ОБ ЭФФЕКТЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье выполнено сравнение результатов уравнивания, полученных по восьми разным программам для одних и тех же шести тестовых примеров триангуляции. Первые три программы выполняют математическую обработку угловых геодезических сетей по направлениям линейными методами, одна программа нелинейным методом Ньютона и четыре остальные программы реализуют обобщенный метод наименьших квадратов в линейном и нелинейном вариантах. Целью исследований является подтверждение гипотезы Ю.И. Маркузе (1982 г.) о смещенности оценок параметров при уравнивании плановых геодезических сетей нелинейным методом Ньютона.

В.И. МИЦКЕВИЧ, д.т.н.,
В.В. ЯЛТЫХОВ, к.т.н.,
А.Ю. БУДО, студент,
С.Г. ШНИТКО, ассистент,
Полоцкий государственный университет, г. Новополоцк

Методы решения систем нелинейных параметрических уравнений широко используются при решении различных геодезических засечек на плоскости, эллипсоиде и в пространстве. Преимущества этих методов в том, что они позволяют обрабатывать любые геодезические сети, используя только результаты измерений и координаты исходных пунктов. Начальные координаты определяемых пунктов для метода релаксации можно находить как средние арифметические из известных координат исходных пунктов [1]. При обработке геодезических сетей координаты пунктов находят методом последовательной вставки точек, используя избыточные измерения для поиска грубых промахов в информации и в измерениях. В отличие от метода Ньютона, обладающего малой областью сходимости, метод релаксации за ограниченный промежуток времени может находить координаты пунктов с любой точностью, не опасаясь того, что в окрестности минимума градиентные методы (Коши, Ньютона) могут привести к расходящемуся процессу, что осложняет алгоритм программы уравнивания, продолжая итерации до тех пор, пока уменьшается значение целевой функции. Обычно для этого требуется выполнить 5-6 приближений нелинейным методом Ньютона.

В книге [2] Ю.И. Маркузе пишет: «Важным условием, на котором базируется обоснование метода наименьших квадратов, является условие несмещенности оценок X, которое всегда выполняется при исходных уравнениях линейного вида. Не так обстоит дело, если эти уравнения нелинейные». Основываясь на этом утверждении, как правило в производственных программах начальные координаты определяемых пунктов вычисляют нелинейным методом, а уравнивание геодезической сети осуществляют линейным алгоритмом Гаусса. В научных исследованиях [3] и вычисление координат и уравнивание и оценка точности выполнялись нелинейным методом Ньютона, что приводило к близким результатам линейного и нелинейного алгоритмов уравнивания. Так продолжалось до тех пор, пока был реализован нелинейный обобщенный метод наименьших квадратов, приводящий к смещенным оценкам параметров (неверным уравненным координатам определяемых пунктов).

Чтобы выявить отклонение результатов уравнивания от их эталонного значения, необходимо реализовать программный продукт, дающий несмещенные оценки параметров. Не менее важно найти задачу, сравнивая результаты уравнивания с эталоном. Такая задача существует при уравнивании триангуляции по углам и направлениям. Последнее можно реализовать несколькими программными продуктами, взяв за эталон результаты уравнивания в программе CREDO_DAT (http://www.credo-dialogue.com/products_1/credo_dat.htm). В таблице эти результаты представлены в колонке «эталон». Дадим краткие сведения об остальных программах:

Программы 2, 3, 4 выполняют уравнивание по углам включая угол, замыкающий горизонт при числе направлений на пункте больше двух. Такая обработка дает результаты, близкие к уравниванию по направлениям.

Программа 2 – «комплексная программа» разработанная К.Л. Прововоровым, В.И. Мицкевичем. Программа 3 – разработанная С.В. Маковским. Программа 4 (000.bat) – нелинейный необобщенный метод Ньютона.

Программы 5, 6, 7, 8 реализуют обобщенный метод наименьших квадратов, используя корреляционную матрицу R, найденную по алгоритму Ю.И. Маркузе [2, с. 65]. Программа 5. (kemni000) – обобщенный линейный метод уравнивания с использованием алгоритма при n = 2.0, опубликованного в [4]. Программа 6 (kemnirel) – уравнивание нелинейным методом релаксации путем минимизации целевой функции [4]:

$$\Phi(X) = \left(\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}\right)^{T} \cdot K_n^{-1} \cdot \left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}, \tag{1}$$

где $L(X) = T^{выч} - T^{изм}$, вектор свободных членов нелинейных параметрических уравнений; n – показатель степени; $K_n = P_n^{-\frac{1}{2}} \cdot R \cdot P_n^{-\frac{1}{2}}$; R – корреляционная матрица; $P_n = \left(1/\sigma_n\right)^n$. Оценка точности осуществляется по формулам:

$$Q = FP_n^{-1}F^T; \tag{2}$$

$$F = \left(A^T K_n^{-1} A\right)^{-1} A^T K_n^{-1}; \tag{3}$$

A – матрица коэффициентов линейных параметрических уравнений поправок; Q – обратная весовая матрица.

Программа 7 (kkkrel. bat) – уравнивание выполняется нелинейным методом релаксации, а оценка точности осуществляется также нелинейным методом по формуле:

$$F_{txi} = \frac{(X_\partial)_t - X_t}{\delta_i}; \tag{4}$$

где X_t – вектор уравненных координат, найденный при уравнивании геодезической сети; X_δ – вектор уравненных координат, полученный методом Ньютона после изменения i-го измерения на малую величину δ_i.

Программа 8 (kkk.bat) – выполняет уравнивание и оценку точности нелинейным методом Ньютона путем минимизации целевой функции (1) при n=2.0 с дальнейшим применением для оценки точности равенство (4).

Результаты вычислений приведены в таблице, в которой даны разности координат относительно эталона, указанного в колонке 1, СКП единицы веса (μ), ошибки положения пунктов (M) в метрах, координаты и их разности в метрах. Дополнительные исследования показали, что программы 5, 6, 7, 8 дают совпадающие результаты уравнивания и оценки точности при R=E, что подтверждает и надежную отладку. Однако, если $R \neq E$, то программы 7 и 8 дают большие флуктуации относительно эталона, полученного программой CREDO_DAT.

В заключение отметим, что обобщенный метод наименьших квадратов нельзя реализовывать нелинейным методом Ньютона, дающим смещенные оценки параметров.

Результаты уравнивания триангуляции по направлениям с помощью различных программ

Оценка	Обрабатывающая программа							
	Эталон	2	3	4	5	6	7	8
Пример 1. Геодезический четырехугольник из [5]								
μ	11,79	14,44	9,12	4,07	5,17	4,49	4,49	5,03
M_1	0,097	0,068	0,043	0,068	0,065	0,076	0,069	0,088
M_2	0,143	0,101	0,064	0,101	0,137	0,130	0,072	0,145
X_1	1249,907	0,000	0,000	0,000	0,012	-0,045	-0,046	-0,058
Y_1	1230,083	0,000	0,000	0,000	-0,012	0,013	0,013	0,021

X_2	99,923	0,000	0,000	0,000	0,003	0,057	0,038	0,080
Y_2	499,979	0,000	0,000	0,000	-0,004	-0,053	-0,055	-0,065
Пример 2. Триангуляция из [6] с.93								
μ	0,44	0,52	0,50	0,85	1,86	1,46	1,45	1,47
M_1	0,040	0,029	0,028	0,029	0,025	0,032	0,016	0,018
M_2	0,041	0,029	0,028	0,029	0,026	0,030	0,011	0,012
M_3	0,021	0,015	0,015	0,015	0,014	0,012	0,004	0,001
X_1	74014,164	0,001	0,000	0,001	-0,008	0,012	0,032	0,025
Y_1	26533,249	-0,001	-0,002	-0,001	-0,020	-0,012	-0,020	-0,014
X_2	66008,118	-0,004	-0,004	-0,004	0,004	0,002	0,024	0,015
Y_2	25624,114	-0,005	-0,006	-0,005	-0,023	-0,011	-0,007	-0,006
X_3	68403,814	0,001	0,001	0,001	-0,002	0,014	0,025	0,019
Y_3	18238,860	-0,005	-0,005	-0,005	-0,012	-0,002	0,001	0,000
Пример 3. Триангуляция из [6] с.129								
μ	0,71	0,97	0,73	0,86	2,66	2,08	2,08	2,48
M_1	0,035	0,028	0,021	0,028	0,051	0,034	0,029	0,042
M_2	0,024	0,023	0,017	0,023	0,022	0,015	0,010	0,052
M_3	0,033	0,026	0,020	0,026	0,034	0,019	0,023	0,133
X_1	61040,812	0,004	-0,004	-0,004	-0,009	-0,011	-0,033	-0,028
Y_1	28940,854	0,003	0,002	0,003	0,035	0,002	-0,051	-0,060
X_2	67944,934	0,000	-0,001	0,000	-0,032	-0,001	-0,021	-0,031
Y_2	23036,585	0,004	0,003	0,004	0,043	-0,002	-0,025	-0,037
X_3	74996,251	-0,002	-0,003	-0,002	-0,017	-0,005	-0,004	0,008
Y_3	27896,751	-0,004	-0,005	-0,004	0,014	-0,010	-0,032	-0,049
Пример 4. Триангуляция из [6] с.153								
μ	0,64	0,86	0,83	1,06	2,00	1,56	1,56	1,58
M_1	0,040	0,032	0,031	0,032	0,044	0,033	0,013	0,012
M_2	0,037	0,029	0,029	0,029	0,047	0,033	0,018	0,015
M_3	0,022	0,019	0,018	0,019	0,018	0,018	0,003	0,003
X_1	20662,141	0,002	0,001	0,002	-0,002	-0,002	0,005	-0,004
Y_1	109240,112	-0,001	-0,001	-0,001	0,012	0,012	0,030	0,020
X_2	10999,801	-0,008	-0,008	-0,008	-0,020	-0,020	-0,036	-0,030
Y_2	107008,835	0,000	-0,002	0,000	0,006	0,006	0,025	0,011
X_3	16684,233	0,006	0,005	0,006	-0,001	-0,001	-0,014	-0,012
Y_3	102249,779	0,003	0,005	0,003	0,006	0,006	0,012	0,009
Пример 5. Триангуляция из [7] с.145								
μ	0,88	1,06	1,05	1,05	1,60	1,41	1,42	2,31
M_1	0,189	0,132	0,132	0,132	0,140	0,121	0,074	0,170
M_2	0,191	0,129	0,139	0,129	0,163	0,152	0,066	0,190

M_3	0,201	0,136	0,136	0,136	0,187	0,168	0,065	0,250
M_4	0,223	0,150	0,150	0,150	0,207	0,178	0,118	0,186
M_5	0,164	0,119	0,119	0,119	0,164	0,144	0,273	0,896
X_1	720294,249	0,010	0,010	0,010	0,018	0,024	0,023	0,100
Y_1	506219,946	0,023	0,023	0,023	0,003	-0,035	-0,035	-0,112
X_2	699195,066	-0,012	-0,012	-0,012	0,042	0,041	0,043	-0,058
Y_2	511018,410	0,016	0,015	0,016	0,057	-0,015	-0,016	0,116
X_3	711404,389	0,003	0,003	0,003	0,018	0,041	0,041	-0,027
Y_3	527384,840	0,000	0,000	0,000	-0,005	0,072	-0,075	0,089
X_4	691444,471	-0,009	-0,009	-0,009	0,035	0,082	0,084	-0,036
Y_4	525520,742	0,004	0,004	0,004	-0,032	0,120	-0,123	0,070
X_5	682606,852	-0,003	-0,003	-0,003	0,008	-0,020	-0,020	-0,033
Y_5	544980,665	-0,022	-0,022	-0,022	-0,044	-0,068	-0,073	0,054
Пример 6. Триангуляция из [7] с.160								
μ	1,30	1,58	1,19	0,85	1,58	1,46	1,46	1,56
M_1	0,082	0,063	0,047	0,063	0,046	0,046	0,046	0,060
M_2	0,099	0,071	0,053	0,071	0,051	0,058	0,104	0,081
X_1	83182,664	0,008	0,008	0,008	-0,003	0,014	0,012	-0,002
Y_1	51400,591	0,003	0,001	0,003	0,024	-0,009	-0,010	0,086
X_2	75890,367	0,009	0,007	0,009	0,000	-0,073	-0,073	-0,030
Y_2	55930,414	-0,003	-0,003	-0,003	0,000	-0,011	-0,011	0,039

Литература

1. Мицкевич В.И. Вычисление различных видов засечек на ЭВМ методом сверхрелаксации. «Геодезия и картография», 1974, №10, с. 36–40.
2. Маркузе Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., Недра. 1982.
3. Мицкевич В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования. Новополоцк, Изд-во ПГУ, 1977.
4. Мицкевич В.И., Будо А.Ю. Алгоритм обобщенного метода Lp-оценок на основе метода Ньютона. Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия В. Прикладные науки. 2006, №9, с. 92–96.
5. Мицкевич В.И. О невозможности поиска грубых ошибок измерений при параметрическом способе уравнивания. «Геодезия и картография», 1994, №4, с. 24–26.
6. Яковлев Н.В., Беспалов Н.А., Глумов В.П. и др. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы)/ Учебное пособие для вузов. М., Недра, 1982.
7. Рабинович Б.Н. Практикум по высшей геодезии. М., Геоиздат, 1961.