АДАПТИВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Кобелев В.Ю.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14.
Тел.: (0852) 32-11-94. E-mail: cat@uniyar.ac.ru.

Реферат. В работе исследуется возможность адаптивного выбора вейвлет-функции с целью минимизации ошибки восстановленного сигнала. Предложенный алгоритм анализирует спектральные особенности обрабатываемого сигнала (степень корреляции низкочастотных (НЧ) и высокочастотных (ВЧ) составляющих спектра). Использование закона преобразования спектра сигнала при вейвлет-обработке дало возможность синтезировать вейвлет фиксированного порядка, позволяющий выполнить сжатие с минимальной ошибкой. Побочно получаемые зависимости позволяют проанализировать эффективность сжатия при переходе к вейвлетам высших порядков.

Введение

В работе исследуется возможность адаптивного выбора вейвлет-функции с целью минимизации ошибки восстановленного сигнала. Реализация подобных алгоритмов основывается на решении задачи минимизации для функции многих переменных [1]. Указанная функция есть зависимость ошибки восстановленного сигнала от переменных параметризации вейвлет-коэффициентов. Основной недостаток подобного метода — необходимость знания либо явной зависимости коэффициентов вейвлета от параметров, либо неявной зависимости, что ограничивает применение этого метода.

Предложенный алгоритм лишен этого недостатка. Это позволяет сократить объем вычислений и выполнить расчет адаптивного двумерного вейвлета высокого порядка. Алгоритм основывается на анализе спектральных особенностей обрабатываемого сигнала (степень корреляции НЧ и ВЧ составляющих спектра). Использование преобразования спектра сигнала при вейвлет-обработке, позволило синтезировать вейвлет фиксированного наперед заданного порядка, выполняющий сжатие с минимальной ошибкой. Побочно получаемые зависимости позволяют проанализировать эффективность сжатия вейвлетами высших порядков. Первоначальное исследование проблемы было выполнено в работе [2].

Методика выбора соответствующей вейвлет-функции

Рассмотрим выражения, позволяющие выполнить прямое и обратное вейвлет-преобразование исходного одномерного сигнала F_k^0 [1]:

$$\begin{aligned} F_k^j &= \sum_i F_i^{j-1} C_{i-2k}, \\ R_k^j &= \sum_i F_i^{j-1} (-1)^i C_{M-1-i+2k}, \end{aligned} \tag{1}$$

где C_k - коэффициенты вейвлета.

Преобразования (1) можно трактовать как фильтрацию преобразуемой последовательности фильтром либо НЧ, либо ВЧ и последующим прореживанием результата фильтрации. Отобразим представленные преобразования на Фурье-область:

$$F^1(j\omega) = C(j\omega) F^0(j\omega) * K(j\omega),$$

где

$$C(j\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} C_k \exp(-j(M-1-k)\omega), \qquad F^k(j\omega) = \sum_m F_m^k \exp(-jm\omega),$$

$$K(j\omega) = \sum_m k_n \exp(-jm\omega), \qquad k_n = (0,1,0,1,0,.........),$$

а $(*)$ - значок свертки (операция свертки обусловлена процедурой разреживания).

Анализ процедуры свертки позволяет вычислить спектр сжатого сигнала:

$$F^1(j\omega) = \frac{1}{2} C(j\omega) F^0(j\omega) - \frac{1}{2} C(j(\omega-\pi)) F^0(j(\omega-\pi)). \tag{2}$$

Выполним операцию восстановления, опираясь на следующее преобразования (обратное вейвлет-преобразование):

$$F_k^{0*} = \sum_i F_i^1 C_{k-2i}. \tag{3}$$

По аналогии с прямым преобразованием, выражение (2) можно трактовать как добавление нулевых отсчетов и последующую фильтрацию вновь образованной последовательности.

Пусть $F^1(j\omega)$ — Фурье-образ сжатого сигнала, прореженного нулями:

$$F^1(j\omega)=\sum_n F_n^1 \exp(-2jn\omega). \tag{4}$$

Опираясь на (2)-(4) определим Фурье-образ $F^{0*}(j\omega)$ восстановленной последовательности:

$$F^{0*}(j\omega)=\frac{1}{2}C(j\omega)F^0(j\omega)H(j\omega)-\frac{1}{2}C(j(\omega-\pi))F^0(j(\omega-\pi))H(j\omega),$$

где функция H(jω) представляет Фурье-образ коэффициентов масштабирующего уравнения.

Пусть восстановленная последовательность отличается от оригинала лишь фазовой задержкой:

$$F^{0*}(j\omega)\equiv F^0(j\omega)\exp(-j(M-1)\omega). \tag{5}$$

Введенное предположение дает возможность рассчитать коэффициенты вейвлета, позволяющего безошибочно сжимать сигнал. Используя связь между функциями C(jω) и H(jω) и соотношение между восстановленым и исходным сигналами (5), получим:

$$\exp(-j(M-1)\omega)F^0(j\omega)=\frac{1}{2}\exp(-j(M-1)\omega)F^0(j\omega)H^*(j\omega)H(j\omega)-$$

$$-\frac{1}{2}\exp(-j(M-1)(\omega-\pi))F^0(j(\omega-\pi))H^*(j(\omega-\pi))H(j\omega).$$

После преобразования имеем:

$$F^0(j\omega)=\frac{1}{2}F^0(j\omega)H^*(j\omega)H(j\omega)+\frac{1}{2}F^0(j(\omega-\pi))H^*(j(\omega-\pi))H(j\omega).$$

Далее, после некоторой группировки слагаемых, получим:

$$\frac{F^0(j\omega)}{F^0(j(\omega-\pi))}=\frac{H^*(j(\omega-\pi))H(j\omega)}{2-H(j\omega)^*H(j\omega)}.$$

Из условия ортогональности сдвигов масштабирующей функции следует ограничение на функцию H(jω):

$$|H(j\omega)|^2+|H(j(\omega-\pi))|^2=2, \tag{6}$$

с учетом которого имеем:

$$\frac{F^0(j\omega)}{F^0(j(\omega-\pi))}=\frac{H^*(j(\omega-\pi))H(j\omega)}{H^*(j(\omega-\pi))H(j(\omega-\pi))}.$$

После несложных преобразований получим конечное уравнение, определяющее Фурье-образ коэффициентов вейвлета, обеспечивающего безошибочное сжатие:

$$\frac{F^0(j\omega)}{F^0(j(\omega-\pi))}=\frac{H(j\omega)}{H(j(\omega-\pi))}. \tag{7}$$

Из уравнения (7) сразу вытекает условие на фазу искомой функции H(jω):

$$\arg\left(F^0(j\omega)\right)+\arg\left(F^0(j(\pi-\omega))\right)=\arg(H(j\omega))+\arg(H(j(\pi-\omega))). \tag{8}$$

Условие на модуль функции H(jω) получается из (7) после несложных преобразований, а именно возведение в квадрат правой и левой части (7) и привлечение условия (6), в результате получим:

$$|H(j\omega)|^2=\frac{2\left|F^0(j\omega)\right|^2}{\left|F^0(j\omega)\right|^2+\left|F^0(j(\omega-\pi))\right|^2}. \tag{9}$$

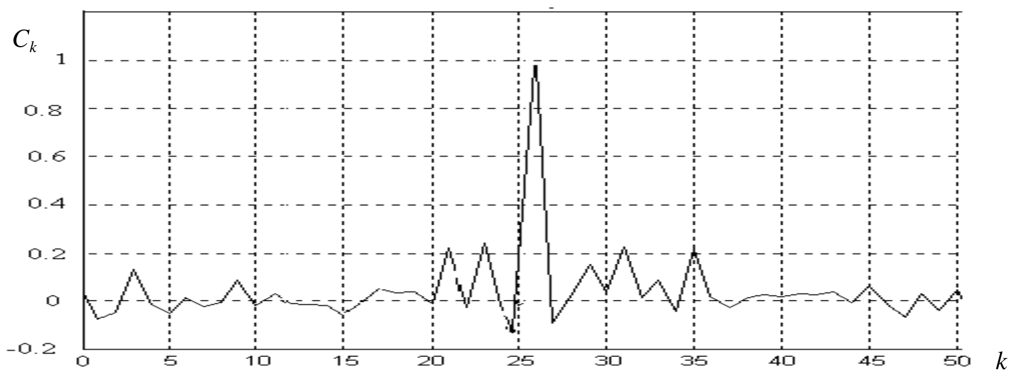
Уравнения (8), (9) позволяют синтезировать искомый вейвлет. Очевидно, что в случае сложного сигнала, порядок вейвлета будет сравним с размером сжимаемой последовательности, поэтому возникает проблема понижения порядка вейвлета при минимальных искажениях восстановленого сигнала. Далее предложен алгоритм, позволяющий приближенно провести расчет искомых коэффициентов вейвлета фиксированного порядка.

Алгоритм расчета коэффициентов вейвлета фиксированного порядка

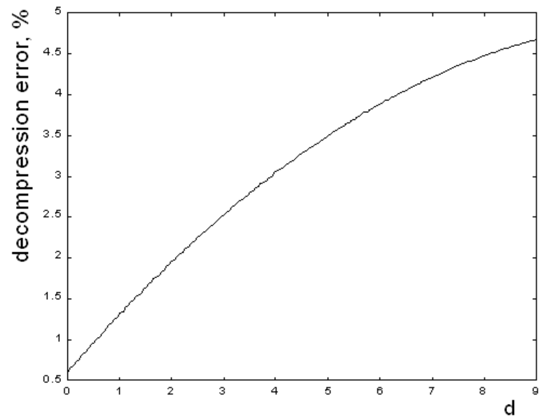
Расчет коэффициентов S_k вейвлета, минимизирующих ошибку восстановленного сигнала, производится путем приближения полученной с помощью выражений (8) и (9) последовательности коэффициентов C_k (частный случай данной последовательности представлен на рис.1а). Методика приближения может быть различной. В работе рассмотрены два подхода: приближенное решение системы уравнений (10) и взятие выборки из полученной последовательности C_k:

$$\sum_j S_j S_{j+2k} = \delta_k^0, \qquad \sum_j C_j S_{j-m_0} = 1, \tag{10}$$

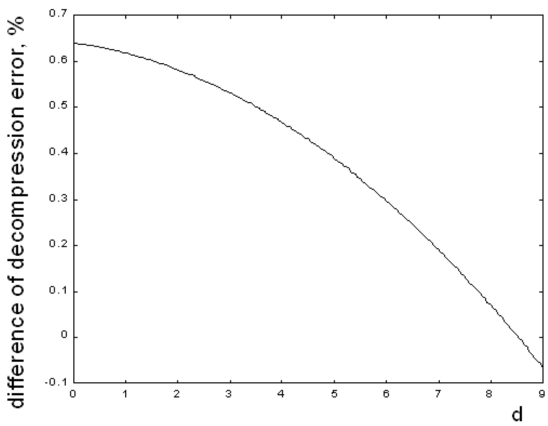
где m_0 - временной сдвиг между последовательностями S_k ,C_k .



а)



б)



в)

Рис.1

Второй способ отличается простотой вычислений и рекомендуется при расчете вейвлетов высокого порядка.

Преимущество предложенного метода перед стандартной обработкой вейвлетами Добечи составляет 5-15 % (в смысле уменьшения СКО восстановленного сигнала). Оно определяется спектральными особенностями исследуемых последовательностей: либо сильным преобладанием низких частот, либо отсутствием высокой корреляционной зависимости высокочастотной и низкочастотной областей спектра сигнала - что вытекает из представленной выше методики расчета выражений (8) и (9).

Полученые результаты имеют также и другое предназначение, а именно позволяют оценить эффективность сжатия вейвлетами более высоких порядков, а также проследить усредненную корреляционную зависимость соседних отсчетов. Предложеная оценка получена в результате статистической обработки последовательностей C_k. На рис.1б представлены статистические закономерности предлагаемого алгоритма - нелинейная зависимость ошибки восстановленного сигнала от дисперсии распределения коэффициентов полученного вейвлета (аппроксимация квадратичной функцией). Также получена зависимость улучшения качества сжатия (уменьшение мощности шума) при возрастании порядка обрабатываемого вейвлета с 4 до 6 от дисперсии распределения коэффициентов (рис.1в).

Заключение

В работе представлен алгоритм адаптивного вейвлет-сжатия, использующий спектральные особенности обрабатываемого сигнала. Полученные результаты позволяют оценить как эффективность вейвлет-обработки в целом, так и преимущества вейвлет-обработки при переходе к вейвлетам более высокого порядка.

Библиография

1. Kumar M. Mandal. Wavelet for image compression. University of Ottawa, 1995, p.180.

2. Кобелев В.Ю., Ласточкин А.В. Выбор оптимальных вейвлетов для обработки сигналов и изображений // докл. 2-ой междунар. конф. и выставки “Цифровая обработка сигналов и ее применения” (DSPA’99), Москва, 1999. Т.2. С.514-518.

ADAPTIVE WAVELET-COMPRESSION

Kobelev V.Yu.

Yaroslavl State University
150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaja st., 14.
Phone: (0852) 32-11-94 E-mail: cat@uniyar.ac.ru

Abstract. The paper is devoted to the possibility of an adaptive choice of wavelet-function to minimize the error of a restored signal,. The offered algorithm analyses spectral features of a treated signal and allows the synthesis of the fixed order wavelet for minimum error compression. Dependencies allowing the analyze of the compression effectiveness by high-order wavelets are also obtained.

Introduction

The paper is devoted to the consideration of the possibility of an adaptive choice of wavelet-function to minimize the error of a restored signal. The realization of similar algorithms is based on a solution of the minimization problem for a function of many variables [1]. This function is a dependence of the restored signal error from the wavelet coefficients. The basic shortage of the similar method is the necessity to know an explicit or implicit dependence of wavelet coefficients from the parameters, which restricts the appliance of the above mentioned method.

The offered algorithm is devoid of this shortage that allows one to reduce the volume of evaluations and to calculate the high order two-dimensional wavelet. The algorithm is based on the analysis of spectral features of the treated signal (degree of correlation of high and low frequencies of the spectrum) and allows the synthesis of a fixed order wavelet with the minimum error with the help of signal spectrum transformation by wavelet-processing. Dependencies allowing the analysis of the compression effectiveness by the high-order wavelets are also obtained. The initial research of the problem was carried out in the work [2].

Technique of choice of appropriate wavelet-function

Let's consider the expressions permitting to execute a direct and an inverse wavelet-transformation of the initial one-dimensional signal F_k^0 [1].

$$F_k^j = \sum_i F_i^{j-1} C_{i-2k}, \qquad R_k^j = \sum_i F_i^{j-1} (-1)^i C_{M-1-i+2k} \tag{1}$$

where C_k are the wavelet coefficients.

The algorithm is based on the analysis of the procedure of wavelet-expansion in the spectral area. Omitting some calculations we shall present the restored signal spectrum:

$$F^{0*}(j\omega) = \frac{1}{2} C(j\omega) F^0(j\omega) H(j\omega) - \frac{1}{2} C(j(\omega-\pi)) F^0(j(\omega-\pi)) H(j\omega) \tag{2}$$

where

$$C(j\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} C_k \exp(-j(M-1-k)\omega), \qquad H(j\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} C_k \exp(-jk\omega).$$

Assuming identity of the initial and the restored signal spectrums, the expressions (3) and (4) alowing us to calculate a massive of the wavelet coefficients C_k for the signal faultless compression are obtained:

$$\arg\left(F^0(j\omega)\right) + \arg\left(F^0(j(\pi-\omega))\right) = \arg(H(j\omega)) + \arg(H(j(\pi-\omega))), \tag{3}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{2|F^0(j\omega)|}{|F^0(j\omega)|^2 + |F^0(j(\omega-\pi))|^2}. \tag{4}$$

The calculation of the fixed-order wavelet coefficients S_k minimizing the restored signal error is produced by an approximation of the coefficient sequence C_k obtained with the help of the expressions (3) and (4). The technique of the approximation can be different. In the paper two approaches are considered: an approximate solution of a set of the equations (5) and of sampling the obtained sequence C_k.

$$\sum_j S_j S_{j+2k} = \delta_k^0, \qquad \sum_j C_j S_{j-m_0} = 1 \tag{5}$$

where m_0 is a time shift between sequences S_k and C_k.

The latter approach differs by a simplicity of evaluations and it is recommended for the calculation of the high-order wavelet coefficients.

The research results allow us to estimate the compression effectiveness by the higher-order wavelets as well as to trace the average correlation dependence of the adjacent dots. On fig.1 dependence approximated by the quadratic function of restored signal error from the variance of the wavelet coefficient distribution is represented: the less the variance, the less the error.

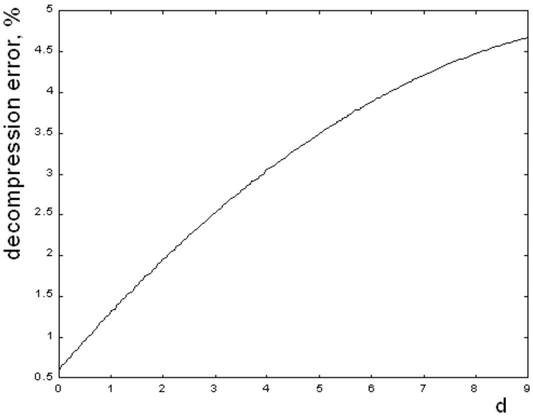


Fig.1

Conclusion

In the paper algorithm of adaptive wavelet-compression with the help of the analysis of spectral features of the treated signal is represented. The obtained results allow us to estimate effectiveness of both the wavelet processing in whole, and of the processing by the higher order wavelets.

Bibliography

1. Kumar M. Mandal. Wavelet for image compression. University of Ottawa, 1995, p.180.

2. Kobelev V.Yu., Lastochkin A.V. Choice of optimal wavelets for signal and image processing // Proc. of 2nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'99), Moscow, 1999. V.2, pp.519-520.