РАСЧЕТ ГАЗОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ШАХТНОЙ ВЕНТИЛЯЦИОННОЙ СЕТИ

В.И.Назаренко, Н.С.Почтаренко, ДонГТУ, Донецк, Украина

При расчете газораспределения в шахтной вентиляционной сети (ШВС) предполагается, что задача воздухораспределения уже решена и, следовательно, для всех ветвей ШВС известны установившиеся расходы воздуха. Требуется по заданным дебитам источников метановыделения определить расходы метана и его содержание во всех ветвях сети.

Источник метановыделения не является энергетическим генератором для ШВС. Метан, аккумулированный в микротрещинах угля и породы, выделяется в окружающее пространство под действием существенной разницы давлений метана и среды, накапливается в пустотах выработанного пространства и вымывается оттуда проходящим потоком воздуха [1]. Если по выработке движется газовоздушная смесь, то при разделении этой смеси в конечном узле выработки на несколько выходных потоков можно считать, что общий расход газа разделяется по отходящим ветвям пропорционально расходам воздуха в этих ветвях. Тогда для произвольной i-ой ветви ШВС получим

$$g_i = \frac{Q_i}{\sum\limits_{j^+} Q_j} \sum_{j^-} g_j + g_i^{м}; \quad i = 1..n, \qquad (1)$$

где Q_i, Q_J - расход воздуха соответственно в i-ой и j-ой ветви, м^3/с;

g_i, g_j - расход метана в i-ой и j-ой ветви, м^3/с;

$g_i^{м}$ - дебит источника метана в i-ой ветви, м^3/с;

j^+ - номера ветвей, исходящих из начального узла i -ой ветви;

j^- - то же для входящих ветвей;

n - количество ветвей в ШВС;

$$g_i^{м} = \begin{cases} 0 & ,\text{если нет источника газа в } i-\text{ой ветви} \\ g_i^{м} & ,\text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для входных узлов поверхности $\sum\limits_{j^-} g_j = 0$. Тогда для ветвей, инцидентных этим узлам, имеет место $g_i = 0$, если в i-ой ветви отсутствуют источники метана ($g_i^{м} = 0$).

Запишем (1) в виде

$$g_i - p_i \sum_{j^-} g_j = g_i^{м} , \qquad (2)$$

где $p_i = \frac{Q_i}{\sum\limits_{j^+} Q_j}$.

Так как $Q_i \le \sum_{j^+} Q_j$, то $0 < p_i \le 1$.

Пусть из начальной вершины i-ой ветви исходит m_i^+ ветвей. Тогда очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{m_i^+} p_k = 1 .$$

Уравнения (2) формируют систему линейных алгебраических уравнений n-го порядка, решение которой определяет газораспределение в ШВС.

В матричном виде:

$$A\overline{G} = \overline{G}^{м}, \qquad (3)$$

где A - матрица коэффициентов; $\overline{G}$ - вектор неизвестных; $\overline{G}^{м}$ - вектор свободных членов.

Каждая i-ая строка ($i = 1..n$) матрицы A - это коэффициенты i-го уравнения системы (2). Поскольку все уравнения этой системы разрешены относительно переменных g_i, то для элементов главной диагонали матрицы A имеет место a_{ii} = 1. Столбец j матрицы A соответствует j-ой ветви сети и определяет номера тех ветвей, по которым распределяется газ, поступающий из j-ой ветви (a_{ii} = 1, $a_{ij} \le 0$, $i \ne j$).

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений разделяются на две основные группы: точные и итерационные. Среди методов первой группы чаще всего используется метод исключения Гаусса; для второй группы наиболее известен метод Зейделя. Сравним между собой указанные два метода по отношению к решению системы (3).

Основным критерием для выбора метода решения уравнений газораспределения является объем используемой памяти ЭВМ. Количество ветвей ШВС, для которых должна практически решаться рассматриваемая задача, составляет n = 500..1500. При $n = 1500$ для размещения матрицы A требуется свыше 15 Мбайт памяти, что превышает возможности большинства современных ЭВМ. Если же в памяти размещать только ненулевые элементы матрицы A, то для этого потребуется на 2-3 порядка меньший объем памяти.

Чтобы выдержать жесткие ограничения по объему памяти, метод решения уравнений газораспределения не должен добавлять в процессе своей работы новые ненулевые элементы в состав матрицы A. Метод Гаусса таким свойством не обладает.

В методе Зейделя в процессе решения матрица A не изменяется. Следовательно, метод Зейделя можно применить для решения задачи газораспределения, если этот метод обеспечивает сходимость процесса решения.

В общем случае необходимое и достаточное условие сходимости метода Зейделя можно сформулировать следующим образом [2]:

все корни уравнения

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1}\lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1}\lambda & a_{2,2}\lambda & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}\lambda & a_{n,2}\lambda & a_{n,3}\lambda & \dots & a_{n,n}\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad (4)$$

по модулю должны быть меньше 1.

Более удобным для применения критерием является

$$\sum_{i \neq j} \left| a_{ij} \right| < \left| a_{ii} \right|, \quad i = 1..n \ . \qquad (5)$$

Критерий (5) формулирует для метода Зейделя достаточные условия сходимости по верхней границе. Если условия (5) выполняются, то это означает, что метод Зейделя для исследуемой системы уравнений наверняка сходится. Невыполнение условий (5) еще не является фатальным признаком расходимости процесса решения.

В матрице A условия (5) не выполняются. Например, если в некотором узле имеются две входящие ветви j, k и одна выходящая i, то при отсутствии в этих ветвях источников газовыделения получим

$$g_i - g_j - g_k = 0 \ .$$

Численные эксперименты, выполненные на ЭВМ для нескольких реальных ШВС, свидетельствуют о сходимости процесса решения уравнений газораспределения по методу Зейделя. Тем не менее любое количество экспериментов не дает оснований обобщать полученные данные для произвольной конфигурации сети. В связи с этим выполним теоретическое исследование сходимости метода Зейделя для уравнений газораспределения, используя для этого критерий (4).

Существенное влияние на скорость сходимости процесса решения уравнений газораспределения оказывает наличие в ШВС циркуляционных контуров. Циркуляционным контуром сети будем называть такой контур, в котором наблюдается одностороннее движение потока воздуха (такие контуры возникают в сети при наличии дополнительных источников энергии, например, при задании тепловых депрессий).

При анализе сходимости процесса решения уравнений газораспределения методом Зейделя по критерию (4) необходимо определить корни уравнения

$$\det(\lambda A^H) = 0 \ ,$$

где λA^H означает умножение переменной λ на элементы нижнего треугольника матрицы A.

Выполним перенумерацию ветвей сети таким образом, чтобы в каждом узле номера исходящих ветвей превышали по значению номера входящих ветвей. Является очевидным, что при отсутствии циркуляционных контуров такое кодирование ветвей возможно, хотя и неоднозначно. Тогда уравнения газораспределения будут иметь вид

$$g_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} g_j + g_i^{м}\ , \quad a_{ij} \in \{ 0, 1 \}\ .$$

В этом случае матрица коэффициентов A превращается в нижнюю треугольную с элементами главной диагонали $a_{ii} = 1$. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов [3]:

$$|\ A\ | = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \lambda\ .$$

Для корней уравнения сходимости получим

$$\lambda^n = 0\ ; \quad \lambda_i = 0\ , \quad i = 1..n\ .$$

Следовательно, метод Зейделя для ШВС без циркуляционных контуров обеспечивает сходимость процесса решения уравнений газораспределения.

Предположим, что вентиляционная сеть содержит циркуляционный контур, образованный тремя ветвями с номерами 1, 2, 3; ветвям, отходящим от узлов контура, присвоим номера 4, 5, 6; входящим - 7, 8, 9. Тогда получим следующие уравнения газораспределения:

$$g_1 = p_1\ (\ g_3 + g_7\ )\ ; \qquad g_2 = p_2\ (\ g_1 + g_8\ )\ ;$$
$$g_3 = p_3\ (\ g_2 + g_9\ )\ ; \qquad g_4 = p_4\ (\ g_3 + g_7\ )\ ;$$
$$g_5 = p_5\ (\ g_1 + g_8\ )\ ; \qquad g_6 = p_6\ (\ g_2 + g_9\ )\ ;$$
$$g_7 = g_7^{м}\ ; \qquad g_8 = g_8^{м}\ ;$$
$$g_9 = g_9^{м}\ ,$$

где $0 < p_i \le 1, \quad i = 1..6$.

Уравнение сходимости:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -p_1 & 0 & 0 & 0 & -p_1 & 0 & 0 \\ -p_2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & -p_3\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & 0 & -p_4\lambda & \lambda & 0 & 0 & -p_4 & 0 & 0 \\ -p_5\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -p_5 & 0 \\ 0 & -p_6\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0\ .$$

После вычеркивания последних трех строк и столбцов, соответствующих входным ветвям 7, 8 и 9, получим:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -p_1 & 0 & 0 & 0 \\ -p_2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_3\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_4\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ -p_5\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -p_6\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Вычеркнув последние три столбца и три строки, соответствующие выходным ветвям 4, 5, 6, и приведя определитель к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -p_1 \\ -p_2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -p_3\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -p_1 \\ 0 & \lambda & -p_1 p_2 \\ 0 & 0 & \lambda - p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

получим

$$\lambda^2(\lambda - p_1 p_2 p_3) = 0 .$$

В частном случае каждому узлу циркуляционного контура может быть инцидентна лишь одна ветвь, связывающая контур с остальной частью сети; при этом по крайней мере для одного узла будет указана отходящая ветвь. Это означает, что в составе коэффициентов p_1, p_2, p_3 по крайней мере один из них меньше 1 (при этом остальные коэффициенты будут равны 1). Тогда для схемы треугольника имеем

$$\lambda_1 = 0 ; \quad \lambda_2 = 0 ; \quad 0 < \lambda_3 < 1 .$$

В общем случае для схемы многоугольника получим

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -p_1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -p_1 p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - p_1 p_2 \cdots p_m \end{vmatrix} = 0 .$$

Каждый циркуляционный контур создает в массиве корней уравнения сходимости (4) элемент со значением $0 < \lambda < 1$. Все остальные корни уравнения сходимости - нулевые. Следовательно, метод Зейделя обеспечивает сходимость процесса решения системы уравнений газораспределения.

Описанная выше методика расчета газораспределения в ШВС реализована в программном комплексе РЕВОД и используется при расчете метанораспределения и анализе зон загазирования в реальных ШВС.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамов Ф.А., Фельдман Л.П., Святный В.А.** Моделирование динамических процессов рудничной аэрологии. - Киев: Наук.думка, 1981. - 284 с.

2**. Бахвалов Н.С**. Численные методы. -М.: Наука, 1973. - 632 с.

3. **Гантмахер Ф.**Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 552 с.