

## Особенности методики математической обработки результатов высокоточного нивелирования с использованием электронных нивелиров

В настоящее время в области геодезических измерений все большей популярностью пользуются оптико-электронные методы и приборы, позволяющие расширить функциональные возможности средств измерений, повысить их точность, а также осуществить уровень автоматизации как процесса измерений, так и обработки его результатов. В отличие от оптических и механических средств измерений, оптико-электронные приборы, как правило:

- используют сложные оптические и электрические элементы и схемы, более подверженные влиянию внешних условий и старению;
- имеют высокую точность и диапазоны измерений, причем, во многих случаях погрешность измерения соизмерима с технологически достижимой точностью;
- характеризуются возрастающей трудоемкостью процессов поверки и калибровки (например, за счет увеличения количества референсных направлений при исследовании короткопериодической погрешности измерения превышений и при исследовании погрешности считывания в отсчетных системах).

Цифровые нивелиры относятся именно к этому классу приборов. Бытует мнение, что цифровые нивелиры — улучшенный аналог оптико-механических нивелиров, и поэтому к ним можно применять все наработанные приемы выполнения измерений. При этом на практике часто пренебрегают требованиями, предъявляемыми

к геометрической схеме работы на станции, полагаясь на совершенство измерительной техники. Такое отношение приводит к превалированию в результатах измерений систематических ошибок и изменению привычной модели взаимодействия их со случайными погрешностями, что и было показано [1,2]. Целью данной статьи является детальное описание методики оценки влияния источников систематических ошибок, которая была использована нами при выполнении исследований [1].

Основной метрологической характеристикой комплекта приборов и методики их применения является величина средней квадратической погрешности измерений превышений на 1 километр нивелирного хода [3]. При решении прикладных задач такой характеристикой является величина средней квадратической ошибки определения стандартного превышения на станции [4]. Очевидно, что эти две характеристики могут быть конвертированы одна в другую при условии, что оговорено число превышений в ходе длиной 1 километр.

Названные метрологические характеристики можно получить одним из следующих методов:

- прямыми многократными измерениями (прямо и обратно) превышений в нивелирных ходах либо построением специальных сетей;
- косвенным путем на нивелирном (высотном) стенде — по результатам измерения превышений на станции и последующего сравнения их с эталонными значениями;

– расчетным путем (поэлементным методом), при котором каждый источник ошибок и их влияние на конечный результат рассматривается в отдельности.

В исследованиях, результаты которых приведены в данной работе, использованы первые два метода.

Метод прямых многократных измерений превышений в нивелирных сетях является наиболее общим. Можно  $n$  раз проложить прямо и обратно нивелирный ход длиной 1 километр либо выполнить двойные измерения превышений в ходе общей длиной  $L$  километров. Для надежной оценки средней квадратической ошибки измеренных превышений из геометрического нивелирования необходимо, чтобы  $L > 10$  км. При построении сетей небольшими секциями, при нивелировании которых в ходе «прямо» и в ходе «обратно» будет постоянное число примерно равнозначных (в смысле длины визирного луча) превышений, число сравниваемых значений превышений возрастет, и устойчивые характеристики можно получить из анализа сравнительно небольших сетей. При любом методе проложения ходов имеется возможность вычислить разности превышений ( $d_h$ ) из прямого и обратного ходов, а, стало быть, среднюю квадратическую ошибку измерения превышения на станции можно оценить по разностям двойных измерений.

Вторым путем реализации этого метода является создание сетей и исследование невязок в полигонах,

образованных по тому или иному правилу. Описанные пути получения точностных характеристик превышений являются весьма трудоемкими, так как они предполагают производство нивелирования полноценной бригадой, с тщательным соблюдением исследуемой технологии работ, с неизбежными затратами времени на переходы с точки на точку наблюдателя и реечников. В таких условиях получение «чистой» инструментальной погрешности нивелирования очень проблематично. С другой стороны, полученные результаты позволяют непосредственно оценить метрологические характеристики методики измерений. Изменение методики должно приводить к изменению метрологических характеристик.

Материалы натуральных измерений анализировались по методикам, которые могут быть описаны как исследования, выполняемые под условием  $\Sigma v = \min$ , хотя в качестве точностных характеристик используются среднеквадратические ошибки. Во втором случае применяется принцип  $\Sigma v^2 = \min$ .

В любом случае предполагается, что систематические погрешности действуют по линейному закону. Это первое приближение. Если оно не адекватно фактическому состоянию дел, после введения «поправок за систематическое влияние» должны возрасти значения среднеквадратических оценок, сделанных по остаточным значениям. При удачном стечении обстоятельств эти значения должны уменьшиться.

Суть предлагаемой методики заключается в предположении, что значение средней квадратической ошибки измеренного превышения, найденное по известной формуле:

$$\mu_{cp} = \sqrt{\frac{\Sigma(pf^2)}{n_1}}, \quad (1)$$

не должно зависеть ни от порядка выбора полигонов, ни от их протяженности. В противном случае необходимо предположить наличие некоторой систематической составляющей.

Такой подход был рекомендован нами в работе. При этом для каждой сети по единому правилу вычисляются невязки по полигонам максимально возможной длины и сравни-

ваются с допустимыми значениями, зависящими от числа включенных в полигон превышений, и выполняется оценка точности измеренного превышения по формуле (1).

Оценки должны быть близкими к расчетным значениям и, подчеркиваем еще раз, не должны зависеть от числа превышений в полигоне. Иначе необходимо выявить причину нарушения очевидного условия. Такое может получиться только тогда, если имеет место одностороннее действие совокупности систематических источников ошибок.

Для уменьшения влияния этих источников на конечный результат можно по каждому полигону вычислить поправку:

$$\gamma = \frac{f}{n_3}, \quad (2)$$

где  $n_3$  — число превышений в каждом полигоне.

По своей сути введение этих поправок аналогично распределению невязок при двухгрупповом уравнивании. Все полученные для каждого полигона значения  $\gamma$  необходимо усреднить и интерпретировать как оценку численного значения влияния систематических ошибок  $\sigma$ , действующих по линейному закону. По значениям «исправленных превышений» необходимо снова вычислить невязки и провести оценку точности.

При уменьшении численных значений характеристик точности превышений, использованных при подсчете невязок, можно утверждать, что предположение о линейном характере влияния систематической ошибки хотя бы частично оказалось подтвержденным.

Эта технология удобна для оценки результатов контрольного нивелирования, предложенного в инструкции [3]. При этом контрольный полигон может быть сравнительно небольшим. Необходимая длина контрольного хода будет достигаться за счет многократного повторения измерений по одному и тому же полигону как в прямом, так и в обратном направлениях. В случаях более сложных построений результаты могут оказаться неубедительными.

### МОДЕЛЬ УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ С УЧЕТОМ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК

В классическом случае уравнительных вычислений, выполняемых под условием  $\Sigma v^2 = \min$ , предполагается, что погрешности измерений носят случайный характер, а систематические ошибки либо отсутствуют, либо сведены к пренебрегаемому уровню. При обработке результатов нивелирования, выполненного с использованием электронных нивелиров, это предположение ложно. Необходимо использовать более сложную модель структуры ошибок результатов полевых измерений. Суть применения принципа  $\Sigma v^2 = \min$  для случая значимых величин ошибок, носящих неслучайный характер, сводится к уравниванию результатов измерений, в которых значимая систематическая составляющая ошибок измерений обособлена как дополнительные неизвестные. Эти неизвестные определяются как некоторая поправка, компенсирующая часть систематической составляющей при уравнивании под условием  $\Sigma v^2 = \min$ . Этот принцип реализован нами с использованием алгоритма К. Михайловича [5], сущность которого при уравнивательных вычислениях, реализуемых параметрическим и коррелятным способами, сводится к следующему.

Пусть имеем  $r$  функций  $f_i$ , зависящих нелинейно от измеренных величин  $l_i$  (в данном примере: измеренные превышения), ошибок исходных данных  $\xi_i$  (ошибки отметок высот исходных пунктов), искомых величин  $X_i$  (отметки высот определяемых пунктов) и систематических ошибок  $\lambda_i$ . Эти функции имеют вид:

$$f_i = (l'_i, l'_2, l'_3, \dots, l'_n; \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \dots, \xi'_r; X_1, X_2, X_3, \dots, X_u; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q) = 0, \quad (3)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, r$ ;

$$l'_i = l_i + v_i;$$

$$\xi'_i = \xi_i + V_i;$$

$$X_i = X_{0i} + \Delta X_i;$$

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \Delta \lambda_i.$$

Здесь  $l'_i$  — уравненные значения измеренных превышений;  $\xi'_i$  — уравненные значения оценок ошибок

исходных данных;  $X_i$  – искомые отметки определяемых пунктов;  $\lambda_i$  – систематические ошибки, значимое влияние которых предполагается в измеренных превышениях.

После линеаризации функции (3) получаем в матричной форме:

$$A^T v + B^T V + CX + D\lambda + w = 0, \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A^T &= \left( \frac{df}{dl} \right)_{r,n}; & B^T &= \left( \frac{df}{d\xi} \right)_{r,s}; \\ C &= \left( \frac{df}{dX} \right)_{r,u}; & D &= \left( \frac{df}{d\lambda} \right)_{r,q}, \\ v^T &= (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n); \\ V^T &= (V_1, V_2, V_3, \dots, V_s); \\ X^T &= (\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3, \dots, \Delta X_u); \\ \lambda^T &= (\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \Delta \lambda_3, \dots, \Delta \lambda_q); \\ w^T &= (w_1, w_2, w_3, \dots, w_r) \end{aligned} \right\}$$

Рассмотрим процедуры решения системы уравнений (4) параметрическим и коррелятным способами.

**В классической форме параметрического способа уравнивания** уравнения поправок имеют следующий вид:

$$v = CX + w,$$

где  $C$  – матрица численных значений частных производных;  $X$  – вектор поправок к искомым величинам (отметки реперов);  $w$  – вектор свободных членов условных уравнений.

Однако в нашем случае присутствуют ошибки исходных данных и систематические ошибки, поэтому уравнение будет иметь более сложный вид:

$$v + B^T V = CX + D\lambda + w.$$

С учетом матриц обратных весов измеренных величин ( $P^{-1}$ ) и ошибок исходных данных ( $P_\xi^{-1}$ ) система примет вид:

$$(P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B) \times k + CX + D\lambda + w = 0,$$

где

$$v = -P^{-1}k, \quad V = -P_\xi^{-1}Bk.$$

Используя подстановки

$$C1 = (C \ D), \quad X1 = \begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix},$$

приведем систему к виду

$$(P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B) \times k + C1 \times X1 + w = 0$$

и наложим условия

$$\left. \begin{aligned} (P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B) \times k + C1 \times X1 + w &= 0, \\ C1^T \times k &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Выразим значение  $k$  из первого условия

$$k = -(P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B)^{-1} \times (C1 \times X1 + w),$$

подставим его во второе

$$\begin{aligned} & -C1^T (P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B)^{-1} \times \\ & \times C1 \times X1 - C1^T (P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B)^{-1} \times w, \end{aligned}$$

и, наконец, найдем искомый вектор  $X1$ :

$$\begin{aligned} X1 &= -[C1^T (P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B)^{-1} \times C1]^T \times \\ & \times C1^T (P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B)^{-1} \times w. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведем без вывода формулу для оценки точности искомым величин:

$$Q = [C1^T (P^{-1} + B^T P_\xi^{-1} B)^{-1} \times C1]^T.$$

Таким образом, задача решена: определены как поправки, соответствующие влиянию источников систематических ошибок, так и выполнена оценка их точности.

**В классическом коррелятном способе** условные уравнения имеют следующий вид:

$$A^T v + w = 0.$$

Однако, поскольку мы учитываем систематические ошибки и ошибки исходных данных, то исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$A^T v + B^T V + D\lambda + w = 0.$$

Для ее решения выполним следующую подстановку

$$v = P^{-1}A \times k, \quad V = P_\xi^{-1}B \times k,$$

а также накладываем условие:

$$\left. \begin{aligned} Nk + D\lambda + w &= 0 \\ D^T k &= 0 \end{aligned} \right\},$$

где  $N = A^T P^{-1}A + B^T P_\xi^{-1}B$ .

Выразим вектор  $k$  из первого уравнения:

$$k = -N^{-1}D\lambda - N^{-1}w$$

и подставим его во второе

$$-D^T N^{-1}D\lambda - D^T N^{-1}w = 0,$$

отсюда систематическая ошибка равна

$$\lambda = -(D^T N^{-1}D)^{-1} D^T N^{-1}w. \quad (6)$$

Нахождение неизвестных выполняется по обычной схеме.

Приведем без вывода формулу для оценки точности искомым величин:

$$\begin{aligned} Q_i &= P^{-1} - P^{-1} \times C^T \times N^{-1} \times C \times P^{-1} + \\ & + P^{-1} \times C^T \times N^{-1} \times D \times (D^T \times N^{-1} \times D)^{-1} \times \\ & \times (P^{-1} \times C^T \times N^{-1} \times D)^T. \end{aligned}$$

### ПОРЯДОК ВЫЧИСЛЕНИЙ

Продемонстрируем использование описанных теоретических положений на примере обработки модели нивелирной сети, схема которой приведена на рисунке.

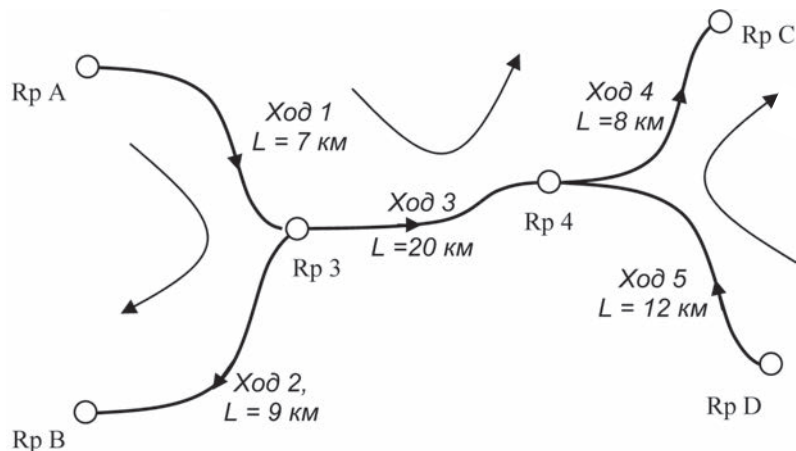


Схема модели сети

Ведомость измеренных превышений

Направление	h <sub>пр</sub> , м	h <sub>обр</sub> , м	h <sub>ср</sub> , м	λ, мм	h <sub>лср</sub> , м	Длина хода L, км
RpA-Rp3	-4,278	+4,279	-4,278	-14	-4,292	7
Rp3-RpB	-3,649	+3,648	-3,648	-18	-3,666	9
Rp3-Rp4	+2,384	-2,385	+2,384	-40	+2,431	20
Rp4-RpC	+16,073	-16,075	+16,074	-16	16,058	8
RpD-Rp4	-6,330	+6,332	-6,331	-24	-6,355	12

Численные значения параметров нивелирной сети приведены в табл. 1 и 2.

Уравнительные вычисления осуществляются в процессе выполнения ряда операций, описание которых представим в виде нескольких шагов.

**При использовании параметрического способа** последовательность шагов будет следующей.

**Шаг 1 – составление уравнений связи.** В качестве параметров нивелирования выберем отметки узловых реперов X1 и X2; для представленной на рисунке схемы таковыми являются отметки определяемых реперов Rp3 (X1) и Rp4 (X2).

Составленные с учетом направлений ходов (рисунок) и параметров нивелирования уравнения связи будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= H_{Rp3} - H_{RpA}, \\ h_2 &= H_{RpB} - H_{Rp3}, \\ h_3 &= H_{Rp4} - H_{Rp3}, \\ h_4 &= H_{RpC} - H_{Rp4}, \\ h_5 &= H_{Rp4} - H_{RpD} \end{aligned} \right\} \text{или}$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= X1 - H_{RpA}, \\ h_2 &= H_{RpB} - X1, \\ h_3 &= X2 - X1, \\ h_4 &= H_{RpC} - X2, \\ h_5 &= X2 - H_{RpD} \end{aligned} \right\} (7)$$

**Шаг 2 – составление уравнений поправок (формирование матрицы C).** С этой целью выполним дифференцирование формул (7) по параметрам нивелирования X1 и X2, а полученные коэффициенты занесем в табл. 3.

При этом

$$\frac{dh_1}{dX1} = 1, \quad \frac{dh_1}{dX2} = 0, \quad \frac{dh_2}{dX1} = -1,$$

и т.д. по всем уравнениям.

**Шаг 3 – вычисление отметок Rp3 и Rp4** (приближенных значений ис-

комых отметок). С этой целью будем использовать соответствующие уравнения связи из системы (7). В частности, искомые отметки из первого и последнего уравнения:

$$\begin{aligned} H_{Rp3}^0 &= h_1 + H_{RpA} = \\ &= -4,292 + 142,153 = 137,861 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{Rp4}^0 &= h_5 + H_{RpD} = \\ &= -6,355 + 146,589 = 140,234. \end{aligned}$$

**Шаг 4 – определение векторов свободных членов ω.** Для этого в формулу (5) подставляются отметки исходных реперов, вычисленные значения отметок определяемых реперов, а превышения  $h_i$  переносятся в правую часть:

$$\left. \begin{aligned} H_{Rp3}^0 - H_{RpA} - h_1 &= \omega_1 = \\ &= 137,861 - 142,153 + 4,292 = 0,000, \\ H_{RpB} - H_{Rp3}^0 - h_2 &= \omega_2 = \\ &= 134,226 - 137,861 + 3,666 = 0,031, \\ H_{Rp4}^0 - H_{Rp3}^0 - h_3 &= \omega_3 = \\ &= 140,234 - 137,861 - 2,344 = 0,029, \\ H_{RpC} - H_{Rp4}^0 - h_4 &= \omega_4 = \\ &= 156,332 - 140,234 - 16,058 = 0,040, \\ H_{Rp4}^0 - H_{RpD} - h_5 &= \omega_5 = \\ &= 140,234 - 146,589 + 6,355 = 0,000 \end{aligned} \right\} (8)$$

**Шаг 5 – назначение весов измеренных превышений** с использованием одного из двух способов: пропорционально длинам ходов (например, для хода длиной  $L = 7$  км  $P = C/7$ ) или количеству станций (если в ходе 15 станций,  $P = 1/15$ ). В первом слу-

Таблица 1

Таблица 2

Отметки высот исходных реперов

Порядковый номер	Название	Отметка, м
1	RpA	142,153
2	RpB	134,226
3	RpC	156,332
4	RpD	146,589

Таблица 3

Матрица C

Превышение	X1 (H <sub>Rp3</sub> )	X2 (H <sub>Rp4</sub> )
h <sub>1</sub>	1	0
h <sub>2</sub>	-1	0
h <sub>3</sub>	-1	1
h <sub>4</sub>	0	-1
h <sub>5</sub>	0	1

Таблица 4

Уравнение	h <sub>1</sub>	h <sub>2</sub>	h <sub>3</sub>	h <sub>4</sub>	h <sub>5</sub>
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1

чае в результате уравнивания получим среднюю квадратическую погрешность  $\mu$  на  $C$  километров хода, а во втором – среднюю квадратическую погрешность  $\mu$  измерения превышения на станции.

Весовая матрица, полученная при назначении весов пропорционально длинам линий, будет иметь следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

**При реализации коррелятного способа** последовательность шагов такова.

**Шаг 1 – составление исходных функций связи.** С этой целью по схеме сети (рисунок) формируются замкнутые полигоны либо ходы между исходными реперами. При этом общее число независимых уравнений ( $r$ ) соответствует числу избыточных измерений, т.е.  $r = n - k$ , где  $n$  – количество всех измерений, а  $k$  – количество неизвестных. Для рассматриваемого примера  $n = 5, k = 2, r = 3$ .

В соответствии со схемой сети (рисунок) исходные уравнения (функции связи) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_{RpB} - H_{RpA} &= h_1 + h_2 + 0 + 0 + 0 \\ H_{RpC} - H_{RpA} &= h_1 + 0 + h_3 + h_4 + 0 \\ H_{RpC} - H_{RpD} &= 0 + 0 + 0 + h_4 + h_5 \end{aligned} (9)$$

Для составления матрицы  $A$  берутся частные производные по каждому превышению и заносятся в соответствующие столбцы табл. 4.

В уравнениях (9) нули обычно не пишутся, но с целью правильного понимания нули были показаны.

**Шаг 2 – вычисление невязок.** Для этого образуются разности между измеренными и теоретическими превышениями согласно соответствующим функциям связи; для замкнутых полигонов сумма превышений должна быть равна нулю:

$$\left. \begin{aligned} h_1 + h_2 - (H_{RpB} - H_{RpA}) &= \omega_1 = \\ &= -4,292 - 3,666 - (134,226 - \\ &- 142,153) = -0,031, \\ h_1 + h_3 + h_4 - (H_{RpC} - H_{RpA}) &= \omega_2 = \\ &= -4,292 + 2,344 + 16,058 - \\ &- (156,332 - 142,153) = -0,069, \\ h_4 + h_5 - (H_{RpC} - H_{RpD}) &= \omega_3 = \\ &= 16,058 - 6,355 - (156,332 - \\ &- 146,589) = -0,040 \end{aligned} \right\}$$

**Шаг 3 – назначение весов** осуществляется в том же порядке, что и при использовании параметрического способа уравнивания.

### УЧЕТ ВЛИЯНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК И ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

**Влияние систематических ошибок** на измеряемые величины будем учитывать исходя из предположения об их линейном характере, т.е. накопления их пропорционально числу станций в ходе или в зависимости от километража. Особенности учета влияния источников систематических ошибок при использовании параметрического способа уравнивания будут заключаться в следующем.

Пусть характер влияния систематических ошибок для каждого хода одинаков и линейно связан с их протяженностью. Тогда соответствующие функции будут иметь вид:

$$\begin{aligned} h_1 + 7\lambda &= H_{Rp3} - H_{RpA}, \\ h_2 + 9\lambda &= H_{RpB} - H_{Rp3}, \\ h_3 + 20\lambda &= H_{Rp4} - H_{Rp3}, \\ h_4 + 8\lambda &= H_{RpC} - H_{Rp4}, \\ h_5 + 12\lambda &= H_{Rp4} - H_{RpD}. \end{aligned}$$

Теперь необходимо составить матрицу  $D$  – частных производных функций по систематическим ошибкам. Систематические ошибки оказывают влияние на невязку, поэтому необходимо вы-

яснить какое влияние оказывают ошибки на эту невязку. Для этого в формулах (5) учтем зависимость измеренного превышения и систематической ошибки:

$$\begin{aligned} (h_1 + H_{RpA} + 7\lambda) - H_{RpA} - h_1 - 7\lambda &= \omega_1, \\ H_{RpB} - (h_1 + H_{RpA} + 7\lambda) - h_2 - 9\lambda &= \omega_2, \\ (h_5 + H_{RpD} + 12\lambda) - (h_1 + H_{RpA} + \\ + 7\lambda) - h_3 - 20\lambda &= \omega_3, \\ H_{RpC} - (h_5 + H_{RpD} + 12\lambda) - \\ - h_4 - 8\lambda &= \omega_4, \\ (h_5 + H_{RpD} + 12\lambda) - H_{RpD} - \\ - h_5 - 12\lambda &= \omega_5. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее вычислим суммарное влияние систематических ошибок на невязки:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \\ -h_2 - h_1 - 16\lambda + H_{RpB} - H_{RpA} &= \omega_2, \\ -h_3 - h_1 + h_5 - 15\lambda + H_{RpD} - H_{RpA} &= \omega_3, \\ -h_4 - h_5 - 20\lambda + H_{RpC} - H_{RpD} &= \omega_4, \\ \omega_5 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для представленной на рисунке модели сети

$$D^T = |0 \quad -16 \quad -15 \quad -20 \quad 0|^T. \quad (11)$$

Особенности учета влияния источников систематических ошибок при использовании коррелятного способа уравнивания будут заключаться в следующем. Отличие в составлении матриц в коррелятном способе в том, что используются уравнения (3), а не (2). При этом предположим, что систематические ошибки определения превышения подчиняются линейному закону и влияют в каждом километре хода одинаково

$$\begin{aligned} H_{RpB} - H_{RpA} &= h_1 + 7\lambda + h_2 + 9\lambda + \\ + 0 + 0 + 0, \\ H_{RpC} - H_{RpB} &= h_1 + 7\lambda + 0 + h_3 + \\ + 20\lambda + h_4 + 8\lambda + 0, \\ H_{RpC} - H_{RpD} &= 0 + 0 + 0 + h_4 + \\ + 8\lambda + h_5 + 12\lambda. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь посмотрим, какое влияние систематические ошибки оказывают на вектор невязок, для этого:

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + 16\lambda - (H_{RpB} - H_{RpA}) &= 0, \\ h_1 + h_3 + 35\lambda + h_4 - (H_{RpC} - H_{RpB}) &= 0, \\ h_4 + h_5 + 20\lambda - (H_{RpC} - H_{RpD}) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из этого уравнения можно получить матрицу  $D$  частных производных по систематическим ошибкам:

$$D^T = |16 \quad 35 \quad 20|^T. \quad (14)$$

Обсудим результаты уравнивания с учетом систематических ошибок в случае применения параметрического способа. Используя все формулы, перечисленные в соответствующем разделе данной статьи и вычисленные по шагам значения матриц, выполним уравнивание измеренных превышений. Мы намеренно искажили результаты измерений систематическими ошибками, а именно ошибкой 2 мм/км, для того чтобы решение по алгоритму было обоснованным и доказательным.

Для получения матрицы  $C1$  расширим матрицу  $C$  (табл. 3) путем введения вектора  $D$  согласно (11). В результате будем иметь:

$$C1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -16 \\ -1 & 1 & -15 \\ 0 & -1 & -20 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для обнаружения вектора поправок к вычисленным отметкам реперов 3 и 4 воспользуемся уравнением (5), которое без учета ошибок исходных данных примет более простой вид:

$$X1 = -[C1^T \times P \times C1]^{-1} \times C1^T \times P \times w.$$

После подстановки в это уравнение значений  $P$ ,  $C1$  и  $w$  получим:

$$X1 = \begin{pmatrix} -0,0002 \\ 0,0003 \\ 0,00197 \end{pmatrix}.$$

Элементы вектора  $X1$  представлены в метрах. Его первые два значения суть поправки к приближенным отметкам векторов, а последняя – искомая систематическая ошибка на 1 километр хода (1,97 мм), которая отличается от заданной на 0,03 мм.

Приведем матрицу обратных весов уравненных неизвестных:

$$Q = \begin{pmatrix} 5,30 & 2,35 & -0,20 \\ 2,35 & 5,50 & -0,17 \\ -0,20 & -0,17 & 0,02 \end{pmatrix}.$$

Обсудим результаты уравнивания с учетом систематических ошибок в случае применения коррелятного способа. Воспользовавшись формулой (6) и значением вектора  $D$  согласно (14) получим:

$$\lambda = 0,00197.$$

Таблица 5

Направление	$h_{\text{лср}}, \text{ м}$	$V$	$V_{\lambda}$	$h_{\text{урав}}, \text{ м}$	$h_{\text{ср}}^{\text{изм}}, \text{ м}$	Разность, м
RpA-Rp3	-4,292	-0,0002	0,0138	-4,278	-4,278	0,000
Rp3-RpB	-3,666	-0,0003	0,0177	-3,649	-3,648	-0,001
Rp3-Rp4	+2,431	0,0000	0,0394	+2,383	+2,384	-0,001
Rp4-RpC	+16,058	0,0002	0,0158	+16,074	+16,074	0,000
RpD-Rp4	-6,355	0,0003	0,0237	-6,331	-6,331	0,000

Приведем матрицу обратных весов измеренных превышений после уравнивания  $Q_1$ , вектор поправок к измеренным величинам  $V$  и вектор поправок на влияние систематических ошибок:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 5,30 & -2,18 & -0,02 & 1,56 & 2,35 \\ -2,18 & 4,18 & 4,49 & 2,08 & 0,43 \\ -0,02 & 4,49 & 9,96 & -0,18 & 5,76 \\ 1,56 & 2,08 & -0,18 & 6,57 & -2,03 \\ 2,35 & 0,43 & 5,76 & -2,03 & 5,50 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -0,0002 \\ -0,0003 \\ 0,0000 \\ 0,0002 \\ 0,0003 \end{pmatrix}, V_{\lambda} = \begin{pmatrix} 0,0138 \\ 0,0177 \\ 0,0394 \\ 0,0158 \\ 0,0237 \end{pmatrix}.$$

Таблица 6

Превышение	$H_{RpA}$	$H_{RpB}$	$H_{RpC}$	$H_{RpD}$
$h_1$	-1	0	0	0
$h_2$	0	1	0	0
$h_3$	0	0	0	0
$h_4$	0	0	1	0
$h_5$	0	0	0	-1

Таблица 7

Уравнение	$H_{RpA}$	$H_{RpB}$	$H_{RpC}$	$H_{RpD}$
1	1	-1	0	0
2	0	1	-1	0
3	0	0	-1	1

Проверим правильность вычислений результата уравнивания, для чего введем поправки в измерения, приближенные отметки и получим некоторый аналог табл. 1.

Для получения окончательных отметок  $Rp3$  и  $Rp4$  необходимо выполнить вычисления, приведенные в шаге 3 параметрического способа уравнивания, но с уже поправленными значениями превышений, то есть:

$$H_{Rp3} = h_1^{\text{управ}} + H_{RpA} = -4,278 + 142,153 = 137,875,$$

$$H_{Rp4} = h_5^{\text{управ}} + H_{RpD} = -6,331 + 146,589 = 140,258.$$

**Матрицу обратных весов отметок определяемых реперов  $Q$**  можно получить по результатам уравнивания каркасной сети или при необходимости принять единичной (если отметки реперов равнозначны и независимы).

**Параметрический способ.** Для оценки характера влияния ошибок исходных данных воспользуемся системой уравнений (5), найдем частные производные по исходным реперам ( $dh_i/dH_{Rpi}$ ) в каждом из уравнений и занесем данные в табл. 6.

**Коррелятивный способ.** Для оценки характера влияния ошибок исходных

данных применим аналогичный прием: воспользуемся системой уравнений (10) и найдем частные производные ( $dh_i/dH_{Rpi}$ ) в каждом из уравнений по исходным реперам; результаты занесем в табл. 7.

Приведенные в настоящей статье методы обработки результатов высокоточного нивелирования с использованием электронных нивелиров нашли свое практическое применение при обработке результатов высокоточного нивелирования, выполненного при наблюдениях за осадками памятников архитектуры Московского Кремля [1].

**Литература**

- Федосеев Ю.Е., Зубарев А.Э., Лобазов В.Я. и др. Особенности накопления ошибок измерений при создании высокоточных сетей с использованием электронных нивелиров. Сборник статей по итогам научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, посвященной 229-летию МИИГАиК. М., 2008, с.11–15.
- Федосеев Ю.Е., Голыгин Н.Х., Ковалев С.В. и др. Проверка и калибровка цифровых нивелиров и штрихкодовых реек. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2009, №2.
- Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов, ГКИНП (ГНТА) – 03 – 010 – 03. М., ЦНИИГАиК, 2004.
- ГОСТ 24846–81 Грунты. Методы измерения деформаций оснований зданий и сооружений. Изд-во стандартов. М., 1981.
- Михайлович К. Геодезия (урavnительные вычисления). Пер. С.В. Лебедева. Под ред. В.Д. Большакова. М., «Наука», 1984.