i(\tau, \lambda);\ r_i = r_i(\lambda).$$

Соответственно вместо (4.3) мы получаем уравнение

$$\Phi(\tau) = \int_0^n K(\tau, \eta, \lambda)\Phi(\tau)d\tau + Q(\tau),\ \tau \in [0, n], \tag{4.6}$$

ядро которого зависит от параметра. Как отметил В.И.Смирнов, при рассмотрении таких уравнений могут встречаться существенные отклонения от теории Фредгольма.

Теорема Тамаркина утверждает, что для некоторых ядер $K(\tau, \eta, \lambda)$, аналитически зависящих от λ, резольвента $R(\tau, \eta, \lambda)$ в (4.5) не существует ни при каких значениях этого параметра [21, с. 130-132]. Иначе говоря, уравнение (4.6) оказывается неразрешимым (см. также [10, с. 49]). Подчеркнем, что приведенные соображения носят качественный характер в виду отсутствия функциональной зависимости $K(\tau, \eta, \lambda)$.

Вместе с тем, разрешимость уравнения (4.6) и исходной системы уравнений (3.1), очевидно, взаимосвязаны. Так, значения $\lambda = \lambda_h$ в (4.4) зависят некоторым образом от характеристических чисел матрицы A, а неразрешимость уравнения (4.6) обусловливается близостью к нулю ее определителя $\det(I - A)$.

В этой связи возникает конструктивная проверка уравнения (4.6) на разрешимость, базирующаяся на исследовании матрицы A с $a_{ij} = a_{ij}(t)$. А именно, функции $a_{ij}(\tau)$ должны выбираться так, чтобы $\det[I - A(t)]$ не обращался в нуль, и матрица $I - A(t)$ не была плохо обусловленной (см., в частности [17]) при всех $t \in [0, t_*]$.

Заметим, что плохая обусловленность подразумевает в данном случае неадекватно сильное реагирование экономической системы на малые возмущения как функций, выполняемых звеньями, так и показателей их структурной сопряженности. В целом, для эффективного функционирования такой системы, включая достоверность прогноза, желательно, чтобы матрица $A(t)$ удовлетворяла условиям 2-й теоремы Перрона-Фробениуса [22, с. 247-248], то есть была неотрицательной и неразложимой. Иначе говоря, все $a_{ij}(t) \geq 0$ и отвечающий матрице $A(t)$ орграф сильно связен.

Последнее из этих условий означает, что любые вершины орграфа должны иметь связывающий их ориентированный путь [23, с. 129-130]. Но в таком случае количество контактов в каждой из пар участников оказывается достаточно большим, что, вообще говоря, не свойственно процессам перетекания материально-финансовых потоков.

Однако преимущество кластера в том и состоит, что между его участниками происходит активный обмен опытом и знаниями. Кластеру, по определению, присуща высокая степень разветвленности интеллектуальных потоков, которые, реализуясь на безвозмездной основе, тем не менее, могут быть представлены в денежном эквиваленте, обеспечивая, таким образом, неразложимость матрицы $A(t),\ t \in [0,\ t_*]$.

Список использованных источников

1. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: Наука, 1972. – 229 с.
2. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
3. Харрод Р. К теории экономической динамики. Новые выводы экономической теории и их применение в экономической политике /Классики Кейнсианства. – М.: Экономика, 1997. – Т.1. – С. 39-194.

4. Теория капитала и экономического роста /Под ред. С.С.Дзарасова. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 2004. – 397 с.

5. Самуэльсон П.А. Основания экономического анализа. – СПб: Экономическая школа, 2002. – 604 с.

6. Аллен Р. Математическая экономия. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 667 с.

7. Бергстром А. Построение и применение экономических моделей. – М.: Прогресс, 1970. – 176 с.

8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.

9. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит, 1954. – 216 с.

10. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 303 с.

11. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 299 с.

12. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 270 с.

13. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 198 с.

14. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

15. Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 240 с.

16. Приближенное решение операторных уравнений /М.А.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 455 с.

17. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.

18. Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. – Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1988. – 333 с.

19. Портер М. Конкуренция. – СПб: Изд. дом «Вильямс», 2001. – 495 с.

20. Соколенко С.И. Производственные системы глобализации: Сети. Альянсы. Партнерства. Кластеры: Украинский контекст. – К.: Логос, 2002. – 645 с.

21. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т.4. – Ч.1. – 336 с.

22. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ). – М.: Наука, 1972. – 279 с.

23. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.